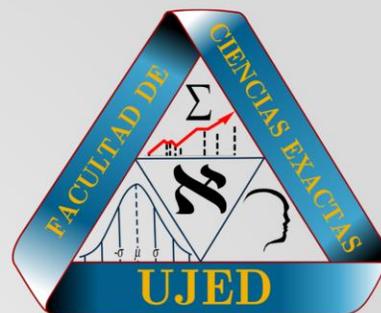


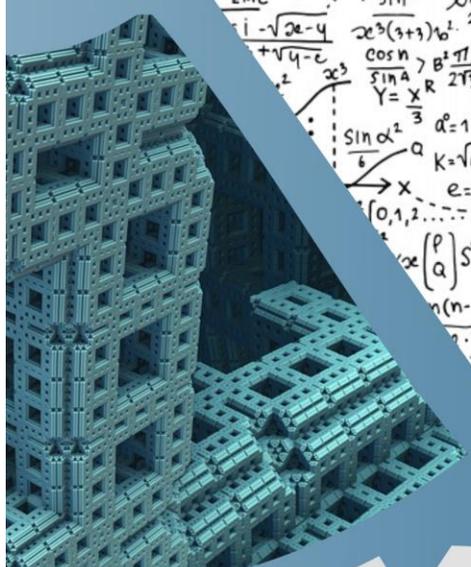


UJED

Universidad Juárez
del Estado de Durango



π



X

ENCUENTRO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA БЛОКОВЫЙ

Del 3 al 5 de abril de 2019
Facultad de Ciencias Exactas

COMITÉ ORGANIZADOR

Dra. Angelina Alvarado Monroy
Dra. Diana Barraza Barraza
Dr. Ricardo Isaac Bello Aguirre
M.C. Adriana Escobedo Bustamante
L.M.A. Javier Espinoza de los Monteros D.
M.C. Miguel García Alvarado
Dra. Alicia López Betancourt
L.M.A. Jesús Eduardo Mata Cano
Dr. Armando Mata Romero
Ing. Emilio Gontran Mejía Rodríguez
Profa. Rocío Méndez Gurrola
M.C. Saul Nevárez Nieto
M.E.M. Miguel Angel Núñez González
Dra. María del Carmen Olvera Martínez
Dra. Yaziel Pacheco Juárez
Psic. Leticia López Gutiérrez
Dra. Alejandra Soria Pérez
M.C. Enrique Vargas Betancourt
Dra. Rosa Angélica Zamora Rios

Programa General

	Miércoles 3 de abril de 2019	Jueves 4 de abril de 2019	Viernes 5 de abril de 2019
12:20 - 12:45	Inauguración <u>MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN TEMAS DE SALUD PARA BACHILLERATO</u> <i>Elisa Salcedo Talamantes</i>		
12:45 - 13:05	<u>CERCANÍA Y CONTINUIDAD</u> <i>Jafed Martínez Sánchez</i>	<u>CURVAS DE WHATSAPP</u> <i>Brayam Antonio Moreno González</i>	<u>ESTUDIO DE LA RELACIÓN ESTADÍSTICA ENTRE EL COLOR, COMPOSICIÓN FENÓLICA Y OTRAS CARACTERÍSTICAS DE LOS VINOS</u> <i>David Emmanuel López Castro</i>
13:05 - 13:25	<u>ENCONTRANDO NÚMEROS PRIMOS</u> <i>Martha Patricia Galindo Solís</i>	<u>TEOREMA DE HOLDITCH</u> <i>Jessica Carmona Ortega</i>	<u>CUADRADOS MÁGICOS Y ÁLGEBRA LINEAL</u> <i>Francisco Gerardo Véliz Romero</i>
13:25 - 13:45	<u>LA LÓGICA EN LAS ÁLGEBRAS BOOLEANAS</u> <i>Alondra Valdez Hernández</i>	<u>ANÁLISIS SOBRE LA INFLUENCIA DEL TIPO DE MARCA Y CUERDA AL MOMENTO DE AFINAR UNA GUITARRA</u> <i>Juan Candia Vargas</i> <i>Sergio Carrasco Gámez</i> <i>Omar Dozal Alcantar</i>	<u>GRUPO FUNDAMENTAL</u> <i>Raúl Vargas Antuna</i>
13:45 - 13:55	RECESO		
13:55 - 14:15	<u>FUTURAMA Y LAS MATEMÁTICAS</u> <i>Edgar Hernández Moreno</i>	<u>USO DEL GEOGEBRA EN EL CÁLCULO, COMPRENSIÓN Y APLICACIÓN DE ÁREAS ENTRE CURVAS</u> <i>Edgar Rafael Marín Gómez</i>	<u>Y...¿DÓNDE SE APLICAN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS?</u> <i>Carlos Michelle Díaz Leyva</i>
14:15 - 14:35	<u>VELOCIDAD DE LOS DNS 2018</u> <i>Yaremi Elizabeth Rodríguez Estala</i> <i>Silvia Janeth Solís Beltrán</i>	<u>CAPACIDAD CRANEAL Y SU RELACIÓN CON LA MASA CEREBRAL EN HOMBRES Y MUJERES</u> <i>Rodolfo Vázquez Arroyo</i>	<u>COMPARACIÓN DEL EFECTO EMBRIAGANTE EN 3 SABORES DE VINO DE FRUTAS</u> <i>Eybette Mercado Favela</i>
14:35 - 14:55	<u>FACTORES INFLUYENTES EN LA ASIGNACIÓN DE BECAS FEDERALES A MADRES SOLTERAS EN LA UNIVERSIDAD JUÁREZ DEL ESTADO DE DURANGO</u> <i>Marisela Gómez Meza</i>	<u>APRENDIZAJE COLABORATIVO EN DOCENTES: DESARROLLO DE MODELOS PARA LA ENSEÑANZA DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA</u> <i>Florita Iliana Cano Rodríguez</i>	Participación especial de la Universidad Pedagógica de Durango

[DIRECTORIO DE PARTICIPANTES](#)

Ponencia de Investigación 1

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN TEMAS DE SALUD PARA BACHILLERATO

Elisa Salcedo Talamantes. Asesor: Dra. Angelina Alvarado Monroy
elisa_st_1995@hotmail.com

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas
Nivel: Medio Superior

Palabras clave: Actividades Detonadoras de Modelos, Competencias de Modelización, Educación Media Superior.

Resumen

Se presenta una actividad de modelización en ciencias de la salud con la intención de fomentar el desarrollo de las competencias requeridas en el perfil de formación del bachillerato. La actividad permite elucidar el pensamiento de los estudiantes durante el proceso de solución, a través de una carta dirigida a quien solicita ayuda para las dosis y tiempo recomendado en la administración de medicamentos. La actividad fue aplicada a estudiantes de bachillerato y la evidencia recolectada se analizó y documentó para describir el proceso de desarrollo de los modelos de los estudiantes, se observaron momentos que sugieren el desarrollo de competencias para: entender y problematizar la situación; traducirla a un problema matemático; realizar deducciones; validar y comunicar sus resultados.

Introducción

En los Planes y Programas de Estudio con referencia del Marco Curricular Común del Sistema Nacional de Bachillerato (Secretaría de Educación Pública, 2017), se establece que las competencias disciplinares son nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que se consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida. Las competencias disciplinares de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes y son de carácter básico, lo cual significa que se podrán desarrollar a partir de distintos contenidos, enfoques educativos, estructuras curriculares y estrategias de enseñanza y aprendizaje. Esto permite la creación del Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad, en el cual tengan lugar las aplicaciones de la matemática más allá del salón de clases. Las competencias de formación para que los estudiantes desarrollen la capacidad de interpretar matemáticamente el entorno que los rodea son:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variaciones, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. (SEP, 2017, p. 79)

La operación de los Centros de Servicios de Educación Media Superior a Distancia (EMSaD) está a cargo de instituciones que ofrecen el servicio del tipo medio superior, generalmente Colegio de Bachilleres o Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos. La EMSaD atiende a comunidades lejanas en las que existe baja densidad de población, que no cuentan con otra opción educativa, así como a personas que por diversas razones, no pueden incorporarse al sistema escolarizado.

El objetivo del presente trabajo es presentar los resultados de la implementación de una actividad de modelización que puede propiciar el desarrollo de las competencias requeridas en el perfil de formación del bachillerato. La actividad fue implementada con un grupo de estudiantes de EMSaD en un contexto rural sin experiencias previas en este tipo de actividades. Aunque, se plantea que los estudiantes deben formarse en el esquema de competencias mencionado anteriormente, según el profesor responsable de la clase y lo expresado por los estudiantes, los participantes de este estudio están habituados a formas de enseñanza expositiva y a resolver problemas de aplicación una vez que son estudiados los conceptos y saben exactamente el tipo de conocimiento que emplearan para resolverlos. En contraste con las actividades de modelización, en las cuales deben extraer información del contexto y de sus experiencias previas para matematizar la situación problemática planteada para poder resolverla, es decir, abstraer la situación real y construir un modelo matemático que la resuelva involucrándose para ello en ciclos de entendimiento en los que prueban y revisan constantemente su pensamiento.

Marco teórico

Concebir las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos; desarrollar competencias para construir modelos, plantear y resolver problemas de situaciones reales y argumentar la pertinencia de sus soluciones; la disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; son algunos de los propósitos de la educación en bachillerato (SEP, 2017). Lograr diseños de actividades que apoyen el cumplimiento de tales propósitos, ayudaría a desarrollar en los estudiantes actitudes positivas hacia las matemáticas, al igual que a lograr una forma de pensar creativa, crítica y profunda en contraste con el pensamiento que desarrollan al seguir procedimientos prescritos y tareas rutinarias, como aún ocurre en la mayoría de las aulas en nuestro país.

Las Actividades Detonadoras de Modelos (ADM) son propuestas dentro de la perspectiva situada de Modelos y Modelización en Educación Matemática (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, & Post., 2000; Lesh & Doerr, 2003). En ellas, las múltiples aproximaciones, el uso de matemáticas y el refinamiento del conocimiento surgen de manera natural como parte del proceso de generación del conocimiento. En las ADM los estudiantes producen modelos matemáticos como respuesta a un problema de la vida real que puede resolverse por diferentes vías. Los modelos generados serán utilizados por una persona que solicita ayuda, por tal razón, los estudiantes se ven desafiados a describirlos, explicarlos y/o justificarlos en una carta a detalle para que sean reusables, modificables y manipulables (Lesh & Doerr, 2003). Los problemas que se presentan están situados en un contexto real. Para el diseño de una ADM se siguen los principios propuestos por Lesh et al. (2000) que aseguran que la actividad está situada en un contexto real; genera la construcción de diferentes modelos; permite que los estudiantes autoevalúen sus respuestas, obliga a que documenten y comuniquen sus soluciones; que los modelos generados sean reusables, se puedan compartir; y, que contengan conocimiento matemático significativo.

Según Lesh y Doerr (2003) en una actividad de modelización los estudiantes pasan por una serie de interpretaciones de la situación presentada a través de diferentes medios de representación y ciclos de modelado. Cada «ciclo incluye los cuatro pasos: (a) *descripción* que establece una correspondencia entre el mundo modelo y el mundo real (o imaginado), (b) *manipulación* del modelo para generar predicciones o acciones relacionadas con la situación original de resolución de problemas, (c) la *traducción* (o predicción) que lleva los resultados relevantes al mundo real (o imaginado), y (d) la *verificación* sobre la utilidad de las acciones y predicciones» (p.17).

Planteamiento del problema

El programa de bachillerato (SEP, 2017) establece que las competencias disciplinares de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos, así como, que las aplicaciones de las matemáticas van más allá del salón de clases. Las competencias mencionadas en la introducción de este documento, buscan formar a los estudiantes en la capacidad de interpretar matemáticamente el entorno que los rodea. Sin embargo, desde la entrevista a los estudiantes y al profesor del contexto en el que se trabajó en esta investigación, se puede afirmar que en la práctica no se trabaja con aplicaciones de la matemática más allá del aula. Los estudiantes están acostumbrados a ver un tema y el problema que, posteriormente, será planteado estará basado en éste, y sólo con ese procedimiento le dan solución al problema, muchos de estos problemas pocas veces son realmente aplicados a la vida real transmitiendo al alumno la idea errónea de que la matemática no es aplicable más allá del tratamiento escolar.

En este trabajo se considera necesario proponer a los estudiantes experiencias que despierten su interés y lleven implícita una razón sustentable para inspirarlos a encontrar un modelo matemático que resuelva la situación real planteada, utilizando conocimientos con los que ya cuentan y construyendo e integrando nuevo conocimiento en sus sistemas conceptuales desde la necesidad de resolver la situación presentada.

Metodología

Aunque la actividad motivo de experimentación en este trabajo no es un diseño de la autora. Se va a utilizar la metodología basada en el diseño efectivo para el aprendizaje, dado que es de interés explicar por qué funciona el diseño y sugerir formas para adaptarlos a otros contextos y circunstancias. En estos estudios, por un lado, el diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación, y, por otro lado, se llevan a cabo análisis continuos y retrospectivos para informar la mejora del diseño. Las tres fases para realizar un experimento de diseño son: prepararse para el experimento, experimentar para apoyar el aprendizaje y realizar análisis retrospectivos de los datos generados durante el curso del experimento con la población objetivo o grupo de estudiantes (Cobb & Gravemeijer, 2008). Para Cobb y Gravemeijer la investigación del diseño se define como una familia de enfoques metodológicos en los que el diseño instruccional y la investigación son interdependientes. Por un lado, el diseño de los ambientes de aprendizaje sirve como contexto de la investigación y, por otro lado, los análisis en curso y retrospectivos son realizados para informar la mejora del diseño. Este tipo de investigación implica intentar el desarrollo de formas particulares de aprendizaje mientras se estudia el aprendizaje que se produce en los ambientes diseñados.

Recolección de datos y estudiantes participantes

Este trabajo se centra en un aula de 35 estudiantes de cuarto semestre de EMSaD y con edad promedio de 16 años. Se conduce el experimento para ver cómo funciona el diseño de una ADM propuesta en temas de salud. En el aula la autora de este trabajo asumió la responsabilidad del grupo. Para la recolección de datos se hicieron notas de campo, se capturaron algunas discusiones entre los estudiantes, se tomaron fotografías y se recogieron las evidencias escritas generadas durante el proceso, así como los archivos en Excel.

Diseño de las actividades

Se introduce el contexto a través de un escrito tipo artículo de periódico que informa sobre el cuidado de la administración de antibióticos y la forma en la que éstos actúan en el cuerpo (ver Tabla 1).

Tabla 1. Lectura de Temas de Salud para establecer el contexto para la actividad de modelización (Tabla 2).

TEMAS DE SALUD

Un saludo muy afectuoso para todos ustedes, amables lectores de esta su columna semanal Temas de salud. En esta edición hablaremos de un tema muy interesante: la importancia de llevar a cabo al pie de la letra los tratamientos que el médico nos indica cuando nos enfermamos.

De acuerdo al Dr. Muciño, “Existen 4 principios que deben seguirse para el uso apropiado de un antibiótico. Primero, se debe recetar en antibiótico adecuado. Segundo, se debe tomar la dosis indicada. Tercero, esta dosis se debe administrar en los intervalos definidos. Y cuarto, el antibiótico debe tomarse prolongadamente durante todo el tiempo que el médico indique.”

Además de ciertos cuidados específicos para cada enfermedad en particular, estos tratamientos incluyen por lo general las indicaciones precisas respecto de los tiempos y horarios en que debemos tomar los medicamentos que nos recomiendan. Por ejemplo, para una cierta infección intestinal el médico recomienda tomar un antibiótico cada 6 horas por un periodo de 8 días. Comúnmente al segundo o tercer día sentimos una notable mejoría en nuestro malestar, por lo que, pensando que ya estamos sanos, algunos hemos decidido interrumpir el tratamiento que estipuló el médico. Para entender el error en que se cae cuando hacemos esto, a continuación explicaremos de una manera muy sencilla la forma en que actúan los antibióticos dentro del

organismo cuando está enfermo.

En este proceso, nuestro sistema inmunológico (defensas) libra una dura batalla en contra de los agentes que han provocado que nos enfermemos (bacterias infecciosas). Los antibióticos contenidos en los medicamentos que nos recetan, son los instrumentos por medio de los cuales el sistema inmunológico podrá erradicar a los agentes infecciosos de nuestro cuerpo, y así curarnos. Sin embargo, si hacemos un uso inadecuado de los antibióticos y no seguimos con la receta del médico, las bacterias infecciosas más fuertes no van a morir.

Cuando tomamos un antibiótico, las pastillas generalmente indican la concentración del mismo (por ejemplo, 250 mg). Al tomar el antibiótico oralmente, pasa a través del aparato digestivo y es en el estómago o en el intestino delgado donde se absorbe. Posteriormente, continúa la digestión y se desechan los residuos. Esto es, sólo un cierto porcentaje del medicamento se absorbe y se aprovecha, y el resto se elimina. Esto mismo sucede cada vez que ingerimos una nueva pastilla. Para que el antibiótico funcione eficazmente, es decir, para que realmente ayude a las defensas del cuerpo lo suficiente para terminar con la infección, es imprescindible llegar a cierta concentración del antibiótico dentro del organismo, y además mantenerla durante un tiempo específico. Si la concentración del medicamento dentro del cuerpo no llega a los límites deseados y necesarios, lo único que sucede es que no mataremos a las bacterias más fuertes; éstas se reproducen, y la enfermedad se agrava.

Para llegar a los límites adecuados de concentración, es necesario: primero, tomar la misma concentración del medicamento periódicamente (por ejemplo cada 6 horas) para no bajar los límites de concentración, y segundo: continuar el tratamiento durante el número de días indicado (8 días en nuestro ejemplo), para poder subir la concentración del antibiótico hasta los límites deseados y después mantenerla durante el número de días requeridos para que el sistema inmunológico acabe con la infección.

Para entender mejor esto, veamos un pequeño ejemplo:

Un cierto paciente tiene una infección y el médico le recomienda tome un antibiótico. La presentación de este antibiótico viene en pastillas de 250 mg. Las indicaciones del médico fueron que el paciente tomara una pastilla cada 6 horas durante 8 días. Supongamos que el antibiótico se empieza a tomar a las 8 am, podemos suponer que a las 10 am, ya se absorbió el 60% del antibiótico, y el 40 % restante ya se desechó. Por lo tanto, el cuerpo tiene una concentración del antibiótico del 60% de 250 mg = 150 mg. Esta concentración se mantiene hasta las 2 pm, y después de esa hora, se va desechando en un 40% cada dos horas. Es por ello que lo más recomendable es que para las 2 pm, el paciente se tome otra pastilla de 250 mg del antibiótico, y entonces el cuerpo queda con una nueva concentración del 60% pero ahora de la pastilla 1 + pastilla 2. Es decir, el cuerpo absorbe el 60% de la nueva pastilla (250 mg) más la cantidad de antibiótico que ya tenía de la anterior pastilla (150 mg), esto es el 60% de 400 mg igual 240 mg. Y así sucesivamente con las siguientes pastillas la 3, la 4, la 5, etc.

Esperamos que este artículo haya sido de su agrado e interés y como comentario final me gustaría decir que sólo el médico es el indicado para recomendarnos el tratamiento adecuado para cada padecimiento, dependiendo de la enfermedad de que se trate, y también de las características del paciente como la edad, el peso, el sexo, etc.

No tome más medicamento del señalado por su médico ni se automedique, puede ser muy perjudicial.

Y recordemos que, como dice el lema de esta columna... ¡La salud es lo más importante de la vida, cuídela!

Fuente: Carmona (s.f)

Enseguida se proponen una serie de preguntas de enfoque para indagar en la comprensión de los estudiantes acerca de la lectura realizada.

Con base en la información del artículo que acabas de leer, contesta las siguientes preguntas.

1. Explica brevemente y con tus palabras la manera en que un antibiótico actúa en nuestro organismo cuando estamos enfermos.
2. ¿Qué función tiene el sistema inmunológico de una persona?

3. ¿Qué pasa cuando una persona cuando deja de tomar el antibiótico antes de terminar el tratamiento?
4. Describe qué sucede con una pastilla de antibiótico una vez que es ingerida por el paciente.

Posteriormente, tiene lugar la *Actividad Detonadora de Modelos* que trata con la administración adecuada de un antibiótico a dos perros de distintos tamaños y peso como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Actividad Detonadora de Modelos “Administración de Antibiótico”.

Julio y David están preocupados por sus mascotas. Tienen 4 perros: Lula, Dingo, Fido y Canito. Lula y Dingo son de raza chihuahueña y Fido y Canito son gran danés. Hace unos días, Canito y Lula empezaron con síntomas de vómito y diarrea, por lo que Julio los llevó al veterinario. La Dra. Mora diagnosticó a Canito y a Lula con una infección intestinal no tan grave, muy común en estos días de tanto calor y le recetó un antibiótico. El antibiótico se vende en tabletas de 500mg que se pueden partir. Por las características específicas del padecimiento, la Dra. Mora cree que lo más recomendable para curar el padecimiento es que organismo de Canito llegue a una concentración del antibiótico de 750 mg y que mantenga este nivel de concentración durante 3 días más. Mientras que para Lula, siendo un perro más pequeño, debe alcanzar una concentración de 185mg y mantenerla durante 3 días. La Dra. Mora sabe que para todos los perros cada 8 horas se desecha el 40% de la concentración de antibiótico (y el organismo absorbe el 60% restante).

Julio y David están preocupados porque no se pueden acordar en cuántas partes deben partir la tableta de 500mg para darle a Lula la dosis adecuada que recomendó la Dra. Mora. Tampoco se pueden acordar del número de días que deben dar la medicina a sus perros.

Ayuda a Julio y a David escribiendo una carta donde les expliques cómo pueden calcular: (1) la cantidad de antibiótico que cada animal debe ingerir (es decir, cuántos miligramos), (2) el intervalo de tiempo, o cada cuántas horas debe administrarse el antibiótico, y (3) en número de días que deben tomar el tratamiento.

Tu carta debe explicar el método para hacer estos cálculos y que también sirva para otros casos en los que los perros puedan ser de mayor o menor tamaño y necesiten mayor o menor concentración de antibiótico.

Aquí está una foto de Julio con Lula, Dingo, Fido y Canito que tomó David.



Gran danés y Chihuahuas por David Shankbone,

Fuente: Carmona (s.f).

Resultados

Fase 1: Preparación para el experimento

Durante esta fase se exploran las características del grupo en el cual se realizaría el experimento, el contexto y las condiciones de infraestructura del mismo. Se diseña o selecciona una actividad propicia y también, se anticipan las probables soluciones que

puedan surgir en el grupo en el cual tendrá lugar el experimento de enseñanza y aprendizaje.

Para lo anterior, se solicitaron los permisos necesarios con las autoridades del plantel. Se pudo investigar que en el grupo no habían tenido experiencia con actividades de modelización y muy pocas actividades de matemáticas aplicadas. Además, en las actividades trabajadas siempre era claro el procedimiento y las herramientas conceptuales que los estudiantes utilizarían para resolver los problemas propuestos. Para anticipar las posibles soluciones que se darían en el grupo, se muestra una posible solución como ejemplo (Figura 1 y Tabla 3). Esta solución fue proporcionada por dos estudiantes de licenciatura pensando en las posibilidades que tendría un estudiante de cuarto semestre de un bachillerato del contexto en el cual se implementaría.

Figura 1. Gráfica y tabla asociada al modelo para resolver la ADM propuesta.

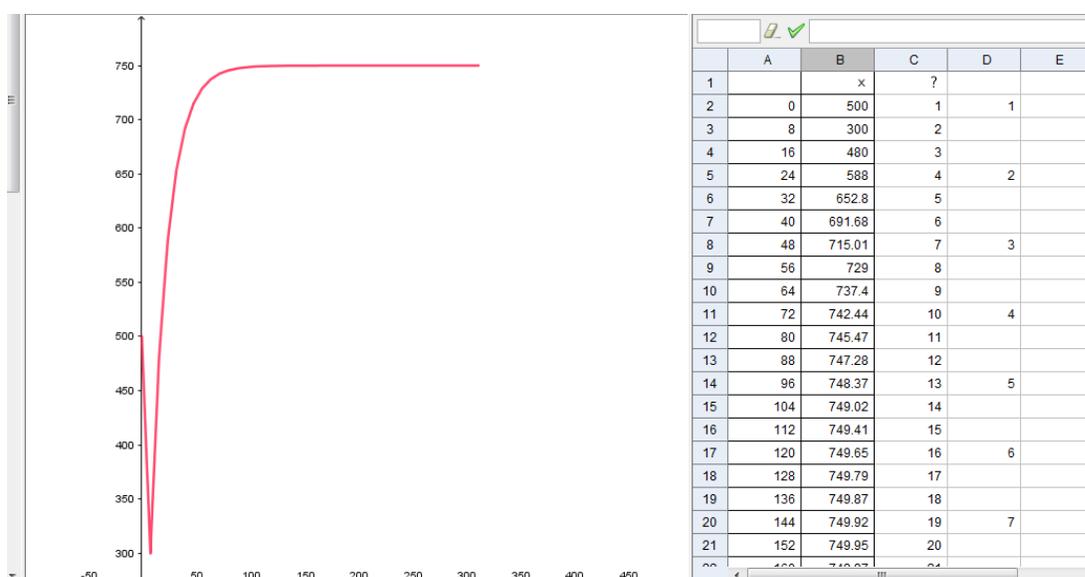


Tabla 3. Descripción del modelo anticipado de solución a la ADM.

Hola Julio y David, nos enteramos de su problema y lo que proponemos es lo siguiente:

Lo que hicimos fue hacer una tabla en Excel y graficando en Geogebra, un software de geometría dinámica, para poder verificar las cuentas de manera más sencilla. Si los perros absorben el 60% de la concentración del antibiótico cada 8 horas, tomé los intervalos de tiempo como 8 horas. Como cada 8 horas absorben el 60%, a las siguientes ocho horas tomamos ese 60% y le sumamos la pastilla de nuevo, luego a las siguientes ocho horas, el 60% anterior y le sumamos la nueva pastilla y, así sucesivamente, todos estos cálculos se pueden hacer por medio de una regla de tres simple.

En el caso de Canito si le suministramos la pastilla completa de 500 mg, a las ocho horas sólo absorbió el 60%, para saber cuántos mg absorbió hacemos una regla de tres simple $((60*500)/100)=300$, lo que quiere decir que sólo absorbió 300 mg, entonces es tiempo de darle de nuevo la pastilla, a las siguientes ocho horas de nuevo absorbe el 60% de la cantidad que tiene, es decir, los 300 de la anterior y los 500 de la nueva, tiene 800 mg y

hacemos el 60% de esta, $((60 \cdot 800) / 100) = 480$, las siguientes ocho horas los 500 mg de la nueva y los 480 de la anterior y sacamos el 60%, $((60 \cdot 980) / 100) = 588$, así sucesivamente, hasta llegar a las 25 horas, que son 8 días que es cuando llega a los 750 mg de concentración del antibiótico, y tres días más con esta misma concentración, dando un total de 14 días.

Para Lula, siendo un perro más pequeño, debe alcanzar una concentración de 185 mg y mantenerla durante 3 días, haciendo la prueba con media pastilla, un tercio, un cuarto y un quinto, no llegamos exactos a los 185 mg, de concentración, pero con 124 mg de la pastilla en la hora 88 alcanza una concentración de 185.3 no la mantiene durante los tres días, pero es lo más cercano, llegando a los 186 mg de concentración, por lo que serían 124 mg por 8 días.

Para darte una mejor idea checa la tabla en Excel con días, horas y distintas fracciones de pastillas.

Espero te sea de ayuda y que se mejoren pronto Canito y Lula.

Fuente: Elaboración propia con información de estudiantes.

Fase 2. Experimentar con la ADM para apoyar el aprendizaje: Esta fase resulta atractiva para los participantes, pues les muestra una forma en la que las matemáticas se aplican en la vida real, en este caso, relacionado con ciencias de la salud. La creatividad, imaginación y conocimientos básicos de matemáticas son parte fundamental para poder resolver la situación planteada en la ADM (Tabla 2) y con datos relevantes a extraer de la lectura del contexto (Tabla 1). En esta experimentación surgieron una variedad de modelos que utilizaban diversas herramientas.

Se identificó, al introducir la actividad, que 20% de los participantes tenían interés en temas de salud (enfermería, medicina humana, química y medicina veterinaria) y 0% en temas de matemáticas, el resto se dividía en gustos por diferentes ingenierías y otros que no tenían claridad.

El grupo se organizó en equipos con vistas a que se trabajara de manera colaborativa. Las actividades se implementaron con estudiantes de educación de EMSaD 03 del municipio de Indé, Durango, con un grupo de 35 estudiantes de cuarto semestre, que se dividió en 6 equipos, 5 equipos con 6 integrantes y un equipo de 5.

Enseguida, se pidió que los estudiantes realizaran la lectura titulada “Temas de salud” para introducirlos al contexto. El texto presentado contiene la información suficiente para que los estudiantes puedan extraer aquella que sea relevante para utilizarla al construir su modelo. Leyeron en voz alta el texto y dieron una breve explicación en cada párrafo, de tal manera que se podía constatar lo que estaban entendiendo del contexto. En esta parte se llevaron 30 minutos, luego le dieron respuesta a las preguntas de comprensión (10 minutos) y se hizo, posteriormente, una socialización de las respuestas en un lapso de 10 minutos más, dan las respuestas en voz alta y exhiben su comprensión lectora.

Para *problematizar la situación planteada*, inician con la lectura de la ADM, haciendo partícipes a los estudiantes, se hace una conexión con la lectura realizada sobre el contexto, para la comprensión de la situación que se presenta.

Para *matematizar la situación*, en un inicio se les da la oportunidad a los estudiantes de analizar el problema y encontrar posibles soluciones, utilizando las herramientas que consideren necesarias. Los estudiantes encuentran un modelo para responder a la situación. Al principio, se percibió que ninguna idea funcionaba, dado que no comprendían la asimilación del medicamento al paso del tiempo, así que regresaban a la lectura, discutían entre pares y la autora de este escrito, al monitorear el trabajo adoptaba una actitud pasiva y cuando era necesario hacía preguntas para centrarlos en el trabajo, para que pensarán y pudieran involucrarse en la tarea.

Para *validar sus resultados preliminares*, gradualmente empezaron a hacer pruebas entendiendo en qué parte estaban fallando y qué elementos deberían considerar. Al momento de probar el modelo, se daban cuenta que su procedimiento era lento necesitaban de herramientas más eficaces, pero no sabían que utilizar, algunos se apoyaron de Excel para hacer cálculos rápidamente. Cabe mencionar que la escuela tiene muchas carencias de equipo de cómputo, así que los estudiantes podían utilizar sólo una computadora. Como consecuencia de ello, se observó que tenían muy poca experiencia con Excel y lo estaban utilizando para tener los datos disponibles y organizados pero sin utilizar funciones (por ejemplo, fórmulas). Así que, se les apoyó diciéndoles que era posible hacer las operaciones e indicarlo con la fórmula, básicamente se les dio a conocer la sintaxis y la fórmula ellos mismos la generaron. Enseguida, se dieron cuenta de que en cada renglón repetían el mismo procedimiento. Como ya lo tenían entendido, se les apoyó para automatizar el proceso.

Con lo anterior, refinaron sus modelos al mejorar la situación de la tabla dinámica de Excel, con ello, agilizaron la actividad y pudieron llegar a una solución. Sin embargo, la falta de computadoras fue una limitante para lo logrado hasta el momento, así como la falta de confianza de los alumnos al pensar que cada uno por su parte no lo lograrían, pues requerían de muchas operaciones. Aún con las limitaciones del tiempo, los estudiantes fueron trabajando en conjunto, lento pero ya con una comprensión del funcionamiento de la situación.

Para *comunicar sus ideas*, en un inicio, debido a que ya unos estaban listos y otros no, se pasó por equipo e iban diciendo sus resultados, faltando 20 minutos para concluir, se pusieron de pie para comunicar su modelo.

A pesar de haber comprendido cómo funciona un antibiótico en el cuerpo se les dificultó mucho poder comprender el problema, pasaron una hora 50 minutos para construir, probar y refinar el modelo. Resultó atractivo el problema para ellos, pero no entendían que, del contexto (la lectura “Temas de salud”), debían identificar los datos (que no aparecen en la ADM). Esto confirma que están habituados a tener todos los datos disponibles en el enunciado del problema y más aún, conocer anticipadamente qué método de solución o que herramientas matemáticas van a emplear.

Algunas de las propuestas finales de los equipos se describen a continuación y también se muestran ejemplos de las cartas en las cuales comunican sus modelos a los clientes potenciales (Figura 3).

Propuesta Equipo 1:

A Canito se le da la pastilla completa, con los cálculos que hicieron se aproximaron a 750 mg, llegaron a 749.9 g y de ahí, variaban los decimales sin llegar a 750 por lo que

redondearon para llegar a concluir que se le tenía que dar el antibiótico por 5 días (152 horas), pero no contaron los 3 días más. Lo hicieron por medio de una regla de tres simple. Trabajaron manualmente los cálculos. Solo dieron un aproximado para Lula.

Propuesta Equipo 2:

Hicieron cálculos por medio de una regla de tres simple, utilizaron el método de prueba y error, para Lula intentaron con 60 mg y al probar se dieron cuenta que no llegarían, luego con 123 y tampoco les cumplió con las expectativas, probaron con 124 y llegaron a una buena aproximación, por lo que recomendaron 240 horas (11 días) 124 mg cada 8 horas para la atención de Lula. En este equipo no concluyeron la dosis para canito.

Propuesta Equipo 3:

Utilizando una tabla en Excel, hicieron una ecuación para poder saber qué cantidad deberían tomar Lula y Canito, donde x eran los mg y pasadas 8 horas tendrían que el perro absorbió $0.6x$ mg de éste. Luego, en ese tiempo le daban otra dosis sumando $.6x+x$ mg o $1.6x$ mg de concentración del antibiótico, pasadas 8 horas nuevamente veían que la concentración les quedaba en $.6*1.6x$ mg , y así, cada 8 horas.

Por lo que concluyeron que para Lula, deberían llegar a una concentración de 185 mg , según su tabla de Excel, con una dosis de 125 mg , es decir $\frac{1}{4}$ de una pastilla de 500 mg , cada 8 horas, en 9 dosis llegaron a esa concentración. Es decir, 3 días, y sumando los 3 días que se debe mantener, tienen que Lula debe tomar $\frac{1}{4}$ de pastilla cada 8 horas por 6 días, esto mantiene la concentración de antibiótico dentro del margen de error.

Para Canito, la concentración deseada fue de 750 mg de antibiótico, esto se logró con 12 dosis de 500 mg , con separación de 8 horas entre las dosis. Es decir, Canito debe tomar 1 pastilla cada 8 horas por 7 días.

Figura 3. Ejemplos de cartas de los participantes.

Hola Julio y David me entiere de su problema y me tomé la libertad de buscar una opción para ayudarles con él. Lo que hice fue hacer una tabla en excel para poder verificar las cuentas de manera más sencilla, en esta tabla ingresé la ecuación que describe el comportamiento de la concentración de la pastilla cada intervalo de tiempo. Como el veterinario les mencionó, las ferias desechan 70% de la concentración del antibiótico cada 8 hrs. Por eso tomé los intervalos de tiempo como 8 hrs para tener una medición correcta sin supuestos, es decir cada 8 hrs los perros solo asimilan el 60% de la concentración total de medicamento lo que debemos encontrar entonces es la cantidad de medicamento correcta para darle a cada perro.

Para la primera vez que suministremos el activo la cantidad será X mg y pasados los 8hrs tendremos que el perro absorbió $0.6X$ mg de este. Luego en este tiempo le damos otra dosis sumando $0.6X + X$ mg o $1.6X$ mg de concentración del antibiótico, pasadas 8hrs nuevamente vemos que la concentración última queda $0.6 \cdot 1.6X$ mg de la concentración, y así cada 8hrs.

La tabla que elaboré, tiene suficientes pasos para ver el resultado de la concentración de antibiótico a futuro. Para Lula debemos llegar a una concentración de 180mg, según Ricardo x 3 nuestra tabla, con una dosis Wendy de 125mg, es decir $1/4$ de pastilla Naidelva

30 Enero 2019

Estimados Julio y David
 Por medio de esta carta les vamos a explicar como debe tomar el antibiótico su perrita Lula

Lula debe tomar 125mg de Antibiótico cada 8 horas durante 3 días.
 Esto se saca mediante una serie de pasos. En los cálculos sacamos porcentajes ya que el 60% del antibiótico se queda en el cuerpo y el 40% lo desecha.
 Entonces sacamos una serie de pasos de esta manera

$0 \rightarrow 125$ mg
 $8 \rightarrow 12 + 77.4 = 198.4 = 119.04$
 $16 \rightarrow 12 + 119.04 = 231.04 = 138.624$
 $24 \rightarrow 12 + 138.624 = 270.624 = 162.3744$

↑
 horas PD: Así sucesivamente hasta llegar a los 3 días
 cantidad de antibiótico

Afortunadamente = equipo 4.

- Monica
- Perla
- Eduardo
- Yuri
- Yazmin
- Alecn

de 500mg cada 8hrs en 9 dosis llegamos a esa concentración es decir 3 días y sumando los 3 días que se debe mantener, tenemos que Lula debe tomar $1/4$ de pastilla cada 8hrs por 6 días, eso mantiene la concentración de antibiótico dentro del margen de error que ya dimos.

Para Conito la concentración deseada es de 750mg de antibiótico esto se logra con 12 dosis de 500mg con separación de 8hrs entre las dosis, es decir Conito debe tomar 1 pastilla cada 8hrs por 7 días.

Espero haber podido ayudarles, ya veían que sus perros mejorarían pronto. Les mando las tablas, nos vemos,, bye bye...

Fuente: Producción de los estudiantes.

Fase 3. Análisis retrospectivo

En un análisis retrospectivo, con la intención de mejorar el diseño y la implementación en otras aulas. Se puede decir que se esperaba tener acceso al laboratorio de cómputo para poder explorar en representaciones tabulares y gráficas posiblemente en Excel y en el software Geogebra. Por otra parte, se tenía en mente que el profesor responsable del grupo estaría presente apoyando en las actividades, pero no fue así. En ese sentido, los estudiantes

están habituados a comprometerse en actividades que tendrán un impacto en su evaluación sumativa, pero aún con esas limitaciones se puede decir que los estudiantes mostraron interés por resolver la actividad y trabajar en ella durante tres horas. Los estudiantes no están habituados a involucrarse en resolver problemas “abiertos” en los cuales utilizan el conocimiento disponible (consciente o inconsciente), esperan que se les indique qué “matemáticas” utilizar y que el enunciado del problema tenga de manera explícita los datos a utilizar. En ese sentido, fue una experiencia diferente y en la que participaron para lograr resolverla total o parcialmente sintiéndose satisfechos con ello.

Como responsable de conducir el experimento de las actividades en el aula, fue satisfactorio orientar y formular preguntas a los estudiantes para que logran comprender las actividades y entender lo que se esperaba de ellos, unos equipos con mayores logros que otros. No todos llegaron a la respuesta exacta, pero todos llegaron a un entendimiento de la situación y a buenas aproximaciones. Se considera que la gran mayoría puede seguir refinando sus modelos con más tiempo y/o con el apoyo de herramientas disponibles (computadoras) y orientaciones sobre cómo utilizar software.

Al igual que Lesh y Doerr (2003) lo describen, en el ciclo de modelado los estudiantes pasaron primero por una fase de comprensión cualitativa en la que logran *describir* la correspondencia entre la situación y el primer modelo construido; transitaron a una fase de identificación de datos relevantes para luego generar información nueva que les permitió *manipular* del modelo para generar predicciones vinculadas a la situación; lograron también *traducir* la situación al establecer relaciones entre los datos y utilizar representaciones principalmente tabulares. Sólo en un equipo llegaron a una representación algebraica, en ninguno de los equipos se utilizó una representación geométrica. Finalmente, pueden *verificar* la utilidad de su modelo en correspondencia con las acciones y predicciones sobre las dosis requeridas de medicamentos. Se considera que faltaron ciclos para lograr nuevas interpretaciones que permitieran refinar sus modelos en todos los equipos.

Conclusiones

Los modelos para resolver la situación presentada son evidencia del alcance que tiene la ADM para apoyar el desarrollo del pensamiento matemático. La actividad hizo que los estudiantes indagaran en conocimientos previos que desde hace tiempo no utilizaban, desarrollando habilidades y competencias. A pesar de algunos problemas iniciales, ellos tomaron decisiones en equipo ayudándose mutuamente para una mejor y más fácil construcción de un modelo que respondiera al problema. Al construirlo interpretaron la situación y, algunos profundizaron en el uso de Excel, ofreciendo mejor exactitud e incorporando conocimiento nuevo sobre el manejo de este software.

El proceso de resolución de la ADM informada en este reporte muestra la forma en la que el “hacer matemáticas” se convierte en un proceso de desarrollar el conocimiento matemático por medio de la construcción, revisión y refinamiento de los modelos construidos. Durante el proceso, al igual que en la investigación reportada por Werle de Almeida y Lorin Zanin (2016) se observaron momentos que sugieren el desarrollo de competencias en los estudiantes para: 1) entender y problematizar la situación; 2) traducir la situación a un problema matemático al identificar variables y datos; 3) realizar deducciones o esbozar resultados preliminares; 4) validar si sus resultados responden con la

situación real planteada. Adicionalmente a las competencias anteriores se observó la de 5) comunicar el modelo generado. Para representar matemáticamente la situación principalmente utilizaron: porcentajes, ecuaciones, hojas dinámicas con Excel.

Sin embargo, el refinamiento de los modelos necesita ser apoyado por el profesor que guía la implementación de la ADM. Es necesario apoyar a los profesores con talleres de desarrollo profesional docente para que puedan ellos de manera gradual implementar este tipo de actividades y con ello, lograr desarrollar las competencias que en SEP (2017) se demandan. También, se requiere realizar capacitación y desarrollar investigaciones sobre las formas en las que el maestro puede apoyar a los participantes durante la aplicación de actividades que dan lugar a diversas formas de resolver y representar (por ejemplo, en este trabajo no se dieron manifestaciones de representaciones geométricas como se anticipó en la fase 1) la situación, esto ayudará a no cerrar las posibilidades de solución y a que no se retorne a la idea que prevalece de que los problemas en matemáticas son de respuesta única y sólo unos cuantos pueden acceder a ellas.

Referencias

- Carmona, G. (s.f). Actividad Detonadora de Modelos en Temas de Salud. *Talleres de Desarrollo Profesional Docente Campus Viviente*.
- Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experiment to Support and Understand Learning Processes. In A. Kelly, R. Lesh & J. Baek, *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95) New York: Routledge.
- Doerr, H. (2016). Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. Hirsch & A. Roth, (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pp. 197-206). Reston, VA: NCTM.
- Lesh, R. A. & Doerr, H. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education*, (pp. 3-33) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591–646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Cd. México: SEP. Recuperado de <https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf>
- Werle de Almeida, L.M. & Lorin Zanin, A. P. (2016). Competences of the students in mathematical modeling activities. *Educação Matemática Pesquisa*, 18 (2), 759-782.

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 2

VELOCIDAD DE LOS DNS 2018

Yaremi Elizabeth Rodríguez Estala, Silvia Janeth Solís Beltrán. Asesora: Dra. Diana Barraza Barraza

janeth_kltz_89@hotmail.com, yare-rm@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas

Alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Palabras claves: Domain Name System (DNS), Símbolo del Sistema (CDM), Diseño Factorial General

Resumen

El siguiente trabajo muestra un análisis de los DNS más demandados, haciendo una pre-investigación sobre sus orígenes y antecedentes. Contemplando la idea de modificar los DNS preestablecidos en cada ordenador por su fabricante y considerando los servicios que oferta cada DNS. Utilizando un diseño factorial general con 4 factores, a diferentes niveles cada uno, de tal manera que se obtienen 80 corridas en dos replicas, a través de la prueba Kruskal-Wallis se obtuvo como resultado que al menos uno de los servidores DNS tiene una velocidad diferente. En base a este resultados se procede a ver cuál de los servidores DNS es el de mayor velocidad con la prueba `pairwise.wilcox.test` en RStudio se llega a la conclusión de que el DNS Quad9 tiene mayor velocidad.

Introducción:

Este diseño de experimentos consiste en analizar de una lista de cinco DNS más usados, cual tiene mayor velocidad en cargar una página de internet, para ello se utilizó un diseño factorial general, con la ayuda de la estadística descriptiva e inferencial se obtuvo que el DNS con mayor velocidad es el Quad9 32.25 milisegundos, a diferencia de NortonDNS que tiene un tiempo de respuesta promedio de 63.25.

Marco teórico:

Los DNS (Domain Name System) son un traductor de nombres de dominio (nombre que identifica a un sitio web) en direcciones numéricas que las maquinas puedan entender. No han existido desde siempre ya que hasta 1983 se utilizaba un fichero HOST para guardar todos los dominios conocidos. Este sistema nace ante la posibilidad de seguir utilizando ese fichero. El propósito de los DNS es traducir las direcciones IP de cada activo en la red a términos memorizables y fáciles de encontrar. Sin la ayuda de los DNS los usuarios de internet tendrían que acceder a cada servicio web utilizando la dirección IP del nodo. Por ejemplo: sería necesario utilizar `http://172.217.10.110/` en vez de <http://google.com> (ADLSZone, 2015).

Cada compañía de internet que se contrata asigna DNS, que el usuario puede sustituir en cualquier momento por terceros, ya que nos ofrecen más opciones como: acceder a portales bloqueados, restringir el acceso a menores y navegar de manera anónima.

En abril del 2018 se dan a conocer los resultados obtenidos de un estudio realizado por ADLSZone para comparar la velocidad de los DNS con IP 8.8.8.8, 9.9.9.9 y 1.1.1.1 a nivel mundial (ADLSZone, 2018), se obtuvo que el DNS más rápido actualmente es CloudFlare

con 4.98 ms, mientras que Yandex fue el que más tiempo de respuesta tenía con 169.91 (ADLSZone, 2018). El resultado varía dependiendo del lugar en el que se encuentre el usuario, hay DNS que son más veloces en otros países. ADLSZone considera la importancia de hacer el cambio de DNS basado en cinco puntos:

- ✓ Fiabilidad
- ✓ Velocidad
- ✓ Seguridad
- ✓ Control parental
- ✓ Salto de restricciones y bloqueo

Diseño de experimentos.

En la presente investigación se tomará solo como variable de respuesta e interés la velocidad de los DNS, por lo cual para este experimento se propone utilizar un “diseño factorial general”, ya que este diseño factorial general tiene f factores A, B, C, \dots, K con niveles a, d, c, \dots, k , respectivamente, donde la letra K denota al f -ésimo o último factor del conjunto a estudiar, no necesariamente el undécimo, que es lugar de esa letra en el alfabeto. Con este diseño se pueden estudiar f efectos principales, $f(f - 1)/2$ interacciones dobles, $f(f - 1)(f - 2)/(3 \times 2)$ interacciones triples, y así sucesivamente hasta la única interacción de los f factores ($ABC\dots K$) (Gutiérrez Pulido & De la Vara Salazar, Análisis y diseño de experimentos, 2012).

Planteamiento del problema.

Es importante que se dé a conocer cuáles son los DNS con mayor velocidad para que el usuario sustituya en cualquier momento y así obtenga beneficios tales como: navegación de forma más anónima, acceso a portales bloqueados y en el caso de los menores de edad se restrinja el contenido a diferentes sitios web.

Objetivo general:

Comparar la velocidad de carga de los DNS variando la página web, computador y conexión a internet.

Objetivos específicos

- Elegir 5 DNS de los más usados.
- Obtener la rapidez de cada DNS con diferente laptop, modem y conexión a redes de internet.

Justificación:

Cada compañía de internet que se contrata asigna unos DNS, pero es importante que se dé a conocer cuáles son los DNS que el usuario puede sustituir en cualquier momento para obtener los beneficios como: navegación de forma más anónima, acceso a portales bloqueados y en el caso de los menores de edad se restrinja el contenido a diferentes sitios web.

Alcances y limitaciones:

- Realizar el análisis para motivar a los usuarios en el cambio a otro DNS más veloz, mostrando la velocidad de cada DNS.

- El tiempo establecido para realizar el estudio del problema.
- Falta de conocimiento en computación.

Metodología.

Teniendo en cuenta los siguientes cinco DNS se analiza cuál de ellos tiene mayor velocidad contemplando dos marcas de laptop, dos tipos conexión y dos páginas de internet.

Se consideran:

- Google Public DNS: Google ofrece sus propios servidores DNS para usar gratuita y libremente. Las direcciones IP de estos servidores 8.8.8.8 y 8.8.4.4.
- CloudFlare: Es uno de los servidores DNS públicos más recientes, se adapta a las diferentes necesidades del usuario, su IP es 1.1.1.1.
- OpenDNS: Cuenta con planes gratuitos para uso personal o casero, admite filtros para evitar cierto tipo de contenido a modo de control parental y bloqueo de páginas peligrosas, su IP es 208.67.222.222
- Quad9: Servidores DNS gratuitos, ofrecen protección contra virus y contenido fraudulento y bloquea el contenido adulto, su IP es 9.9.9.9.
- Norton DNS Server Lis: Más que un proveedor, es una base de datos con servidores DNS públicos de todas partes del mundo su IP es 199.85.126.10.

Esta investigación es de campo dado que la información recabada fue directamente de las dos laptops disponibles y es un estudio experimental ya que se desea comprobar los efectos en las interacciones de los factores (DNS, laptop, conexión y páginas de internet)

Las principales técnicas y procedimientos para obtención de información relevante fueron consulta bibliográfica (libros y páginas de internet) y navegación en los ordenadores.

Para el análisis de información se consideró un diseño factorial general con un total de 80 ensayos en las réplicas 1 y 2, considerando los siguientes factores:

- ✓ A: DNS
- ✓ B: Marca de laptop
- ✓ C: Conexión
- ✓ D: Página de internet

La matriz del diseño del experimento se muestra en la *Tabla 1*, en donde se tienen los niveles -2, -1, 0, 1 y 2 para los DNS Google Public, CloudFlare, OpenDNS, Quad9 y Norton DNS respectivamente, para la marca de laptop, conexión y página de internet se manejan los niveles -1 y 1, en donde el nivel -1 se le asigna a la laptop Compaq, la conexión por cable y la página de Youtube.com, mientras que el nivel 1 corresponde a la laptop HP, la conexión por Wi-fi y la página de Google.com.

Tabla 1 Matriz del diseño de experimento

DNS	Laptop	Conexión	Página	DNS	Laptop	Conexión	Página
-2	1	1	1	-2	-1	1	1
-1	1	1	1	-1	-1	1	1
0	1	1	1	0	-1	1	1

1	1	1	1	1	-1	1	1
2	1	1	1	2	-1	1	1
-2	1	1	-1	-2	-1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
0	1	1	-1	0	-1	1	-1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	1	-1	2	-1	1	-1
-2	1	-1	1	-2	-1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
0	1	-1	1	0	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	-1	1
2	1	-1	1	2	-1	-1	1
-2	1	-1	-1	-2	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	-1	-1	0	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	2	-1	-1	-1

En la *Ilustración 1* se muestra el gráfico de diseño sin respuesta, el cual contiene cada factor a sus niveles correspondientes los DNS de (-2,-1, 0, 1,2), la página de (-1,1), la conexión de (-1, 1) y la laptop de (-1,1).

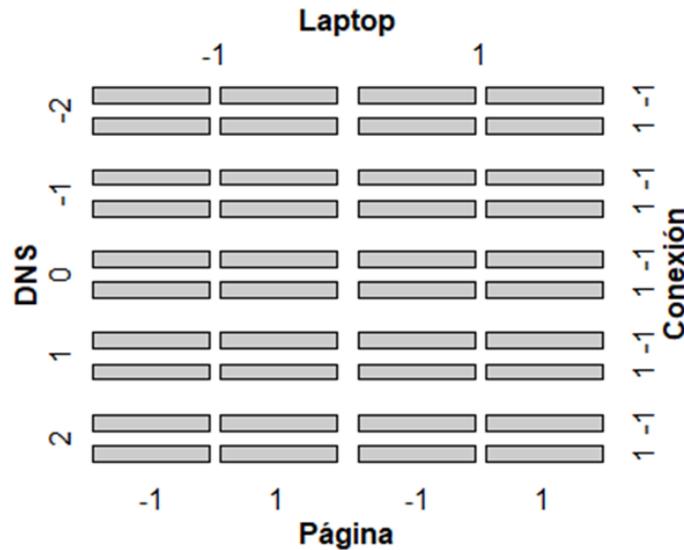


Ilustración 1 Gráfico de diseño sin respuesta.

Resultados.

En la *Tabla 2* se muestra el DNS de Google buscando la página de Google.com en la laptop HP con la conexión Wi-fi, luego bajos las mismas condiciones busca la página de YouTube, luego el mismo DNS de Google busca la página de Google.com pero ahora en la laptop Compaq, con la conexión Wi-fi y la página YouTube.com. Posteriormente el DNS de Google busca la página de Google.com en la laptop HP, pero ahora con la conexión por cable y luego la página de YouTube.com, seguimos avanzando hacia la derecha y observamos que en la columna penúltima el DNS de Google busca la página de Google con la laptop Compaq y conexión por cable y luego en la última columna busca la página de YouTube. Este proceso se repite para los 4 DNS restantes.

Tabla 2 Tiempo en milisegundos obtenido (réplica 1/réplica 2)

DNS	Wi-fi				Cable			
	HP		Compaq		HP		Compaq	
	Google	Youtube	Google	Youtube	Google	Youtube	Google	Youtube
DNS de Google	93/38	50/76	59/54	50/65	29/35	27/34	49/52	54/54
Cloudflare	59/58	88/42	51/50	50/50	25/28	27/29	53/63	49/52
OpenDNS	53/93	37/68	52/58	51/49	28/30	29/26	54/67	48/50
Quad9	43/32	42/26	45/40	46/34	23/24	25/24	38/39	35/34
Norton DNS	96/85	110/55	52/60	76/57	68/46	35/36	68/49	69/50

Al analizar el gráfico de diseño con respuesta que se muestra en la Ilustración 2, se puede ver que existe diferencia entre Norton DNS y Quad9, siendo Quad9 el que presenta un tiempo de respuesta menor de todos los DNS comparados, así mismo, la laptop HP, la conexión por cable y la página de Youtube.com, muestran un menor tiempo, mientras que

la combinación de Norton DNS, la computadora Compaq y la conexión por Wi-fi al abrir la página de Google.com muestran un tiempo de respuesta mayor.

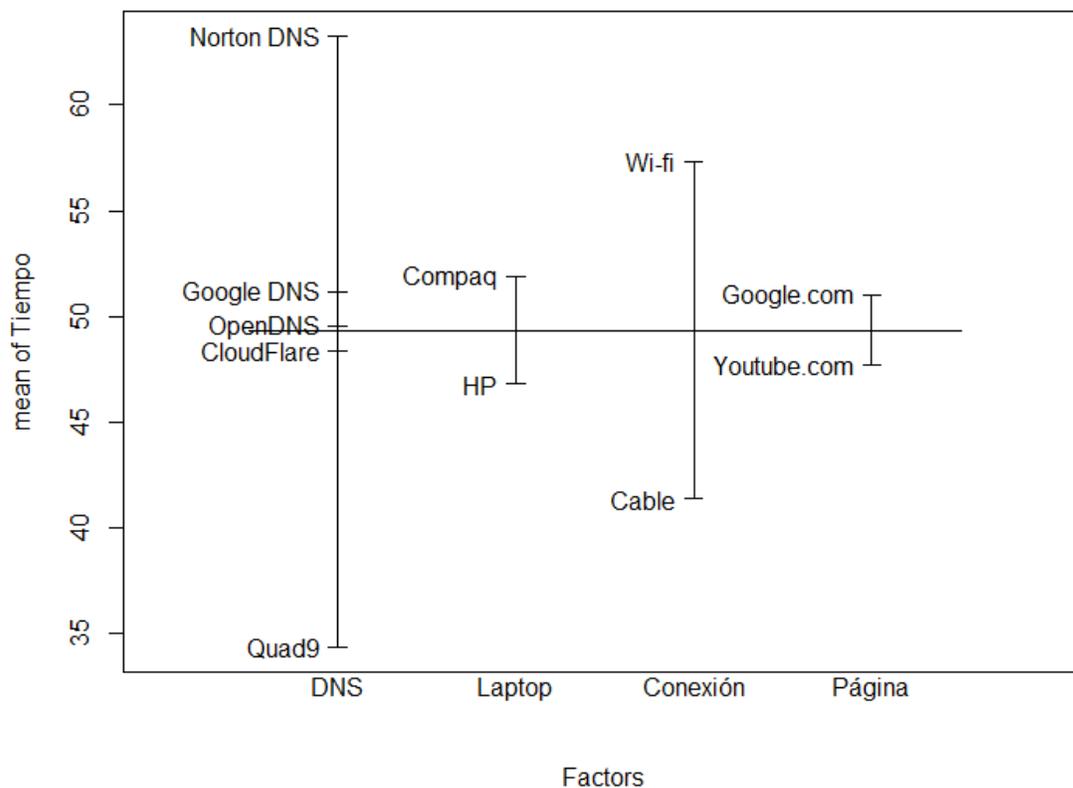


Ilustración 2 Gráfico de diseño con respuesta

En la *Ilustración 3* se muestra el diagrama de caja de los DNS contra el tiempo. El DNS de Google, Cloudflare, OpenDNS, Quad9 y Norton DNS. Norton DNS muestra mayor variabilidad y mayor tiempo de respuesta en comparación con el Quad9 que parece tener un menor tiempo de respuesta y menor variabilidad, es decir, gráficamente el DNS Quad9 es el de mayor velocidad, pues CloudFlare, Google DNS y OpenDNS tienen un mayor tiempo de respuesta y los tres son muy similares.

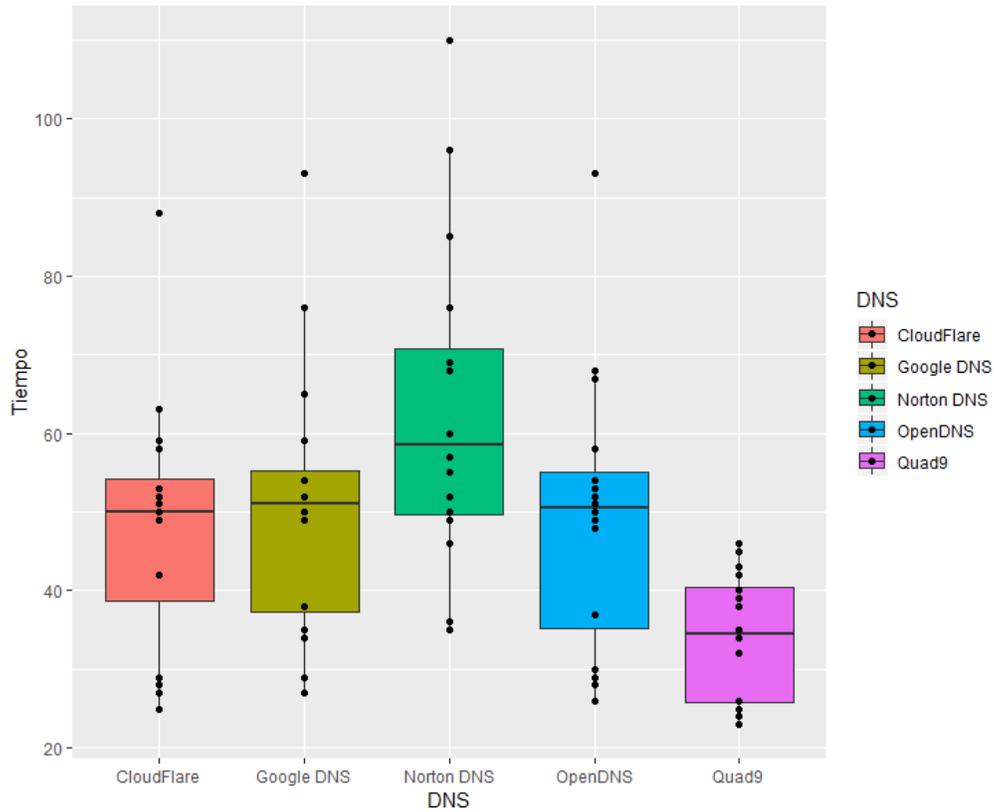


Ilustración 3 Diagrama de caja de los DNS

A continuación, se observa en la *Ilustración 4* un diagrama de caja del laptop contra el tiempo, la laptop Compaq tiene menor variabilidad, pero en promedio mayor tiempo de respuesta., mientras que la laptop HP tiene mayor variabilidad.

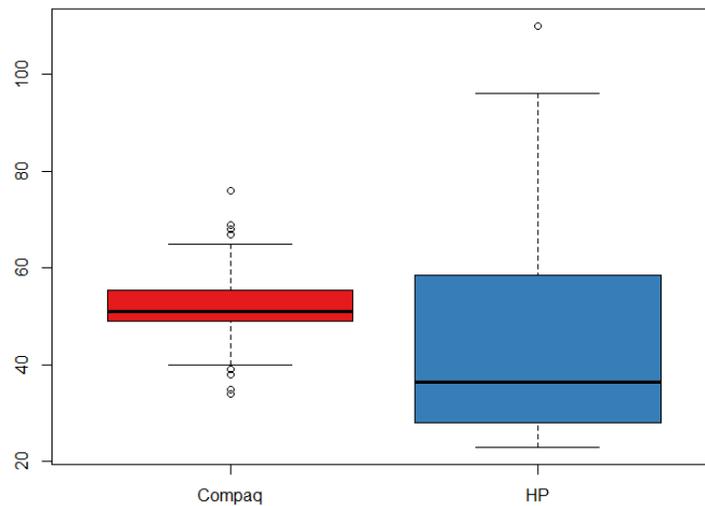


Ilustración 4 Diagrama de caja del laptop

El diagrama de caja de la *Ilustración 5* muestra el tiempo y la conexión, teniendo la conexión por cable una media de tiempo de respuesta menor y mayor variabilidad. La conexión Wi-fi tiene mayor tiempo de respuesta y menor variabilidad, pero tiene algunos puntos atípicos.

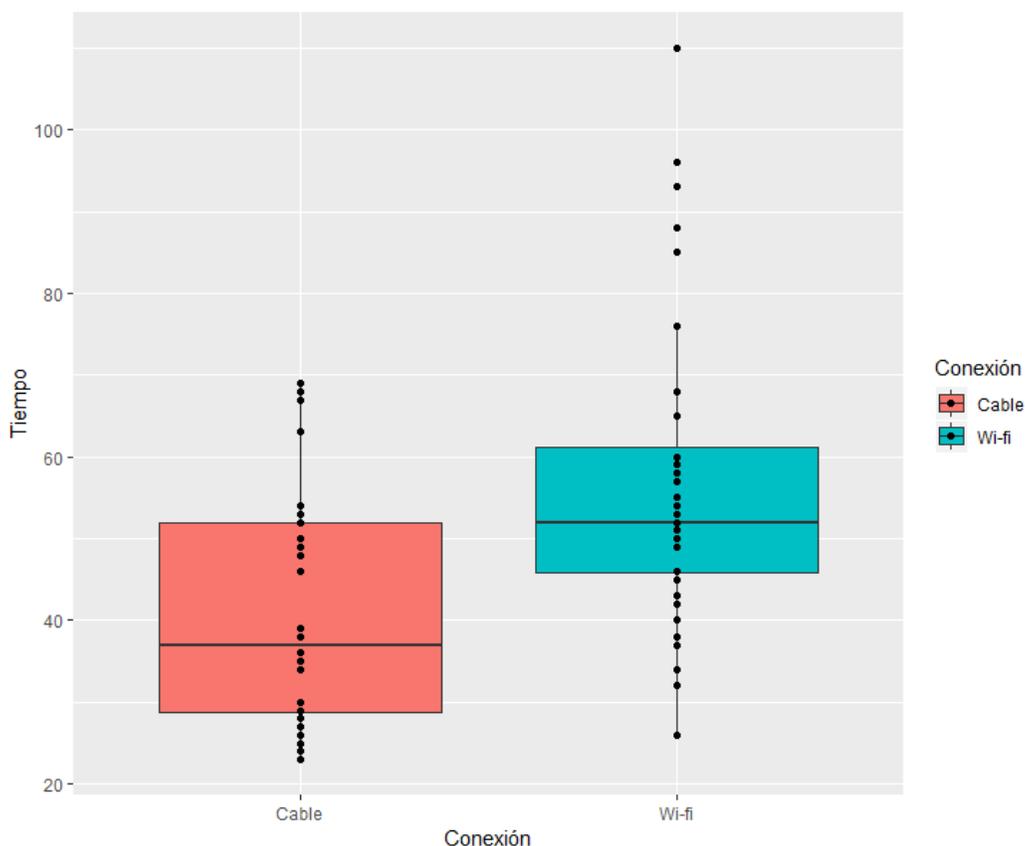


Ilustración 5 Diagrama de caja de la conexión

En la *Ilustración 6*, se observa un diagrama de caja de la página de internet consultada contra el tiempo, puesto que las cajas se solapan, se podría decir que, gráficamente, el tiempo de respuesta de ambas páginas de internet es el mismo.

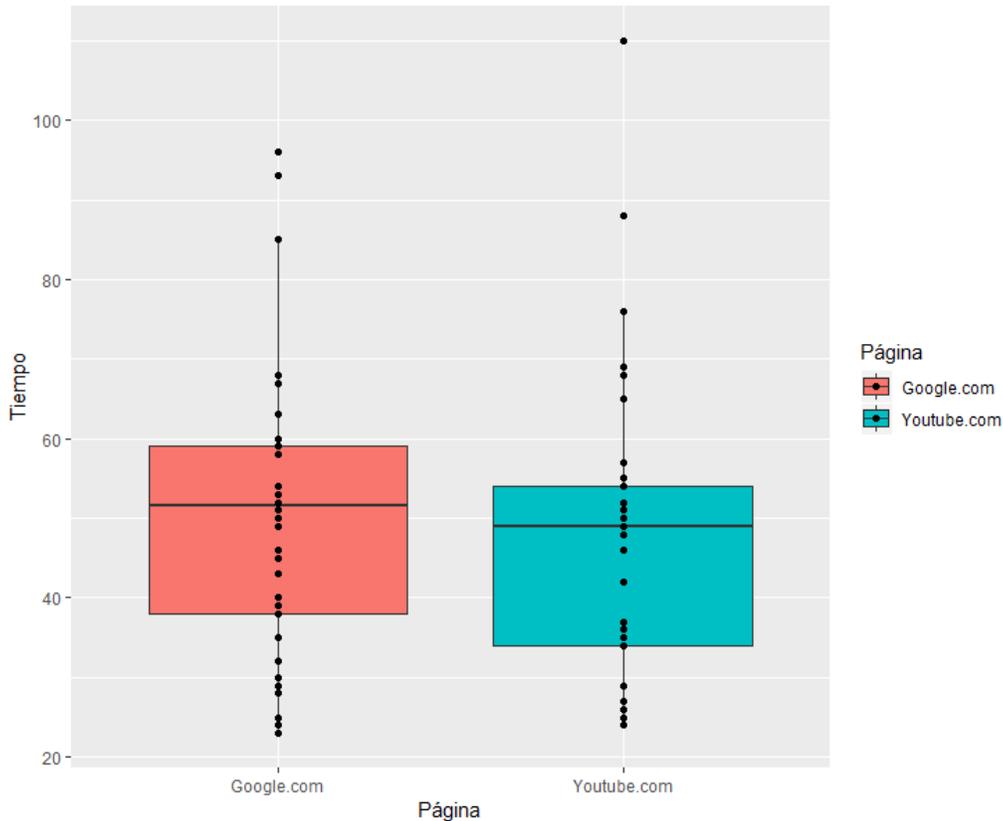


Ilustración 6 Diagrama de caja de la página de internet

Hipótesis para la prueba de Kruskal-Wallis

Se usó la prueba estadística no paramétrica Kruskal-Wallis, debido a que los residuales de a prueba ANOVA no cumplieron con el supuesto de normalidad. Se probaron los siguientes 5 conjuntos de hipótesis con la prueba Kruskal-Wallis.

H_0 : No hay diferencia entre la velocidad de Google 8.8.8.8, CloudFlare 1.1.1.1, Quad9 9.9.9.9, OpenDNS 208.67.222.222 y Norton DNS 199.85.126.20

H_1 : Al menos uno de los servidores DNS tiene una velocidad diferente

H_0 : No hay diferencia significativa entre las computadoras HP y Compaq

H_1 : Existe diferencia significativa entre las computadoras HP y Compaq

H_0 : No hay diferencia significativa entre la conexión por cable y Wi-fi

H_1 : Existe diferencia significativa entre las conexiones de internet

H_0 : No hay diferencia significativa entre Google.com y Youtube.com

H_1 : Existe diferencia significativa entre Google.com y Youtube.com

Resultados de la prueba Kruskal-Wallis

En la *Tabla 3* se muestran los resultados obtenidos al realizar la prueba Kruskal-Wallis, al comparar el p-value obtenido contra un α de 0.05, los renglones en negritas resultaron estadísticamente significativos, es decir, existe diferencia significativa entre los cinco DNS comparados, las laptop y conexión a internet utilizadas, es decir, las hipótesis nulas en el caso de los DNS, laptop y conexión no se rechazan. De igual forma la mayoría de las interacciones de dos factores resultaron ser significativas, salvo por las interacciones Laptop*Página, Conexión*Página. De las interacciones de orden superior solo la interacción Laptop*Conexión*Página resultó ser estadísticamente no significativa.

Tabla 3 Resultados de la prueba Kruskal-Wallis

	chi-squared	df	p-value
DNS	22.912	4	0.0001319
Laptop	6.7092	1	0.009592
Conexión	14.466	1	0.0001427
Página	1.1527	1	0.283
DNS*Laptop	14.126	4	0.006904
DNS*Conexión	13.591	4	0.008722
DNS*Página	13.594	4	0.00871
Laptop*Conexión	11.751	1	0.0006082
Laptop*Página	0.038965	1	0.8435
Conexión*Página	0.010222	1	0.9195
DNS*Laptop*Conexión	15.019	4	0.004661
DNS*Laptop*Página	13.772	4	0.008059
Laptop*Conexión*Página	0.025243	1	0.8783
DNS*Laptop*Conexión*Página	13.381	4	0.009556

Comparación entre los DNS

En la *Tabla 4* se observa mediante la comparación con “pairwise.wilcox.test” en RStudio que los DNS que son diferentes entre sí son los que tienen un p-valor menor a 0.05, de aquí se concluye que el servidor de DNS Quad9 es el único que tiene un tiempo de respuesta diferente en comparación con los demás servidores DNS.

Tabla 4 Comparación de DNS

	Google DNS	CloudFlare	OpenDNS	Quad9
CloudFlare	1.00000	-	-	-

OpenDNS	1.00000	1.00000	-	-
Quad9	0.01668	0.02455	0.02918	-
Norton DNS	0.34400	0.27307	0.27307	0.00022

Conclusiones

Haciendo un análisis en la *Tabla 3* (Resultados de la prueba Kruskal-Wallis) y en *Ilustración 2* (Diagrama de caja de los DN) se llega a la conclusión de que el DNS con mayor velocidad es el Quad9 con un tiempo de respuesta promedio de 32.25 milisegundos, además que la laptop HP tiene menor media en tiempo de respuesta por lo cual es la más rápida, la conexión por cable es la más óptima al tener menor tiempo de respuesta y de variabilidad y que la página de Youtube.com tarda menos tiempo en cargar.

Se recomienda que los usuarios verifiquen cual DNS está establecido en su ordenador y consideren en cambiar dicho DNS por el Quad9 para obtener mayor velocidad.

Bibliografía

- ADLSZone. (31 de 10 de 2015). *DNS: Todo lo que necesitas saber*. Recuperado el 09 de 2018, de http://www.adslzone.net/2015/10/31/dns-todo-lo-que-necesitas-saber/?utm_source=related_posts&utm_medium=manual
- ADLSZone. (06 de Abril de 2018). *Comparativa DNS mas rapidos: 8.8.8.8 vs 9.9.9.9 1.1.1.1*. Recuperado el Septiembre de 2018, de <https://www.testdevelocidad.es/2018/04/06/dns-mas-rapidos/>
- Gutiérrez Pulido, H., & De la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y diseño de experimentos*. DF: McGraw-Hill Educación.
- Statistical tools for high-throughput data analysis. (26 de 11 de 2018). *Kruskal-Wallis Test in R*. Obtenido de <http://www.sthda.com/english/wiki/kruskal-wallis-test-in-r#infos>

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 3

FACTORES RELACIONADOS CON LA ASIGNACIÓN DE BECAS FEDERALES A MADRES SOLTERAS EN LA UNIVERSIDAD JUÁREZ DEL ESTADO DE DURANGO.

Marisela Gómez Meza. Asesora: Dra. Diana Barraza Barraza
emgm77@hotmail.com

Universidad Juárez del Estado de Durango. Facultad de Ciencias Exactas
Nivel Educativo: Maestría en Estadística Aplicada
Palabras clave: BECA, ASPIRANTES, UJED, CONVOCATORIA

Resumen:

Uno de los mejores apoyos económicos recibidos por los estudiantes de la UJED es la beca federal que se otorga a madres solteras. La convocatoria es anual y el número de beneficiadas es mínimo, de ahí surge el interés de analizar las distintas variables que pueden estar relacionadas en el resultado de la asignación de la beca, de modo que se pueda encontrar un camino para beneficiar un mayor número de estudiantes. En este análisis se considera la información de 78 aspirantes de 2017 y 2018, con 16 variables independientes y 1 variable dependiente (cuyo resultado es dicotómico). Después de Estadística Descriptiva, y dada la naturaleza de los datos se aplica un Modelo Lineal Generalizado (GLM) de la familia Binomial y un Árbol de Clasificación. Se encontró que la variable gastos mensuales es la que presenta una mayor relación con la asignación de beca.

Introducción

El Plan Nacional de Desarrollo 2013-2018, señala en la Meta México con Educación de Calidad, Objetivo 3.5, Estrategia 3.5.2 Contribuir a la formación y fortalecimiento de capital humano de alto nivel. Es por ello que el Programa Especial de Ciencia, Tecnología e Innovación (PECiTI), se desprende del Objetivo 3.5, que a la letra dice:

“Hacer del desarrollo científico, tecnológico y la innovación pilares para el progreso económico y social sostenible, en este sentido, el CONACyT ha creado el Programa de Apoyo para las actividades científicas, tecnológicas y de innovación, que tiene por objeto, apoyar, incentivar y potenciar las acciones y proyectos para estar a la altura de las necesidades que demanda un mundo globalizado” (González, M. G. 2018, *pág. 1*).

En virtud de lo anterior, cada año se brinda la oportunidad a través de una convocatoria federal, a estudiantes con promedio mínimo de 7.9 y que sean madres solteras, viudas o divorciadas.

En la UJED, cada año se difunde la convocatoria en mención con el objetivo de apoyar a las aspirantes para que logren concluir sus estudios, sin embargo, se ha observado que las beneficiarias son pocas, y es de interés para la UJED, conocer las razones que están relacionadas en el otorgamiento de la beca, pues durante 2017 y 2018, en la Coordinación de Becas, se han realizado estrategias como, investigar la situación de cada aspirante tanto

en su estudio socioeconómico que se les aplica como en diferentes redes sociales, esto con el fin de priorizar a las aspirantes y capturar sus expedientes en ese criterio como lo indica la convocatoria. A pesar de los factores que se observan para priorizar a las aspirantes, los resultados son distintos a lo esperado. Por esta incertidumbre de la asignación de la beca, es de interés personal y laboral analizar las posibles causas que contribuyan a la obtención de éstas.

Primeramente, se presenta el Marco teórico, es la teoría utilizada en el estudio: Estadística Descriptiva, Modelos Lineales Generalizados y Árbol de Decisión. Enseguida el Planteamiento del Problema para conocer los Antecedentes, Objetivo, Justificación, Alcances y Limitaciones, la Metodología a seguir en el estudio, los Resultados analizados y finalmente las Conclusiones.

Marco Teórico

En la Convocatoria federal, la UJED tiene la inquietud de conocer los factores por los que una aspirante llega a ser becaria de este apoyo. En la Coordinación de Becas se cuenta con expedientes desde el 2013 al 2018, de aspirantes a esta beca, por lo que se ha observado que habiendo aspirantes con mayor necesidad que otras, han quedado fuera de este apoyo.

En este proyecto se hace un análisis de las aspirantes del 2017 y 2018, contando una base de datos de 78 observaciones (aspirantes) y 16 variables independientes (algunas dicotómicas, y otras cuantitativas y una variable de respuesta o dependiente, cuyo resultado es dicotómico (Obtener la beca o No obtenerla). Para analizar la información se requiere de la siguiente teoría:

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

La Estadística Descriptiva es una colección de métodos para la organización, resumen y presentación de datos. Para conocer algunas características de las variables aleatorias observadas en un experimento, se pueden calcular ciertas medidas de tendencia central (moda, media y mediana), así como medidas de dispersión (varianza, desviación estándar y rango). (Rincón, 2007).

En este estudio, solo se realizan gráficas de dispersión, tablas y boxplot.

MODELOS LINEALES GENERALIZADOS.

Los GLM son una extensión de los modelos lineales que permiten utilizar distribuciones no normales de los errores (binomiales, Poisson, gamma, etc.) y varianzas no constantes. Ciertos tipos de variables dependientes sufren invariablemente la violación de estos dos supuestos de los modelos normales y los GLM ofrecen una buena alternativa para tratarlos. (McCullagh & Nelder, 1983). El supuesto que para este proyecto es de interés es una variable de respuesta dicotómica (Recibe la beca o no). Los GLM son una alternativa para tratar la ausencia de normalidad en los datos. Para este proyecto el tipo de distribución de los errores es Binomial.

MODELOS DE REGRESIÓN LOGÍSTICA.

El modelo de Regresión Logística explica el comportamiento de una variable dependiente dicotómica en función de una o más variables independientes cualitativas o cuantitativas.

El objetivo es construir un modelo capaz de describir el efecto de los cambios de las variables explicativas sobre la probabilidad de Y sea 1 (probabilidad de éxito).

Los modelos logit son un caso particular de los modelos lineales generalizados en los que la distribución es binomial y la función de enlace el logaritmo de las razones de probabilidad.

El parámetro β determina el rango y la velocidad del incremento o decremento de la curva, representada por la ecuación 1.

$$\log(y_i) = \beta_0 + \beta_i x_i \quad (1)$$

Los valores estimados por este modelo no son los valores de y, sino los de $\text{Log}(y)$. Para obtener los valores estimados de y, se aplica la función inversa exponencial, como se presenta en la ecuación 2.

$$y_i = \exp(\beta_0 + \beta_i x_i) \quad (2)$$

Para decidir qué factores o variables independientes son importantes para describir la probabilidad de éxito, se utilizan los contrastes de hipótesis de nulidad de los coeficientes del modelo. Uno de los más usados es la prueba de Wald, que sigue un modelo Ji-cuadrado con 1 g.l.

ÁRBOL DE DECISIÓN.

La toma de decisiones es una resolución de problemas y como tal se debe buscar la mejor alternativa, basados en un proceso de ramificación, que es el árbol de decisiones que permite estimar alternativas ante la solución de problemas. (Greenwood, 1978).

Se puede usar Regresión si su variable dependiente es cuantitativa o Clasificación si la variable dependiente es categórica (en este proyecto es dicotómica, por lo que se usa árbol de clasificación).

Planteamiento del Problema

- Antecedentes del Problema:

En la UJED se encuentra la Coordinación de Becas cuya función es apoyar a los estudiantes a la obtención de una beca, ya sea institucional o nacional, como lo es la beca federal para madres solteras. Desde el 2013 se ha observado que las aspirantes cumplen con los requisitos que indica la convocatoria, con algunas diferencias observadas en sus estudios socioeconómicos, kárdex, y demás documentación que entregan a la Coordinación de Becas. Sin embargo, los resultados del otorgamiento de la beca no parecen tener una priorización en cuanto a necesidades de las aspirantes, es por ello la importancia de hacer un análisis que permita reconocer qué factores han cumplido las aspirantes para ser becadas.

- Objetivo General:

Identificar los factores que están relacionados estadísticamente, en que una aspirante reciba la beca federal para madres solteras.

- Justificación:

La oportunidad de conocer a las aspirantes a la beca ha permitido identificar a quiénes requieren más el apoyo, quiénes entregan información alterada, quiénes son sinceras con su información y, sin embargo, no todas las aspirantes logran la obtención de ésta, en

ocasiones aspirantes que no mienten en sus documentos y/o que requieren más el apoyo, no obtienen la beca. De tal manera que al tener los resultados de este análisis se tendrá la oportunidad de apoyar a las aspirantes con mayor necesidad, dando énfasis en los factores que están relacionadas en la obtención de la beca.

- Alcances y limitaciones:

La beca que se ofrece es a nivel nacional, el análisis que se pretende realizar es exclusivamente para la UJED, con los datos que se tienen de las convocatorias 2017 y 2018.

Metodología

En la Coordinación de Becas, se cuenta con los expedientes de las aspirantes a la beca 2017 y 2018, por lo que se facilita elaborar la base de datos necesaria con 17 variables y 78 observaciones. La investigación que se realiza es por lo tanto documental y correlacional.

Se realiza estadística descriptiva primeramente a la base de datos de Madres solteras 2017 y 2018, que consta de 78 observaciones (aspirantes a la beca) y 16 variables independientes cuantitativas y cualitativas, y una variable dependiente dicotómica (cuyo resultado es si recibe la beca o no).

Se aplica el modelo GLM porque permite, a través de la familia binomial, obtener un modelo cuya variable dependiente es dicotómica, obtener la beca o no y sus variables independientes pueden ser cuantitativas como *meses para egresar, monto a otorgar, edad, promedio, vive sola, casa (propia, prestada o rentada), habitaciones de la casa, ingreso mensual, etc.* Y variables cualitativas como *Unidad Académica, trabaja o no, paga colegiatura o no, etc.*

Después de realizar un ajuste para el modelo GLM con LOGIT, se ajusta también con ANOVA para comparar el ajuste. Se decide también hacer un Árbol de Decisión, donde la base se divide en dos grupos, uno de entrenamiento (50% de los datos), que sirve para hacer pruebas y otro de Validación (50% de los datos) donde se validan las pruebas hechas en el grupo de entrenamiento. Si es necesario se poda el árbol, que, en este caso por ser variable dependiente dicotómica, se hace un árbol de Clasificación.

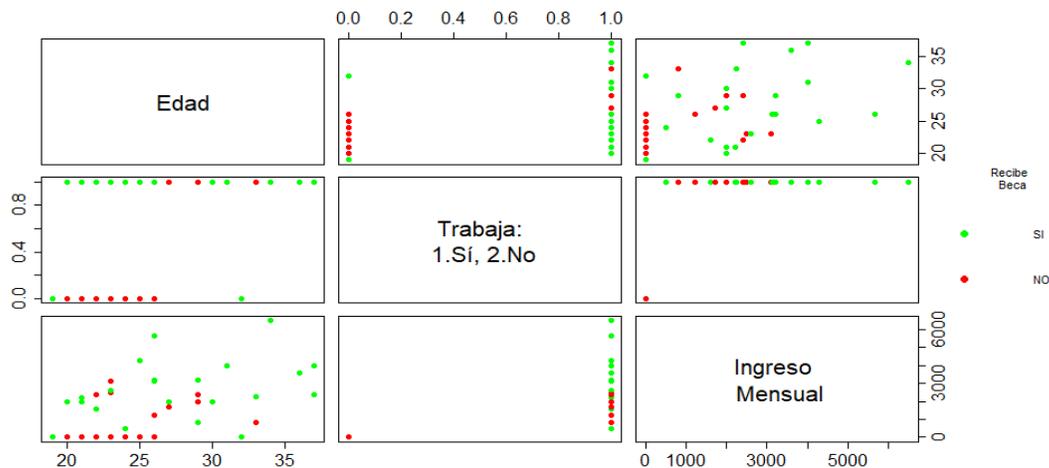
Se observan los resultados estadísticos para decidir podar o no el árbol (basándose en cuanto el error deja de disminuir), se evalúa la efectividad de este modelo, calculando el porcentaje de aciertos de la prueba.

Resultados.

Estadística Descriptiva. (Gráficas)

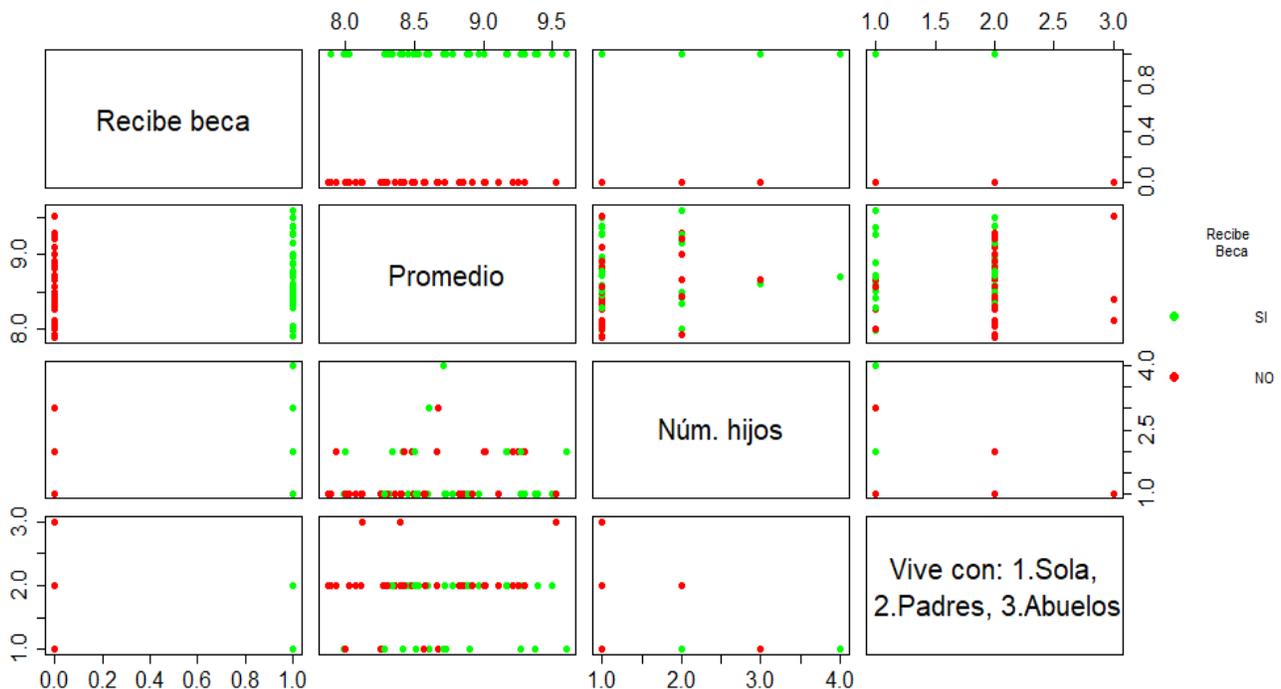
En la gráfica 1, la variable Trabaja, el 0 representa que no trabaja y el 1 que sí trabaja. Comparando con la variable Respuesta, donde el 0 representa que no recibe beca y el 1 que sí recibe beca; se observa que la gran mayoría de las aspirantes que trabajan reciben beca sin importar la edad, la mayoría de las aspirantes entre 20 y 26 años que no trabajan no reciben beca, la mayoría de las aspirantes que sí trabajan reciben beca sin importar el ingreso que perciben.

Gráfica 1. Reciben Beca comparado con la Edad, si Trabaja o no y el Ingreso



En la gráfica 2, se hace un bosquejo de la variable dependiente con algunas de las variables regresoras y se observa que la mayoría de las aspirantes que reciben beca (representada por un 1), tienen un promedio cercano a 9.5, y las aspirantes que viven con sus abuelos (representado con un 3), ninguna recibe la beca (el 1 representa quien recibe beca), la aspirante con 4 hijos sí recibe beca.

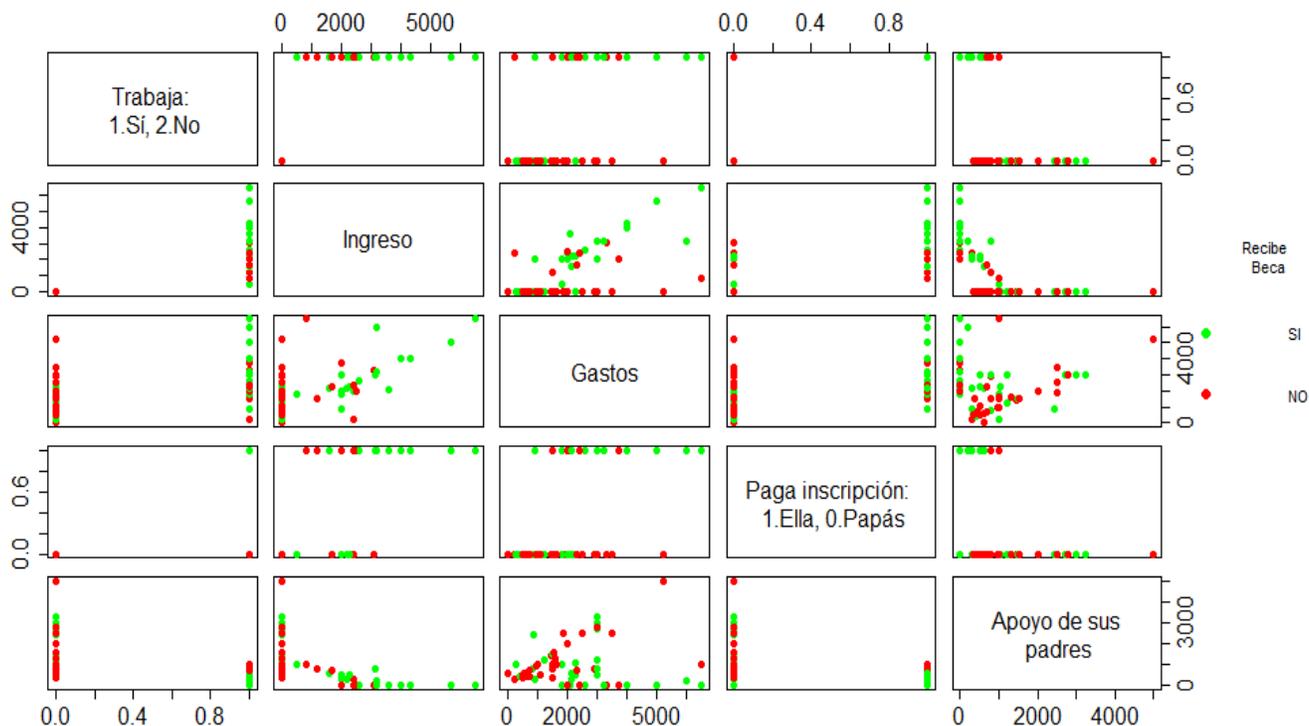
Gráfica 2. Reciben Beca comparado con el Promedio Núm. de hijos y Con quien Vive



En la gráfica 3, se observa que las aspirantes que reciben beca (representado con un 1) sus ingresos laborales están alrededor de \$3000 mensuales, y en su mayoría ellas, pagan su inscripción (el 1 representa que las beneficiadas pagan su inscripción y el 0 que la pagan los

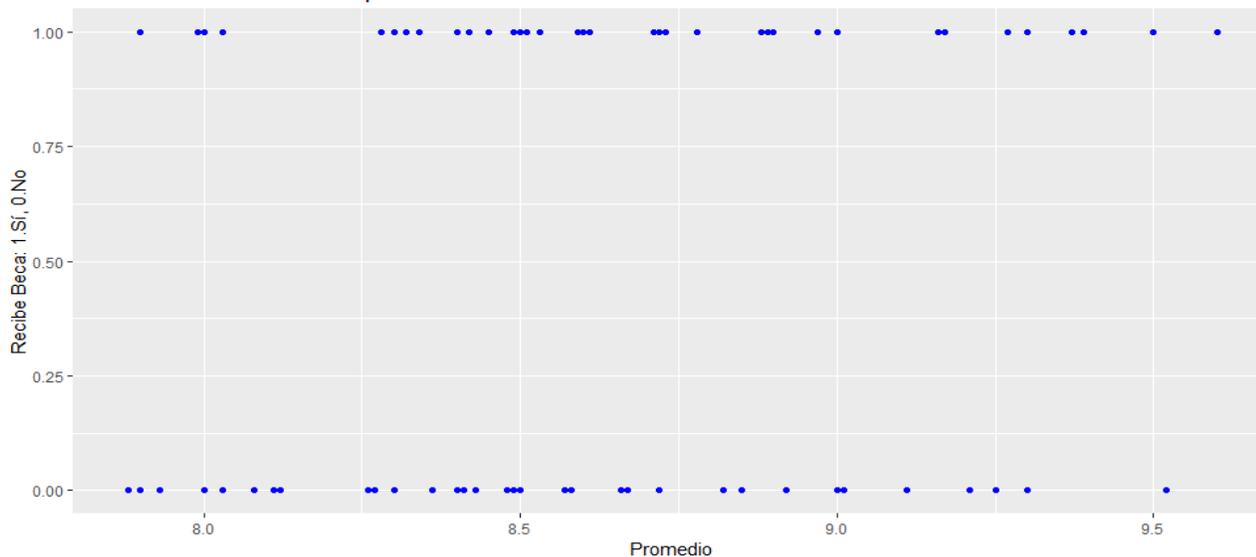
papás o tutores). También se observa que las aspirantes con gastos mayores y sin apoyo económico de sus padres (el 0 representa que no tienen apoyo); reciben beca.

Gráfica 3. Reciben Beca comparado con: Trabaja, Ingreso, Gastos y Quien paga inscripción



En la siguiente gráfica 4, se observa que las aspirantes en su gran mayoría con promedios mayores a 9.3 recibieron beca, y las de promedios menores a 8.3 no reciben beca en su mayoría.

Gráfica 4. Recibe Beca comparado con el Promedio



Estadística Descriptiva. (Tablas)

Los datos de la tabla 1 muestran que de 29 aspirantes que trabajan, 21 reciben beca (proporción 0.72) y de 49 que no trabajan, 18 reciben beca (proporción 0.37).

Tabla 1. Aspirantes que Trabajan (0. No, 1. Sí)		0	1
Reciben beca	0	31	8
	1	18	21

La tabla 2 indica que la proporción de quienes reciben beca cuando ellas pagan la inscripción es 0.76, mayor que cuando sus papás pagan la inscripción.

Tabla 2. Quien paga inscripción (0. Papás, 1. Ellas)		0	1
Reciben beca	0	34	5
	1	23	16

La tabla 3 muestra que con 4 hijos al 100% le dieron beca, con 3 hijos al 50%.

Tabla 3. Número de Hijos de la aspirante		1	2	3	4
Reciben beca	0	29	9	1	0
	1	27	10	1	1

La tabla 4 muestra que a ninguna le dieron beca y viven con sus abuelos, y una proporción de 0.76 de quienes viven solas obtuvieron beca.

Tabla 4. Con quien Vive la aspirante (1. Sola, 2. Padres, 3. Abuelos)		1	2	3
Reciben beca	0	4	32	3
	1	13	26	0

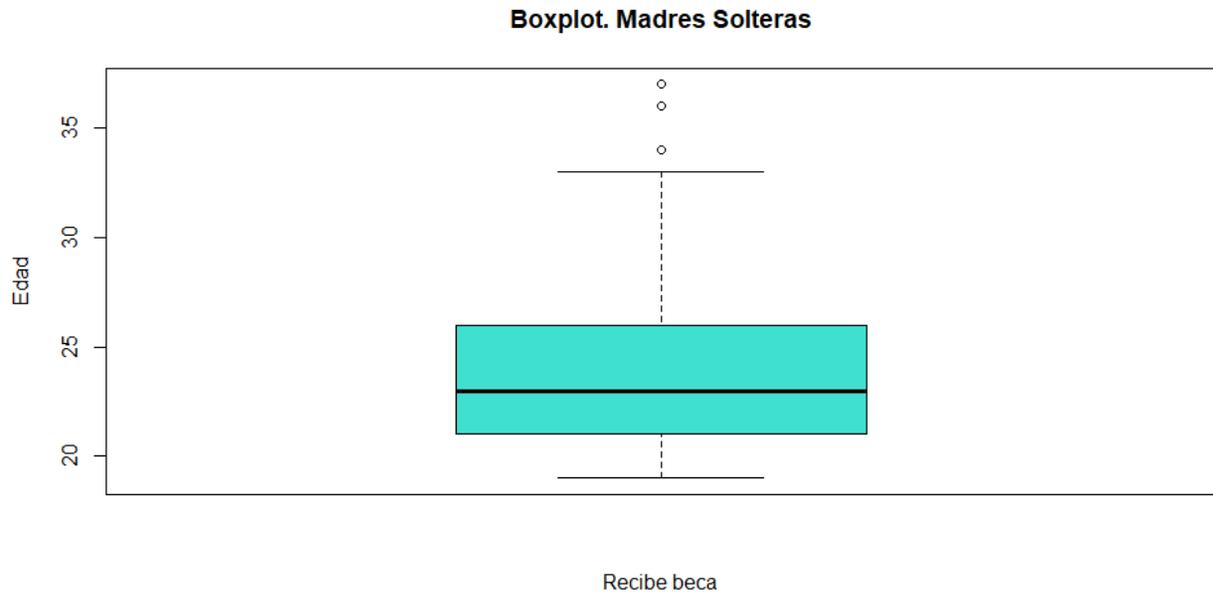
La tabla 5 muestra que al 100% de las aspirantes de 30 años en adelante recibieron la beca.

Tabla 5. Edad de la aspirante

Edad	19	20	21	22	23	24	25	26	27	29	30	31	32	33	34	36	37	
Recibe beca	0	2	3	5	9	9	3	2	2	1	2	0	0	0	1	0	0	0
	1	1	5	10	3	1	1	3	4	1	2	1	1	1	1	1	1	2

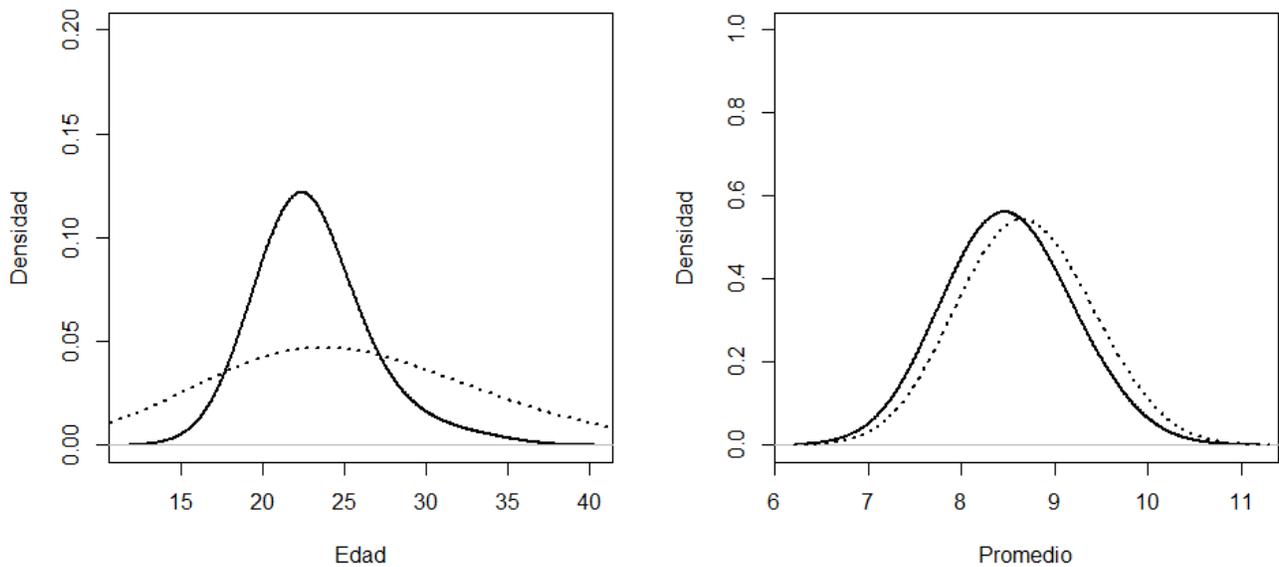
Estadística Descriptiva. (Boxplot). El siguiente boxplot muestra algunos valores atípicos en la edad de las aspirantes mayor a 35, así como mas variabilidad en las observaciones de

las aspirantes entre 27 a 33 años aproximadamente, la mediana está aproximadamente en 21 años, que es la edad en que la mayoría de las aspirantes considerando los embarazos, se encuentran estudiando su licenciatura.



En la gráfica 5, la línea punteada indica las aspirantes que reciben beca y la línea continua es la densidad o total de aspirantes. Se observa la densidad de las edades de las aspirantes entre 20 y 25 años es mayor que las que reciben beca, y que siendo menor la densidad de las mayores a 26 aproximadamente, reciben beca. En la densidad del promedio hay un ligero desfase, mostrando que reciben beca quienes tienen promedio entre 9 y 10.

Gráfica 5. Densidad



Modelos Lineales Generalizados (GLM).

En seguida se aplica el modelo GLM con el comando de R y la regresión logística logit por ser binomial para ajustar el modelo, obteniendo la tabla 6 cuyo contenido son los coeficientes del modelo generado.

Tabla 6. Coeficientes del modelo

Intercept	-8.745e-01
Meses para egresar	-6.041e-01
Monto a otorgar	1.894e-04
Edad	5.920e-02
Promedio	6.279e-01
Núm. De hijos	-8.400e-01
Vive (1.Sola, 2.Padres, 3.Abuelos)	-1.293e+00
Casa (1.Propia, 2.Prestada, 3.Rentada)	-4.327e-01
Habitaciones de la casa	-5.668e-01
Trabaja (1.Sí, 0.No)	-5.756e-01
Ingreso mensual	3.118e-04
Gastos mensuales	3.165e-04
Paga inscripción (1.Ella, 0.Papás)	5.515e-01
Apoyo de sus padres	-3.007e-05

En la tabla 7 con los mismos coeficientes del modelo, se observa que el p valor de la variable Habitaciones de la Casa ($p = 0.019$) es menor que alfa de 0.05 de nivel de confianza por lo que se rechaza la posibilidad de eliminar esa variable del modelo puesto que es significativa.

Tabla 7. Coeficientes del resumen del modelo

	Estimación estándar	Error	Valor z	Pr(> z)
Intercept	-8.745e-01	7.201e+00	-0.121	0.903
Meses para egresar	-6.041e-01	1.635e+00	-0.369	0.712
Monto a otorgar	1.894e-04	5.242e-04	0.361	0.718
Edad	5.920e-02	9.608e-02	0.616	0.538
Promedio	6.279e-01	7.958e-01	0.789	0.430
Núm. De hijos	-8.400e-01	7.095e-01	-1.184	0.236
Vive (1.Sola, 2.Padres, 3.Abuelos)	-1.293e+00	9.383e-01	-1.378	0.168
Casa (1.Propia, 2.Prestada, 3.Rentada)	-4.327e-01	4.639e-01	-0.933	0.351
Habitaciones de la casa	-5.668e-01	2.416e-01	-2.346	0.019 *
Trabaja (1.Sí, 0.No)	-5.756e-01	1.336e+00	-0.431	0.666
Ingreso mensual	3.118e-04	4.848e-04	0.643	0.520
Gastos mensuales	3.165e-04	3.414e-04	0.927	0.354
Paga inscripción (1.Ella, 0.Papás)	5.515e-01	1.242e+00	0.444	0.657
Apoyo de sus padres	-3.007e-05	4.682e-04	-0.064	0.949

En la tabla 8 aplicando un análisis de deviance (ANOVA) para comparar el ajuste con el logit se observa que dos variables resultan significativas incluso para un alfa de 0.001, por lo que no se pueden eliminar del modelo. Son las variables Vive Sola, con Papás o Abuelos ($p = 0.005518$) y el número de Habitaciones de la Casa ($p = 0.006242$). Las variables que tienen mayor probabilidad de no ser significativas son: Apoyo que reciben de sus padres (\$), Quien paga la inscripción (ellas o los papás), y si la Casa es propia, prestada o rentada.

Tabla 8. ANOVA

	<i>Df</i> <i>Deviance</i>	<i>Residual</i>	<i>Df</i> <i>Residual</i>	<i>Deviance</i>	<i>Pr(> Chi)</i>
Null			77	108.131	
Meses para egresar	1	0.6239	76	107.507	0.429616
Monto a otorgar	1	0.7999	75	106.707	0.371110
Edad	1	3.7098	74	102.997	0.054095
Promedio	1	1.3795	73	101.618	0.240188
Núm. De hijos	1	0.3683	72	101.250	0.543908
Vive (1.Sola, 2.Padres, 3.Abuelos)	1	7.7012	71	93.548	0.005518 **
Casa (1.Propia, 2.Prestada, 3.Rentada)	1	0.2147	70	93.334	0.643145
Habitaciones de la casa	1	7.4792	69	85.855	0.006242 **
Trabaja (1.Sí, 0.No)	1	0.8527	68	85.002	0.355783
Ingreso mensual	1	1.1721	67	83.830	0.278962
Gastos mensuales	1	1.9353	66	81.894	0.164175
Paga inscripción (1.Ella, 0.Papás)	1	0.2118	65	81.683	0.645349
Apoyo de sus padres	1	0.0041	64	81.678	0.948774

El modelo nuevo considerando solo dos variables es:

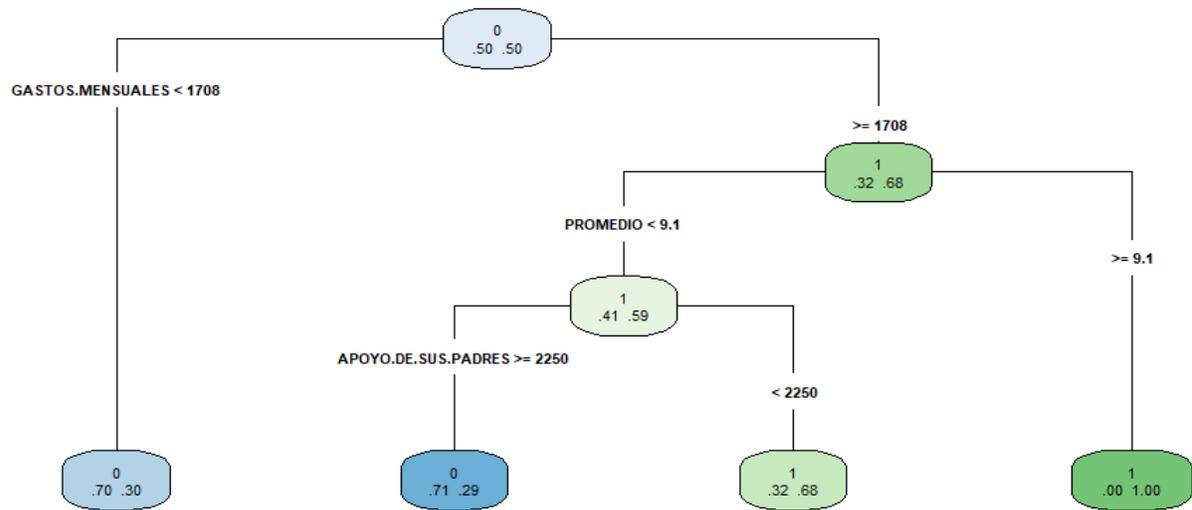
$$Y = 4.3191 - 1.2176 *Vive - 0.4702 *Habitaciones + error$$

Árbol de Decisión. (Clasificación)

En la toma de decisiones también se pueden resolver los problemas con Árbol de Decisión, que, en este caso por tener una variable dicotómica, se usa Árbol de Clasificación. En esta clasificación se observan 3 variables consideradas con sus ramificaciones.

En la gráfica 6 se observa que si los gastos mensuales son menores a \$1,708 hay una posibilidad de 0.7 de no recibir la beca, y si es mayor o igual a \$1,708 la posibilidad de tener la beca es de 0.68. Siguiendo con esa rama, si tienen promedio mayor o igual a 9.135 implica una posibilidad de 1 de obtener la beca. Si es menor el promedio, la posibilidad de recibir la beca es de 0.59, de los cuales si reciben Apoyo de sus padres menor a \$2,250 tiene una posibilidad de obtener la beca de 0.68, contrariamente, si el Apoyo es mayor o igual a \$2,250 la posibilidad de no recibir la beca es de 0.71.

Gráfica 6. Árbol de Clasificación



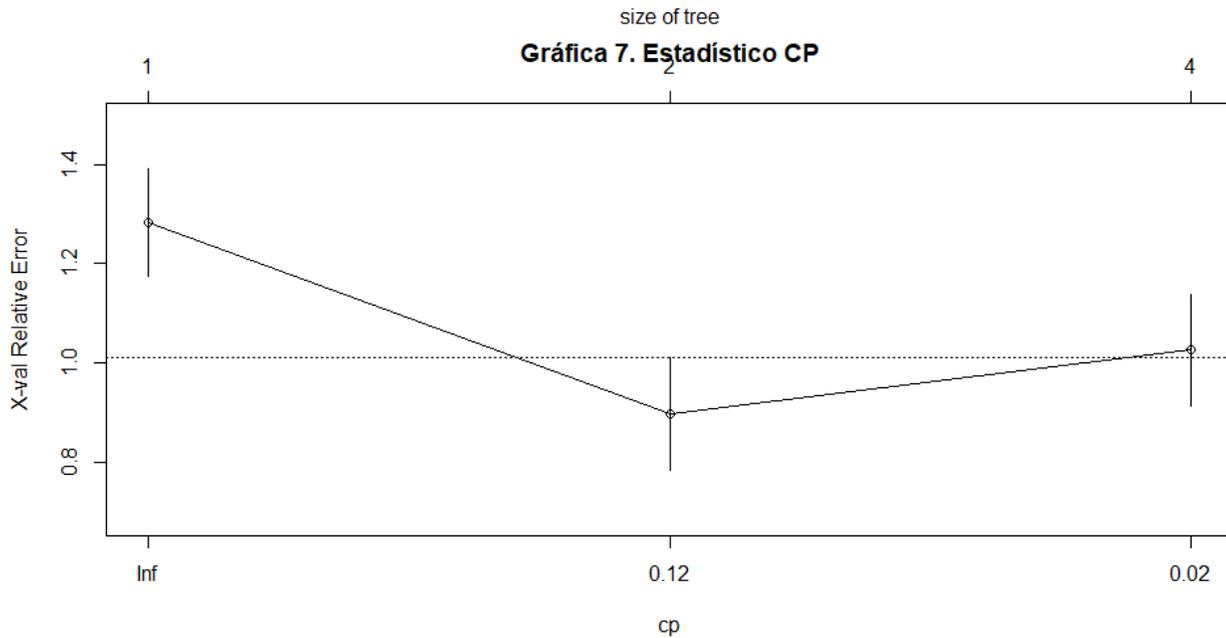
El Estadístico CP (Cálculos de Potencia Condicionales o Poder Condicional), calcula el poder condicional para diferentes modelos en el análisis del tiempo de supervivencia dentro de los ensayos clínicos aleatorios con dos tratamientos diferentes para comparar y la supervivencia como criterio de valoración. Se define como la probabilidad de obtener un resultado significativo al final de la prueba cuando el efecto real es igual al efecto esperado dados los datos del análisis provisional.

En la tabla 9, los resultados estadísticos con CP nos dicen que el error disminuye con las dos primeras variables (Gastos mensuales y Promedio), pues en la 3era variable (Apoyo de sus padres) aumenta el error a 1.02564, lo que significa que debemos podar el árbol, es decir, eliminar la 3er variable.

Tabla 9. Estadístico CP

	CP	N divisiones	Error relativo	X error	X estándar
1	0.384615	0	1.00000	1.28205	0.10863
2	0.038462	1	0.61538	0.89744	0.11263
3	0.010000	3	0.53846	1.02564	0.11319

La gráfica 7 nos muestra claramente que el error aumenta en la tercera variable (Apoyo de sus padres).



Al podar el árbol nos quedamos con dos ramas solamente.

Tabla 10. Podar el árbol.

	CP	N divisiones	Error relativo	X error	X estándar
1	0.38461 5	0	1.00000	1.28205	0.10863
2	0.03846 2	1	0.61538	0.89744	0.11263

En la tabla 11 se muestra la validación de los datos, indicando que 3 aspirantes no reciben beca cuando sí debieron recibirla, y 6 aspirantes reciben beca cuando sí debieron recibirla.

Tabla 11. Prueba de predicción Recibe beca

		Predicción	
		0	1
Observación Real	0	11	2
	1	3	6

Se calcula el % de aciertos, que nos dice que el 77.27% es correcta la validación de los datos.

Conclusiones.

De la Estadística Descriptiva se observa que la gran mayoría de las aspirantes que trabajan reciben beca sin importar la edad, la mayoría de las aspirantes entre 20 y 26 años que no

trabajan no reciben beca, la mayoría de las aspirantes que sí trabajan reciben beca sin importar el ingreso que perciben, así como la mayoría de las aspirantes que reciben beca, tienen un promedio cercano a 9.5. También se observa que las aspirantes con gastos mayores y sin apoyo económico de sus padres reciben beca.

Después de aplicar el modelo lineal generalizado con 13 variables independientes, se reduce a solo 2 variables significativas por lo que es importante hacer un árbol de clasificación.

En este análisis las variables que resultan significativas son Gastos mensuales y Promedio, cuya validación de los datos con un 77% de confianza, indica que 3 aspirantes no reciben beca cuando sí debieron recibirla, y 6 aspirantes reciben beca cuando sí debieron recibirla

Es necesario hacer más pruebas para concluir qué factores están relacionadas en la asignación de la beca, realizar interacciones entre variables por pares o más variables, que permitan determinar las variables que pudieran eliminarse del modelo de ser necesario, o incluso cambiar la proporción para dividir la base en Entrenamiento y Validación, pues con lo analizado en este proyecto no es suficiente para tomar decisiones.

Referencias

González, M. G. *Conacyt*, 2018, pág. 1. Rincón, L. (2007). *Curso elemental de probabilidad y estadística*. México.

McCullagh, Peter & Nelder, John A. (1983-1989) *Generalized Linear Models*.

Greenwood, W. T. (1978). *Teoría de decisiones y sistemas de información: introducción a la toma de decisiones administrativas* (No. Z699. M3 G859).

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 4

ANÁLISIS SOBRE LA INFLUENCIA DEL TIPO DE MARCA Y CUERDA AL MOMENTO DE AFINAR UNA GUITARRA

Juan Candia Vargas, Sergio Carrasco Gámez, Omar Dozal Alcantar. Asesora: Dra. Diana Barraza

lma.candia@gmail.com, cags9607@gmail.com, VI_blackblood_IX@hotmail.com

Facultad De Ciencias Exactas

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Palabras clave: ANOVA, Diseños Anidados, Música, Cuerdas, Afinación de Guitarra

RESUMEN

Un músico profesional se interesa por conocer qué marcas de cuerdas soportan las afinaciones más agudas, en busca de alguna marca que mejor se adapte a sus estilos y de detectar diferencias entre las cuerdas. Para ello se realizó un diseño experimental por

factores anidados. La variable de respuesta que se utilizó fue el recorrido (en cm) necesario para que la cuerda quede en afinación estándar. Se concluye que las cuerdas influyen sobre la variable de respuesta y se propone una manera de sacar provecho a estos resultados.

INTRODUCCIÓN

En la práctica de cualquier instrumento de cuerdas es frecuente el gasto monetario que supone reponer alguna cuerda reventada, ya sea por el desgaste de la misma o por haberle demandado una tensión más alta de la que soporta. Se realizó un experimento con factores anidados teniendo como finalidad detectar la influencia que tienen la marca y el número de cuerda al momento de medir el recorrido en centímetros de la misma para que llegue a una afinación estándar aproximada, pues esto se relaciona con la tonalidad aguda máxima que puede soportar. De esta manera se espera detectar las mejores marcas y las cuerdas más óptimas para interpretar piezas que exijan tonalidades agudas. También será posible optimizar el presupuesto para cuerdas, ya que la tonalidad aguda máxima que soporta una cuerda se relaciona con la durabilidad de la misma. Este estudio se puede ampliar para desarrollarse en cualquier instrumento de cuerdas, pues los métodos y la teoría aplicada en este estudio se desenvuelven de maneras muy similares dentro de este grupo de instrumentos.

MARCO TEÓRICO

Para que suene la guitarra se deben pulsar sus cuerdas. La altura del sonido que produce una cuerda depende de su longitud y de su masa: a menor longitud el sonido es más agudo, y si la cuerda es más larga el sonido es más grave; si lo que varía es la masa, cuanto menor es la masa el sonido es más agudo y más grave si la masa es mayor.

En la guitarra todas las cuerdas tienen igual longitud, pero varía su grosor y densidad (masa), por ello al pulsarse producen sonidos de distinta altura. Si se acorta la longitud de la cuerda, es decir, si se pulsa una cuerda al aire y luego se vuelve a pulsarla, pero pisando en un traste, el sonido que se obtiene es más agudo porque la longitud de la cuerda que vibra es menor.

El sonido que produce una cuerda en vibración es muy débil y, como ya se sabe, la caja de resonancia es la encargada de amplificarlo: la vibración de las cuerdas se transmite a través del puente a la tapa armónica de la caja de resonancia y de ella sale un sonido enriquecido y amplificado (Fundación Juan March, 2013).

Si se mira de frente a una guitarra, ilustración 1, la cuerda más grave, que es la más gruesa, la 6ª, está situada a la izquierda y la más aguda, que es la más delgada, la 1ª, también llamada prima, a la derecha. Si se pulsan al aire se obtienen los siguientes sonidos: Mi, La, Re, Sol, Sí, Mi.

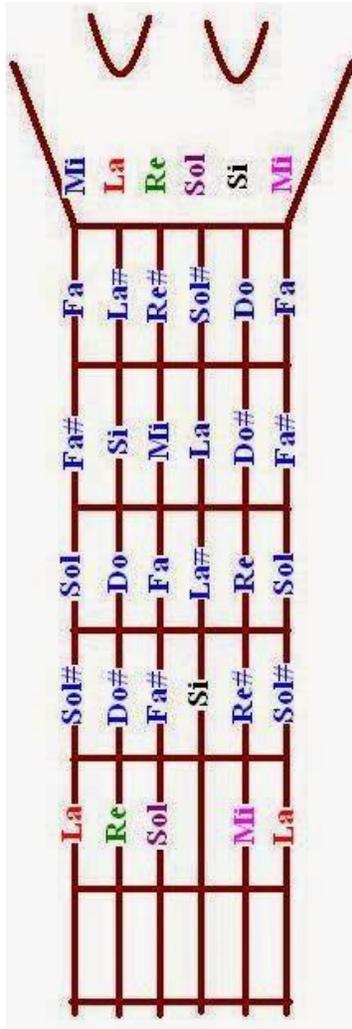


Ilustración 7 Cuerdas con afinación estándar

Los trastes están dispuestos de manera que si se pulsan las cuerdas conforme se van pisando consecutivamente en ellos, el sonido irá variando en un semitono.

Estudio R&R.

La repetibilidad y la reproducibilidad son los componentes de la precisión. La repetibilidad de un instrumento de medición se refiere a la precisión o variabilidad de sus mediciones cuando se obtienen varias mediciones del mismo objeto en condiciones similares (mismo operador); mientras que la reproducibilidad es la precisión o variabilidad de las mediciones del mismo objeto, pero en condiciones variables (diferentes operadores) (Gutiérrez Pulido y de la Vara Salazar, 2013, pág. 268).

En los estudios R&R se evalúa de modo experimental qué parte de la variabilidad total observada en los datos es atribuible al error de medición; además, permite cuantificar si este error es mucho o poco en comparación con la variabilidad del

producto y con las tolerancias de la característica de calidad que se mide (Gutiérrez Pulido y de la Vara Salazar, 2013, pág. 268)

Por ejemplo, si un investigador está midiendo los diámetros de tornillos para asegurarse de que cumplan especificaciones, un estudio R&R del sistema de medición indica si los inspectores son consistentes en sus mediciones de la misma parte (repetitividad) y si la variación entre los inspectores es consistente (reproducibilidad), donde la repetitividad es la variación causada por el mismo dispositivo de medición, y la reproducibilidad es la variación causada por el sistema de medición.

El objetivo de un diseño anidado es estudiar el efecto de varios factores sobre una o varias respuestas cuando se tiene el mismo interés sobre todos los factores. Por ejemplo, uno de los objetivos particulares más importantes que frecuentemente tiene un diseño factorial es determinar una combinación de niveles de los factores en la que el desempeño del proceso sea mejor.

En un diseño anidado, los niveles de cada factor se pueden combinar en cualquier momento con los niveles del otro factor, y en este caso los niveles de un factor son exactamente los mismos que en cada nivel del otro factor. Por otra parte, cuando se dice que el factor B está anidado en el factor A significa que los niveles del factor B no son los mismos en cada nivel del factor A . Es decir, hay una especie de relación padre-hijo entre los niveles del factor A (padres) y los niveles del factor B (hijos). En este sentido, los diseños anidados también se conocen como diseños jerárquicos (Gutiérrez & de la Vara, 2012). Donde el modelo estadístico para este diseño es (Gutiérrez Pulido & de la Vara Salazar, 2012, pág. 408):

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + (\alpha\beta)_{K(ij)} + \varepsilon_{K(ij)}$$

donde hay a niveles de A , b niveles del factor B anidados bajo cada nivel de A y n réplicas. Además μ es la media general, α_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor A , $\beta_{j(i)}$ es el efecto del j -ésimo nivel del factor B , que está anidado en el nivel i del factor A , y $\varepsilon_{k_{ji}}$ es el error aleatorio con los supuestos usuales de normalidad, varianza constante e independencia (Gutiérrez Pulido & de la Vara Salazar, 2012, pág. 210).

Las hipótesis de interés para los tres efectos en el modelo anterior son:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$$

$$H_a: \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

$$H_0: \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \dots = \beta_{b(1)} = 0$$

$$H_a: \beta_{j(1)} \neq 0 \text{ para algún } j$$

$$H_0: (\alpha\beta)_{1(a)} = (\alpha\beta)_{2(a)} \dots = (\alpha\beta)_{b(a)} = 0$$

$$H_a: (\alpha\beta)_{j(a)} \neq 0 \text{ para algún } j$$

Con la información que provee la tabla 1, es útil para conocer, en cada caso, cómo se deben construir los estadísticos de prueba para las hipótesis y, por lo tanto, construir las últimas dos columnas de la tabla ANOVA, la cual se muestra en la tabla 2.

Tabla 5 Valores esperados de los CM (Cuadrado Medio) en el diseño anidado con dos factores

E(CM)	A fijo	A fijo	A aleatorio
	B fijo	B aleatorio	B aleatorio
$E(CM_A)$	$\sigma^2 + \frac{bn \sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + \frac{bn \sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + bn\sigma_\alpha^2$
$E(CM_{B(A)})$	$\sigma^2 + \frac{bn \sum \sum \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$
$E(CM_E)$	σ^2	σ^2	σ^2

Tabla 2 ANOVA para el diseño anidado

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	F-Calculado
Efecto A	SCA	a-1	CMA	CMA/CME
Efecto B(A)	SCB(A)	b-1	CMB(A)	CMB(A)/CME
Error	SCE	ab(n-1)	CME	CME/CME
Total	SCT	abn-1		

Se rechazará la hipótesis nula si es estadístico F-Calculado es mayor que F- Teórica que se obtiene de la tabla F (Gutiérrez Pulido & de la Vara Salazar, Análisis y Diseño de Experimentos, 2012).

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Afinar un instrumento de cuerda no es una tarea trivial, las cuerdas de la guitarra son empleadas para tocar melodías tanto de manera solitaria como en grupo, o más aún durante alguna serenata. Sin embargo, hay estilos musicales que demandan afinaciones más agudas y por tanto aumentan la probabilidad de que haya una ruptura de cuerda durante la ejecución. Para intentar estudiar este fenómeno se realiza un experimento factorial con factores anidados, con factores marca (factor fijo) y cuerda, (factor aleatorio) con 3 y 6 niveles respectivamente, para poder detectar cómo influyen en la tensión máxima que soporta la cuerda (correlacionada con el recorrido en cm necesario para llegar a una afinación estándar) y que el músico los pueda controlar al momento de usar su instrumento.

METODOLOGÍA

Se tiene una guitarra acústica y 4 juegos de cuerdas, los cuales constan de 6 diferentes tipos de cuerda, uno dedicado para la experimentación del diseño R&R, los otros tres juegos dedicados para la realización del diseño factorial. Por medio de una moneda se sorteó el orden de 2 operadores que iban a medir la calidad del afinador. Las cuerdas a probar se sortearon aleatoriamente haciendo uso de un generador de números aleatorios. Una vez realizado lo mencionado, se prosiguió con el experimento central. Se sorteó el orden en que cada operador (después de obviarse su no significancia) probaba una réplica. La forma en que se asignaron las corridas experimentales fue nuevamente haciendo uso de un generador de números aleatorios, sólo que ahora las marcas se quedaban como factor fijo. Al afinar la guitarra y llegando al tono deseado, se medía el sobrante de la cuerda, el cual, es la variable de respuesta.

Se realizó el análisis de los resultados haciendo uso del lenguaje estadístico R junto con la librería ggplot2, ésta última para la realización de las ilustraciones que se muestran en este trabajo.

RESULTADOS

Para el estudio R&R se obtuvo la matriz de diseño con réplicas de la tabla 3:

Tabla 3 Tabla de la matriz de diseño

Operador	Cuerda	Réplica 1	Réplica 2
1	-3	29.9	29.8
1	-2	25.6	25.2
1	-1	17.4	17.9
1	1	20.2	20.3
1	2	22.2	21.1
1	3	22.9	22.7
-1	-3	29.8	29.2
-1	-2	25.2	25.6
-1	-1	17.9	18.1
-1	1	20.3	20
-1	2	21.1	21.4
-1	3	22.7	22.1

En el gráfico simultáneo de cajas (ilustración 1) se puede apreciar que las medias de ambos Operadores son muy similares (22.9 para el Operador 1 y 22.85 para el Operador 2). Se obtienen valores tan bajos como 17 para el operador 1 y tan altos como 30, con una mediana de 22.2. Para el Operador 2 tenemos valores tan altos como 29.7 y tan bajos como 17.5, con una mediana de 22.5.

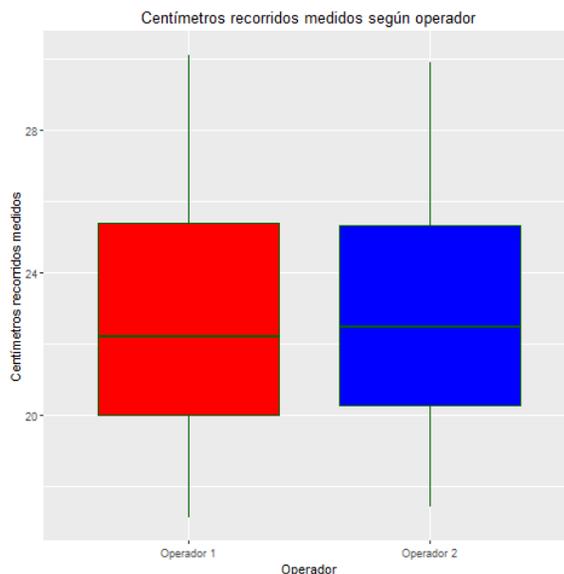


Ilustración 8 Comparación de operadores

En la Ilustración 3 se tienen todas las interacciones posibles, se tienen de color rojo aquellas interacciones con el Operador 1(O1) y el Operador 2(O2). Se muestran empezando desde la primera cuerda y siguiendo orden progresivo hacia la sexta. Se puede apreciar una clara diferencia en cómo se distribuyen los centímetros recorridos según el tipo de cuerda; empero, se nos arroja evidencia visual que contrasta que el Operador no tiene un efecto significativo al momento de la medición. Haciendo uso de una tabla ANOVA, se obtiene la tabla 4.

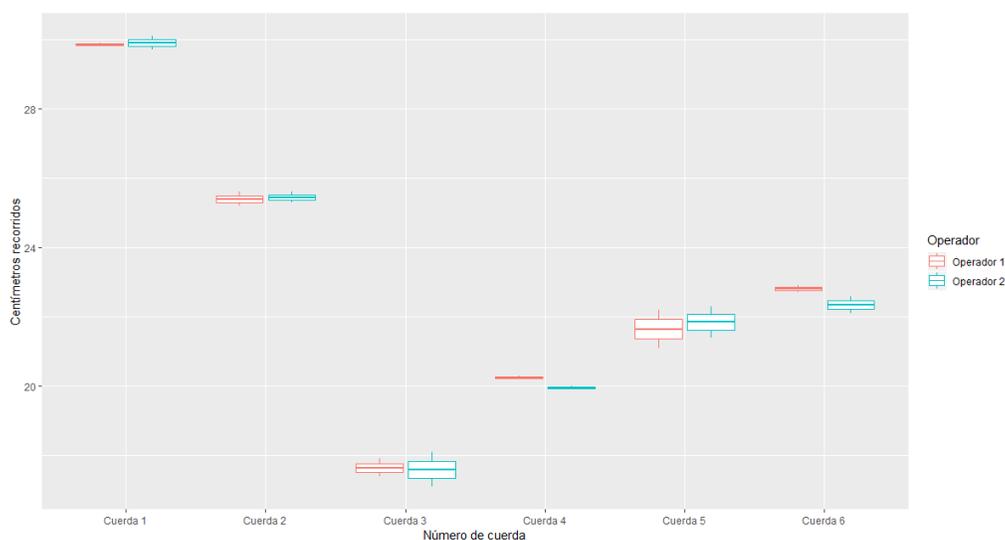


Ilustración 3 Interacciones entre número de cuerda y operador

Se puede apreciar que el factor Operador no es significativo ($p > 0.05$), lo cual es deseable en este tipo de diseños. Que el efecto del factor Cuerda sea significativo ($p < 0.05$) también es lo deseable, pues resalta la capacidad de medir del instrumento. También que la interacción Operador con Cuerda no sea significativo resulta deseable

Tabla 4 ANOVA de la prueba R&R de los factores Operador y Cuerda

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	Valor F	Valor P
Operador	0.0	1	0.04	0.25	0.626
Cuerda	368.5	5	73.7	442.174	3.60E-13
Operador: Cuerda	0.3	5	0.06	0.367	0.867
Residuales	12	2	0.17		

Se puede apreciar la normalidad de los residuales haciendo uso de una gráfica QQ como la mostrada en la Ilustración 3. Además, un valor p de 0.8196 para la prueba Shapiro-Wilk nos contrasta este supuesto.

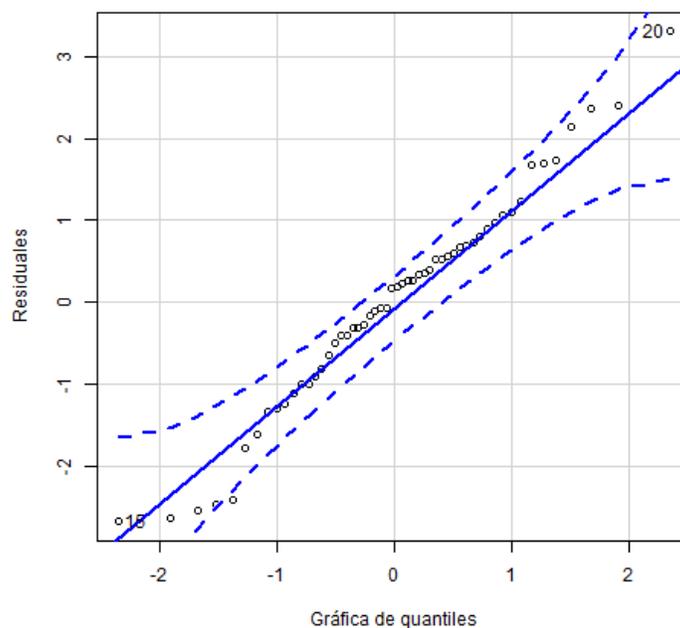


Ilustración 9 Gráfica QQ de normalidad de los residuales de la prueba R&R

En la Ilustración 5 se puede apreciar una distribución simétrica alrededor de la recta $y = 0$, la cual es deseable pues es indicador de que se cumplen los supuestos de igualdad de varianzas.

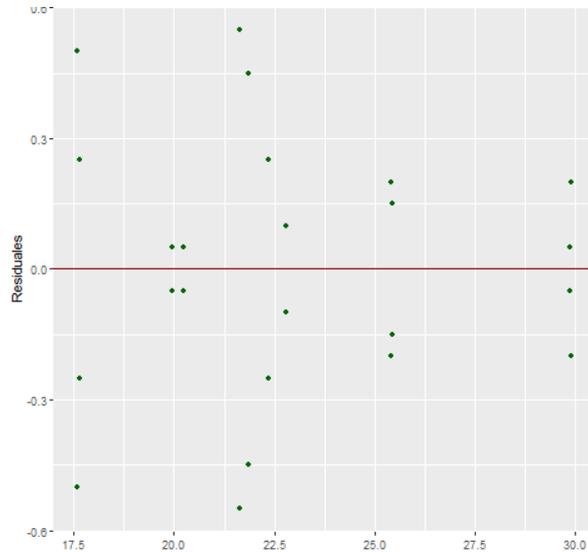


Ilustración 10 Distribución de residuales contra esperados

Como se muestra en la Ilustración 6, no se puede apreciar ningún patrón evidente en la gráfica de residuales contra el orden de las corridas experimentales, lo cual nos sugiere independencia entre los tratamientos.

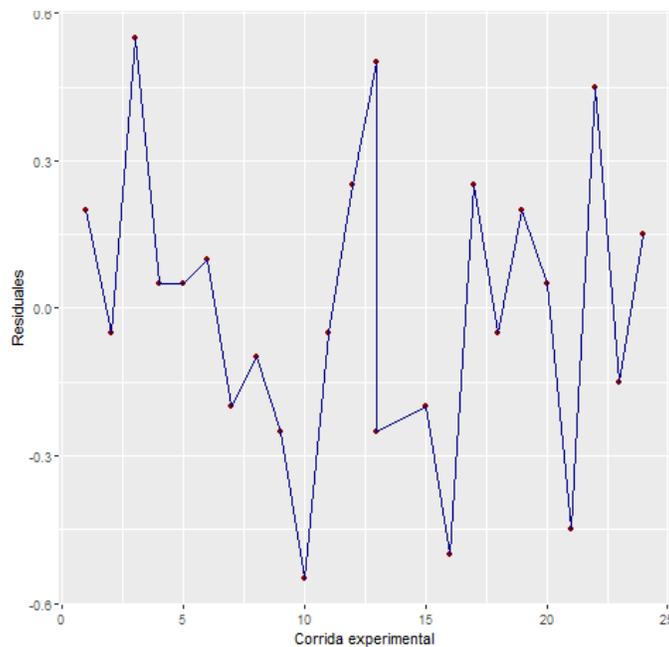


Ilustración 11 Gráfica de residuales contra el tiempo

Al cumplirse los 3 supuestos necesarios para un ANOVA confiable, podemos proceder a realizar el análisis de datos para el experimento principal.

Se obtuvo la matriz de diseño con réplicas que se muestra en la tabla 5.

Tabla 5 Matriz de diseño para el experimento

Marca	Cuerda	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3
-------	--------	-----------	-----------	-----------

Marca	Cuerda	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3
-1	-3	29.4	30.1	28.1
-1	-2	20.6	26.3	22.1
-1	-1	14.4	17.1	19.3
-1	1	20.2	19.2	20.1
-1	2	20.2	22.3	21.1
-1	3	19.9	22.9	20.8
0	-3	29.1	29.2	27.3
0	-2	21.2	25.2	22
0	-1	14.5	18.1	18.8
0	1	20.3	20	19.9
0	2	20.1	21.1	20
0	3	19.7	22.1	21.3
1	-3	28.8	29.5	26.5
1	-2	20.2	24.4	23.4
1	-1	15.6	18.8	20.4
1	1	19.7	19.9	21
1	2	19.9	20.1	20.5
1	3	20.4	21.8	22

Para la Marca 1 se obtuvo una media de 21.89, mientras que para las Marca 2 y Marca 3 se obtuvieron medias de 21.66 y 21.82 respectivamente. La Marca 1 presentó algunos puntos aberrantes con valores menores a 15 y algunos mayores a 28, con una mediana de 22. Para la marca 2 se tienen valores tan bajos como 18, con algunos puntos aberrantes que descienden a menos de 15; valores tan altos como 25 con puntos atípicos que ascienden a más de 27, con una mediana de 22.1. Para la Marca 3 se obtuvieron valores tan bajos como 17 y tan altos como 27, con algunos puntos aberrantes que ascienden a más de 28, con una mediana de 21. Todo esto se puede apreciar en la Ilustración 7.

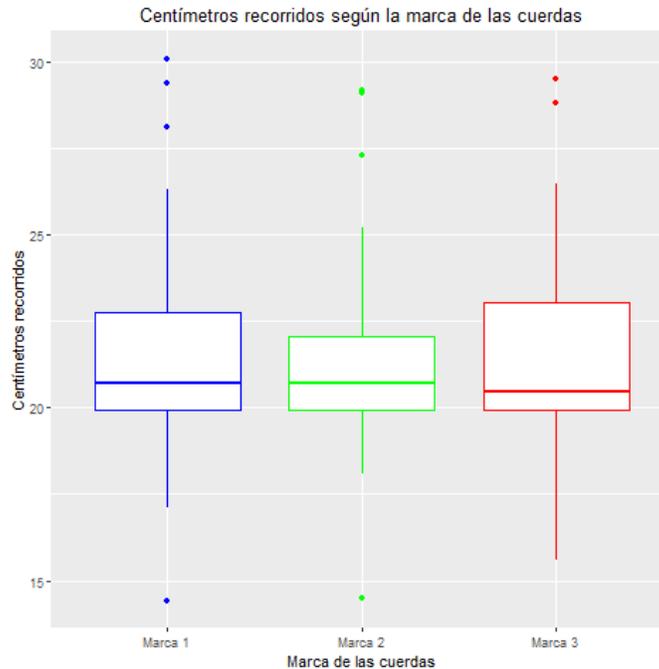


Ilustración 12 Gráfica de cajas de la comparación Marca-Centímetros

En la Ilustración 8 se muestran en color rojo, verde y azul las marcas 1, 2 y 3 respectivamente. De izquierda a derecha se avanza desde la primera hacia la sexta cuerda.

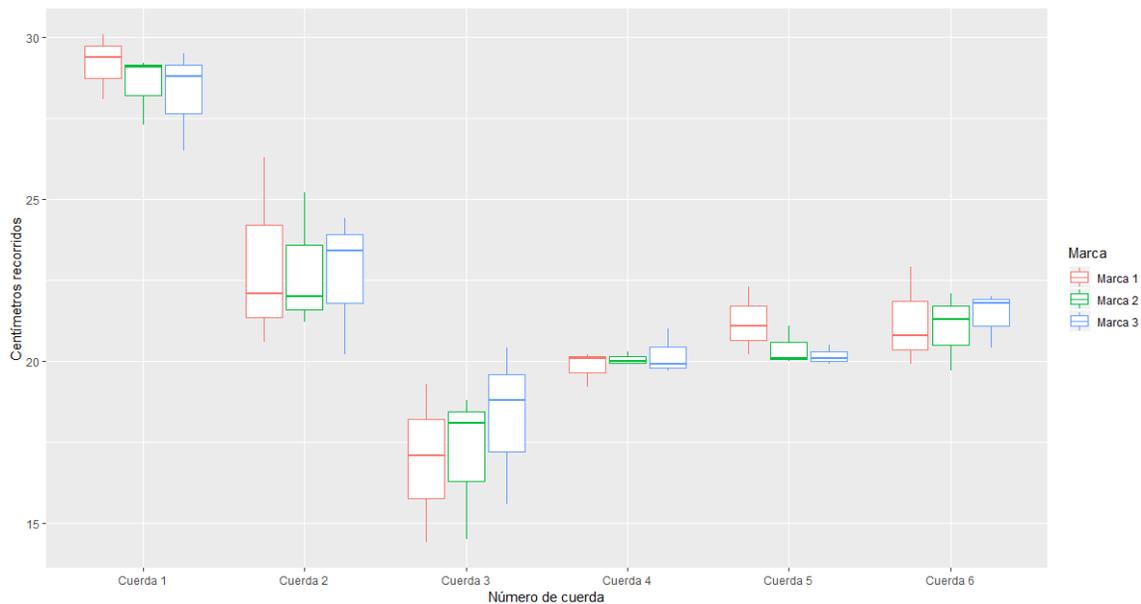


Ilustración 13 Anidados posibles de marca y centímetros

Para el factor cuerda anidado en marca se obtuvieron medias de 28.66, 22.82, 17.44, 20.03, 20.58 y 21.21 centímetros para la primera, segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta cuerda respectivamente. Se aprecian diferencias grandes entre las distribuciones de algunas cuerdas. A continuación, la tabla del ANOVA del diseño factorial completo (tabla 6):

Tabla 6 ANOVA para el factor Marca y la interacción Marca-Cuerda

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	Valor F	Valor P
Marca	0.5	2	0.26	0.1	0.905
Marca: Cuerda	655.2	15	43.68	16.72	6.75E-12
Residuales	94	36	2.61		

Se obtiene un valor p muy grande para el factor Marca, evidencia suficiente para no rechazar la hipótesis de que el efecto que tienen las marcas sobre los centímetros recorridos al afinarse es nulo. Para el factor cuerda anidado en marca sí se obtiene un valor p significativo (<0.05), evidencia de que el número de cuerda afecta en la cantidad de cm que recorre la cuerda al afinarse. A continuación, se procede con un análisis de residuales. En la ilustración 9 se muestra una gráfica QQ donde se puede apreciar que se cumple el supuesto de normalidad, mismo que se puede contrastar con el valor p de 0.56 obtenido en una prueba Shapiro-Wilk.

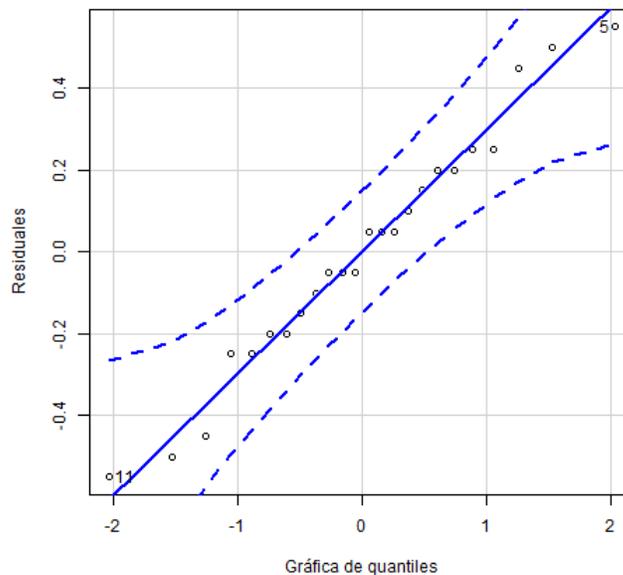


Ilustración 14 Grafica de los residuales del ANOVA

La Ilustración 10 muestra que la gráfica de esperados contra residuales sigue una distribución aproximadamente simétrica sobre la recta $y = 0$, lo cual sugiere una homocedasticidad entre tratamientos.

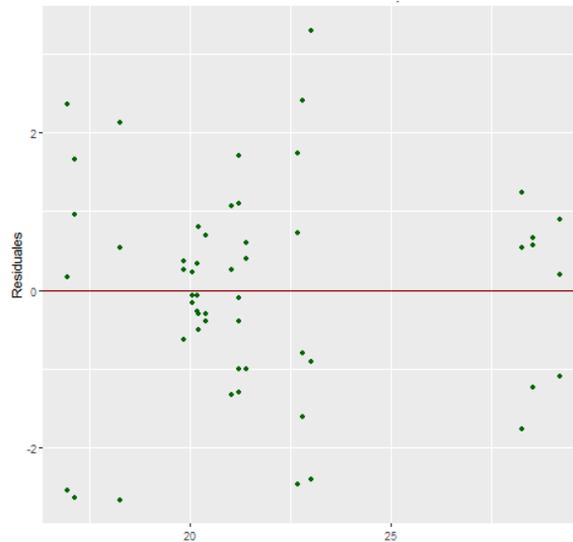


Ilustración 15 Gráfica de residuales contra esperados

La Ilustración 11 muestra que la gráfica de residuales contra el tiempo no evidencia patrón alguno, lo cual es señal de independencia en los tratamientos.

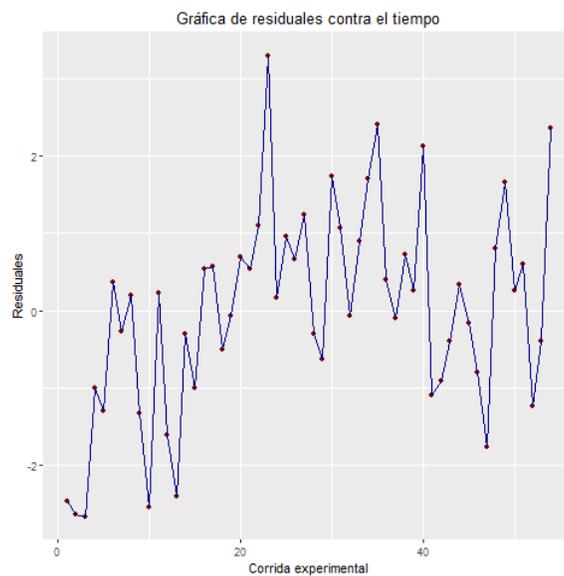


Ilustración 16 Gráfica de residuales contra el tiempo

Al cumplirse los tres supuestos de los residuales, podemos confiar en el análisis del ANOVA. Así, se procede a un análisis de diferencia de medias y se obtienen valores p significativos ($p < 0.05$) para todas las combinaciones de 2 cuerdas, salvo algunas: a saber, la cuerda 5 no soporta más que la 4 ($p = 0.96$) ni la 6 que la 5 ni que la 4 ($p = 0.54$ y $p = 0.94$, respectivamente).

CONCLUSIONES

La marca de la cuerda resultó no afectar de manera significativa la cantidad de centímetros que recorre la cuerda para poder afinarse en su tonalidad estándar. No obstante, los resultados muestran claramente que el número de cuerda que se está afinando tiene un efecto sobre la variable de respuesta analizada. La diferencia no es significativa si hablamos de las cuerdas más graves de la guitarra (Cuarta, Quinta y Sexta), pero resulta interesante saber que para las cuerdas agudas (Primera, Segunda y Tercera) las medias difieren significativamente. Esto invita a considerar al músico el hecho que de aquí se puede concluir: no se pueden demandar afinaciones más agudas de lo usual a las cuerdas de la sección más aguda, pues éstas son las que más necesitan enrollarse para llegar a su afinación estándar. Esto parece no ser la norma, sin embargo, cuando hablamos de la cuerda de Re (tercera) pues ésta ocupa menos recorrido que todas las demás; se conjetura que el resultado es debido a la distancia entre los pivotes extremos de la cuerda. De esta manera las cuerdas graves serían las que recomendamos el músico considere para echar a andar su creatividad demandando tonalidades más agudas que la afinación estándar.

Bibliografía

- Fundación Juan March.* (2013). Obtenido de march.es: <https://www.march.es/musica/jovenes/cuadros-que-suenan/sonido-guitarra.asp>
- Gutiérrez Pulido, H., & de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos* (pág. 408). Ciudad de México: McGrawHill.
- Gutiérrez Pulido, H., & de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos* (pág. 410). Ciudad de México: McGrawHill.
- Gutiérrez Pulido, H., & de la Vara Salazar, R. (2013). En *Control estadístico de la Calidad y Seis Sigma* (pág. 268). Ciudad de México: McGraw-Hill.

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 5

CAPACIDAD CRANEAL Y SU RELACIÓN CON LA MASA CEREBRAL EN HOMBRES Y MUJERES

Rodolfo Vázquez Arroyo. Asesora: Dra. Diana Barraza Barraza
rudicops@hotmail.com

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas
Maestría en Estadística Aplicada

Palabras clave: Capacidad craneal, modelo lineal

Resumen

En el presente estudio se llevó a cabo una aplicación de regresión lineal en datos de la masa cerebral y la capacidad craneal, con el fin de establecer un modelo que represente dicha relación, se buscó además diferencias de la masa cerebral en entre hombres y mujeres. En

este estudio se utilizó regresión lineal múltiple y comparación de medias al construir el modelo que mejor representa la asociación entre las variables se optó por un modelo de regresión lineal simple, además al realizar la comparación de las medias de ambos grupos no se encontraron diferencias estadísticamente significativas en las capacidades cerebrales de hombres y mujeres.

Introducción

Dentro de las técnicas estadísticas que permiten analizar datos, se encuentra la regresión lineal, la cual permite generar un modelo lineal en el que el valor de la variable dependiente o de respuesta (Y) se determina a partir de un conjunto de variables independientes llamadas predictores (X_1, X_2, X_3, \dots) (Walpole, 2012). La capacidad craneal es la medida del volumen interior del cráneo, la unidad de medida más usada es cm^3 . El volumen del cráneo es usado como indicador del tamaño del cerebro, y éste a su vez es usado como un indicador para estimar la inteligencia potencial de un individuo, sin embargo, las capacidades craneales más grandes no son siempre indicativas de mayor inteligencia, la capacidad craneal se ve afectada por el tamaño del cuerpo.

El cerebro humano en biología es el órgano principal del sistema nervioso central, se encuentra dentro del cráneo, su componente principal es la corteza cerebral, una capa de tejido neuronal plegado que cubre la superficie de los hemisferios. Especialmente amplios son sus lóbulos frontales. El cerebro humano se encarga tanto de regular y mantener las funciones del cuerpo humano, como de ser el órgano donde reside la mente la conciencia.

En el siguientes apartados se encuentran los fundamentos requeridos en las técnicas utilizadas, los objetivos buscados, la metodología, los resultados obtenidos y las conclusiones a las que se han llegado.

Marco Teórico

La regresión lineal múltiple permite generar un modelo lineal en el que el valor de la variable dependiente o respuesta (Y) se determina a partir de un conjunto de variables independientes llamadas predictores (X_1, X_2, X_3, \dots). Es una extensión de la regresión lineal simple. Los modelos de regresión múltiple pueden emplearse para predecir el valor de la variable dependiente o para evaluar la influencia que tienen los predictores sobre ella. (Wackerly, 2008)

La ecuación que siguen los modelos lineales múltiples es:

$$Y_i = (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_n X_{ni}) + e_i$$

donde:

β_0 : es la ordenada al origen, el valor de la variable dependiente Y cuando los predictores son cero.

β_i : es el efecto promedio que tiene el incremento en una unidad de la variable predictora X_i sobre la variable dependiente Y , manteniéndose constantes el resto de las variables. Se conocen como coeficientes parciales de regresión.

e_i : es el residuo o error, la diferencia entre el valor observado y el estimado por el modelo.

Es importante tener en cuenta que la magnitud de cada coeficiente parcial de regresión depende de las unidades en las que se mida la variable predictora a la que corresponde, por lo que su magnitud no está asociada con la importancia de cada predictor.

Para poder implementar la regresión lineal múltiple se requieren las siguientes condiciones:

- No colinealidad o multicolinealidad:

Los predictores deben ser independientes, no debe haber colinealidad entre ellos.

- Parsimonia:

El mejor modelo es aquel capaz de explicar con mayor precisión la variabilidad observada en la variable respuesta empleando el menor número de predictores.

- Relación lineal entre los predictores numéricos y la variable respuesta:

Cada predictor tiene que estar linealmente relacionado con la variable respuesta, mientras los demás predictores se mantienen constantes, de lo contrario no se puede introducir en el modelo.

- Distribución normal de los residuos:

Los residuos se deben distribuir de forma normal con media cero.

- Variabilidad constante de los residuos (homocedasticidad):

La varianza de los residuos debe ser constante en todo el rango de observaciones.

Comparación de medias

La comparación de vectores de medias se basa en el supuesto de que los datos tienen una distribución normal y un tamaño de muestra grande (Johnson, 2007). Para llevar a cabo una comparación de medias multivariadas, se debe cumplir que las muestras provengan de poblaciones con distribuciones normales.

Al buscar una posible relación entre variables se hace uso de técnicas estadísticas como las ya mencionadas, al considerar variables continuas que se pueden distinguir para los géneros masculino y femenino, la construcción de modelos que permitan observar y medir el grado de relación que hay entre las variables bajo análisis y con base a los resultados hacer comparaciones entre ellos.

Planteamiento del problema

Objetivo general

Analizar la relación masa cerebral con la capacidad craneal y el género, y buscar posibles diferencias en la masa cerebral entre hombres y mujeres.

Objetivos particulares

- Construir un modelo lineal simple entre las variables, masa cerebral y capacidad craneal.
- Construir un modelo lineal múltiple donde los predictores son la capacidad craneal y el género como variables cuantitativa y cualitativa, respectivamente.
- Hacer comparación de medias entre los grupos de mujeres y hombres para la variable masa cerebral.

Justificación

La aplicación de las técnicas estadísticas tiene una gran diversidad, se puede aplicar a todas las ciencias en las que se pueda recopilar información y que se quiera hacer inferencias a partir de la misma, llevar a cabo la aplicación de las técnicas estudiadas a problemas reales permite afrontar, desde un punto de vista práctico y en cierto modo real, consideraciones que se deben tener en cuenta y que algunas veces no se tiene la oportunidad de ver durante la formación académica, para lograr enfrentarse a aplicaciones reales, es totalmente necesario el adentramiento en los temas bajo investigación, así mismo surge la necesidad de ampliar el dominio tanto teórico como práctico para la aplicación de los conocimientos adquiridos. En cada una de las aplicaciones de la estadística se emplearán las técnicas que prometan dar resultados interpretables y acordes a cada situación.

Metodología

Se realiza un estudio documental en el cual se lleva a cabo una investigación analítica, donde se aplican técnicas descriptivas y de inferencia estadísticas. Los datos analizados (Milton, 2007), constan de 237 observaciones, donde cada observación tiene la capacidad craneal (cm^3), la masa cerebral (g), género (H, M) y el rango de edad (20-46, 46+).

Técnicas de Análisis de Información

Modelo multivariado

1. El primer paso a la hora de establecer un modelo lineal múltiple es estudiar la relación que existe entre variables. Esta información es crítica a la hora de identificar cuáles pueden ser los mejores predictores para el modelo, qué variables presentan relaciones de tipo no lineal (por lo que no pueden ser incluidas) y para identificar colinealidad entre predictores. Es recomendable representar la distribución de cada variable mediante histogramas.
2. Generar el modelo. Hay diferentes formas de llegar al modelo final más adecuado. En este caso se va a emplear el método *mixto* iniciando el modelo con todas las variables como predictores y realizando la selección de los mejores predictores con la medición *Akaike* (AIC). Cada una de las pendientes de un modelo de regresión lineal múltiple (coeficientes parciales de regresión de los predictores) se define del siguiente modo: Si el resto de variables se mantienen constantes, por cada unidad que aumenta el predictor en cuestión, la variable (Y) varía en promedio tantas unidades como indica la pendiente.
3. Validación de condiciones para la regresión múltiple lineal
 - Relación lineal entre los predictores numéricos y la variable respuesta:
Esta condición se puede validar bien mediante diagramas de dispersión entre la variable dependiente y cada uno de los predictores los residuos del modelo. Si la relación es lineal, los residuos deben distribuirse aleatoriamente en torno a 0 con una variabilidad constante a lo largo del eje X.
 - Distribución normal de los residuos:
Se realizan gráficos Q-Q Plot, además de una prueba como Shapiro-Wilks
 - Variabilidad constante de los residuos (homocedasticidad):
Al representar los residuos frente a los valores ajustados por el modelo, los primeros se tienen que distribuir de forma aleatoria en torno a cero, manteniendo aproximadamente la misma variabilidad a lo largo del eje X. Si se observa algún patrón específico, por ejemplo, forma cónica o mayor dispersión en los extremos,

significa que la variabilidad es dependiente del valor ajustado por lo tanto no hay homocedasticidad.

- No multicolinealidad:
Se calcula la matriz de correlación entre predictores.
- Autocorrelación

4. Modelo final:

Escribir el modelo lineal múltiple

Comparación de medias

Una de las opciones cuando se quiere comparar una variable continua entre dos grupos consiste en comparar los resultados promedio obtenidos para cada uno. El hecho de que los valores promedio de cada grupo no sean iguales no implica que haya evidencias de una diferencia significativa. La distribución T-student se asemeja en gran medida a la distribución normal. Tiene como parámetros la media, la varianza y además incorpora a través de los grados de libertad una modificación que permite flexibilizar las colas en función del tamaño que tenga la muestra. A medida que se reduce el tamaño muestral, la probabilidad acumulada en las colas aumenta, siendo así menos estricta de lo cabría esperar en una distribución normal. Una distribución T-student con 30 o más grados de libertad es prácticamente igual a una distribución normal.

El número de grados de libertad de la distribución T-student se calcula:

Para estudiar una sola muestra: $df = \text{tamaño muestra} - 1$.

Cuando se comparan dos muestras: existen varios métodos, uno de los utilizados es emplear los grados de libertad de la muestra de menor tamaño mínimo $((n_1 - 1), (n_2 - 1))$. En los programas informáticos se emplean métodos para ajustar de forma más precisa los grados de libertad.

Condiciones de un t-test para muestras independientes

Independencia: Las observaciones tienen que ser independientes unas de las otras. Para ello el muestreo debe ser aleatorio y el tamaño de la muestra inferior al 10% de la población.

Normalidad: Las poblaciones que se comparan tienen que distribuirse de forma normal. A pesar de que la condición de normalidad recae sobre las poblaciones, normalmente no se dispone de información sobre ellas por lo que las muestras (dado que son reflejo de la población) tiene que distribuirse de forma aproximadamente normal. En caso de cierta asimetría los t-test son considerablemente robustos cuando el tamaño de las muestras es mayor o igual a 30.

Igualdad de varianza (homocedasticidad): la varianza de ambas poblaciones comparadas debe de ser igual.

Resultados

La base de datos a analizar consta de 237 observaciones con 4 variables y tiene la estructura que se muestra en la tabla 1.

Tabla 6. estructura de la base de datos brain.csv

Variable	Significado	Tipo de variable	Niveles
----------	-------------	------------------	---------

head	Capacidad craneal	numérica (cm ³)	
brain	Masa cerebral	numérica (g)	
gender	Genero	factor	male / female
age	Edad	factor	26-46 / 46 +

Análisis Exploratorio

Inicialmente se estudia la distribución y la correlación de las variables, tal como se muestra en la figura 1, observando una correlación fuerte entre ambas variables, lo cual sugiere un modelo lineal para representar la relación.

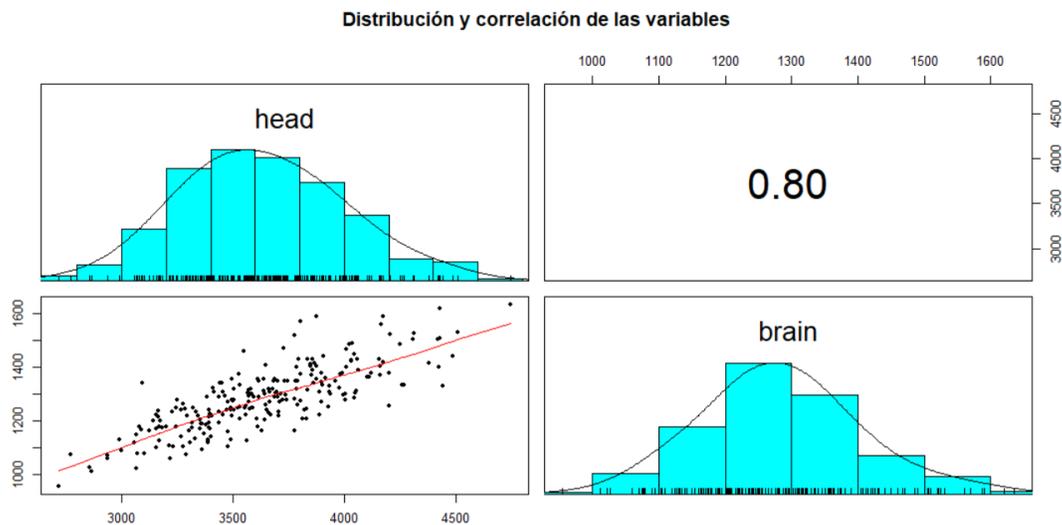


Figura 1. Análisis Exploratorio

Modelo lineal simple

La ecuación con las variables relacionadas tiene la forma siguiente:

$$brain = \beta_0 + \beta_1 * head + error$$

- En la figura 2, se graficó los puntos correspondientes a *head vs brain* y el modelo generado, observándose cierta tendencia lineal.

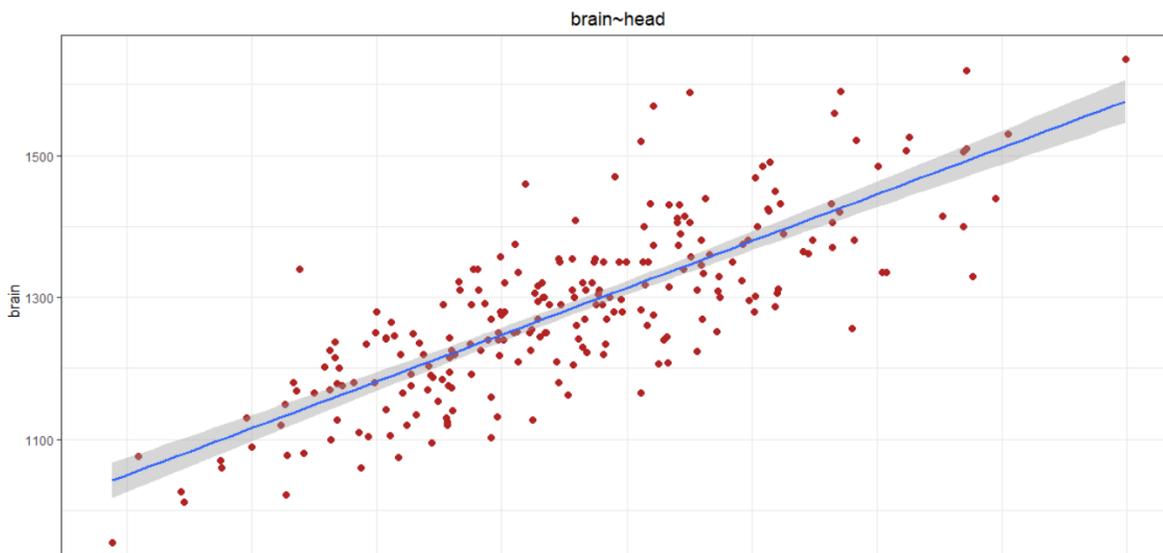


Figura 2 Representación gráfica del modelo lineal simple

Validación del modelo lineal

- **Distribución de los residuales:**
Para analizar que el modelo cumple con los supuestos, en la figura 3, se observa un gráfico que indica normalidad. Para confirmar la normalidad se aplicó una prueba de Shapiro – Wilks, obteniendo un p-valor de 0.1554:
Confirmando así la normalidad en los residuales.

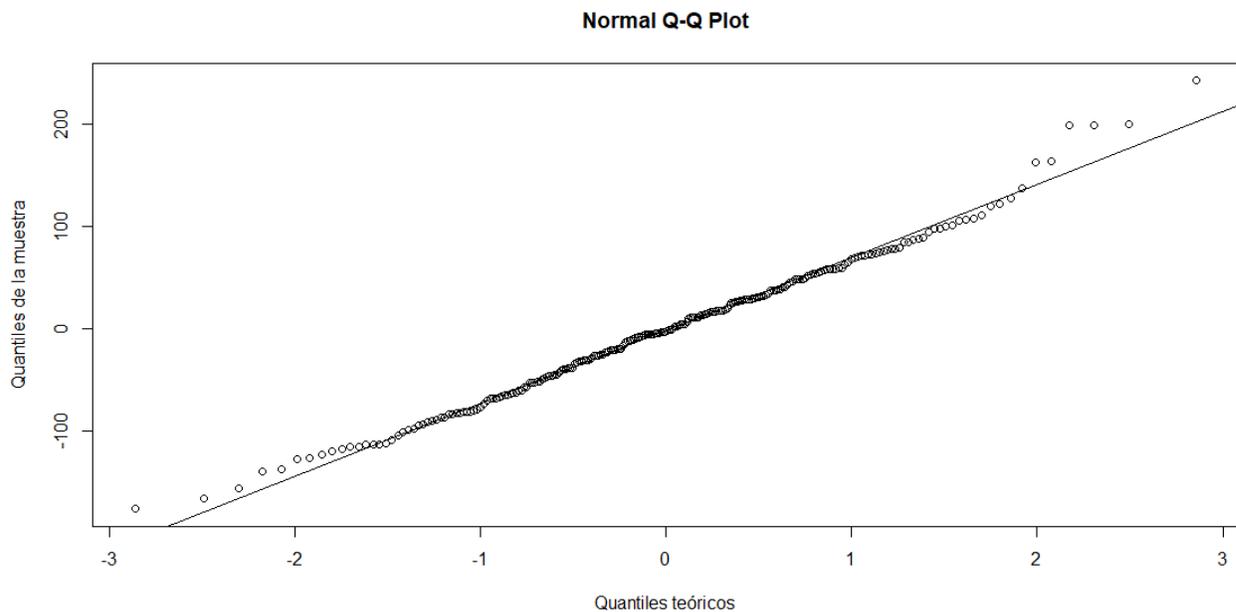


Figura 3. Gráfico de normalidad de los residuales

- **No multicolinealidad**
Dado que solo hay un predictor cuantitativo no se puede dar colinealidad
- **Verificación de homocedasticidad**
Como se observa en la figura 4, los residuos se distribuyen aleatoriamente alrededor de cero y sin un patrón aparente, por lo tanto, se verifica la homocedasticidad.

Verificación de homocedasticidad

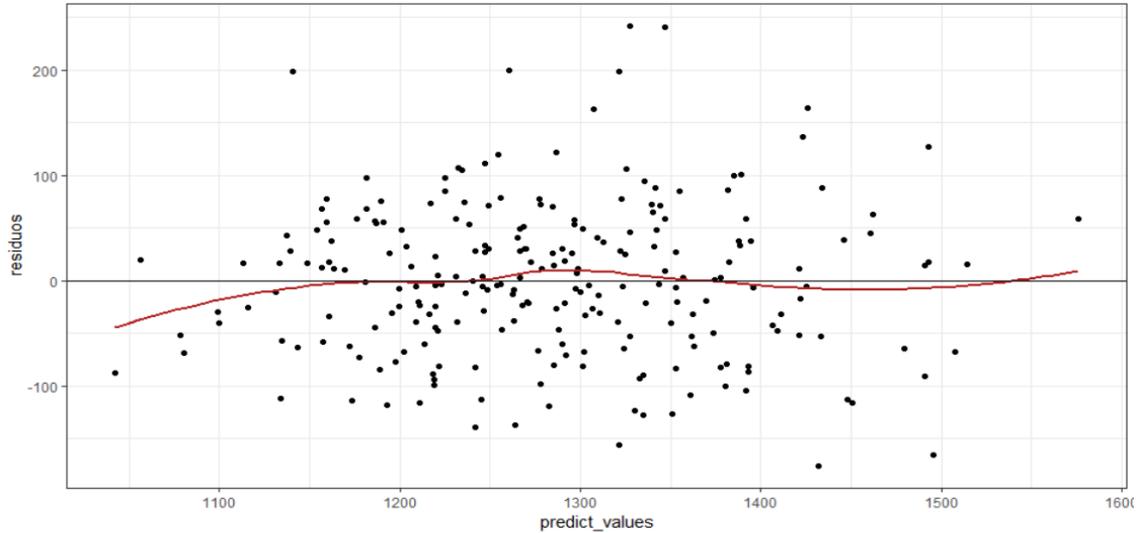


Figura 4. Gráfico de residuales

- Autocorrelación

No hay evidencia de autocorrelación, esto aplicando la prueba de Durbin-Watson

El modelo generado resultante es:

$$brain = 325.57 + 0.26 * head + error$$

El cual explica un 63.93 de la variabilidad de los datos.

Modelo lineal múltiple:

Uno de los objetivos es observar la influencia del género dentro de un modelo, para ello se considera dentro del modelo la variable categórica del género, la ecuación que representa dicho modelo es:

$$brain = \beta_0 + \beta_1 * head + \beta_3 * gender + error$$

Al generar el modelo con los predictores indicados, resulta que el género no es significativo para explicar la variabilidad de los datos, siendo significativo solo el intercepto y la capacidad craneal (tabla 2):

Tabla 7. Coeficientes estimados para un modelo de regresión lineal múltiple

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
intercepto	360.8524	51.7816	6.969	3.23e-11	***
head	0.2509	0.0150	16.734	< 2e-16	***
gendermale	17.8615	11.0266	1.620	0.107	

Comparación de medias

En la figura 5 se muestra un diagrama de dispersión de los datos observados para la variable *brain*, donde se puede diferenciar por color el género, aparentemente los datos están dentro de una misma nube y sin diferencias en su distribución.

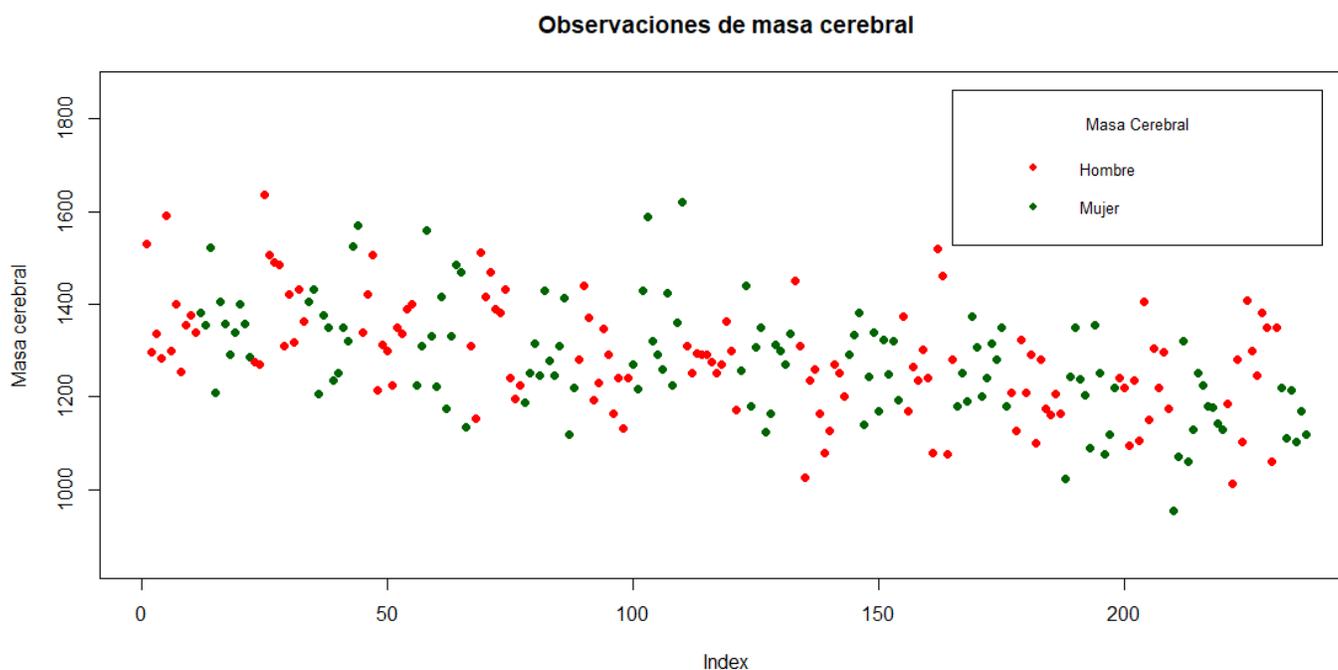


Figura 5 Distribución de la masa cerebral (brain)

Las hipótesis que se probaron son:

H₀: No hay diferencia entre las medias,

$$\mu(\text{brain}\$male) - \mu(\text{brain}\$female) = 0$$

H₁: Si hay diferencia entre las medias:

$$\mu(\text{brain}\$male) - \mu(\text{brain}\$female) \neq 0$$

Parámetro estimado:

Diferencia entre las medias muestrales

$$\mu(\text{brain}\$male) - \mu(\text{brain}\$female) = 1331.858 - 1219.146 = 112.713$$

Condiciones para aplicar un t-test

- Independencia
Dado que los datos observados están divididos por género, se puede afirmar que son independientes
- Normalidad

En la figura 6 se muestran los histogramas de la variable *brain* para cada género, donde se puede observar cierta simetría en su distribución.

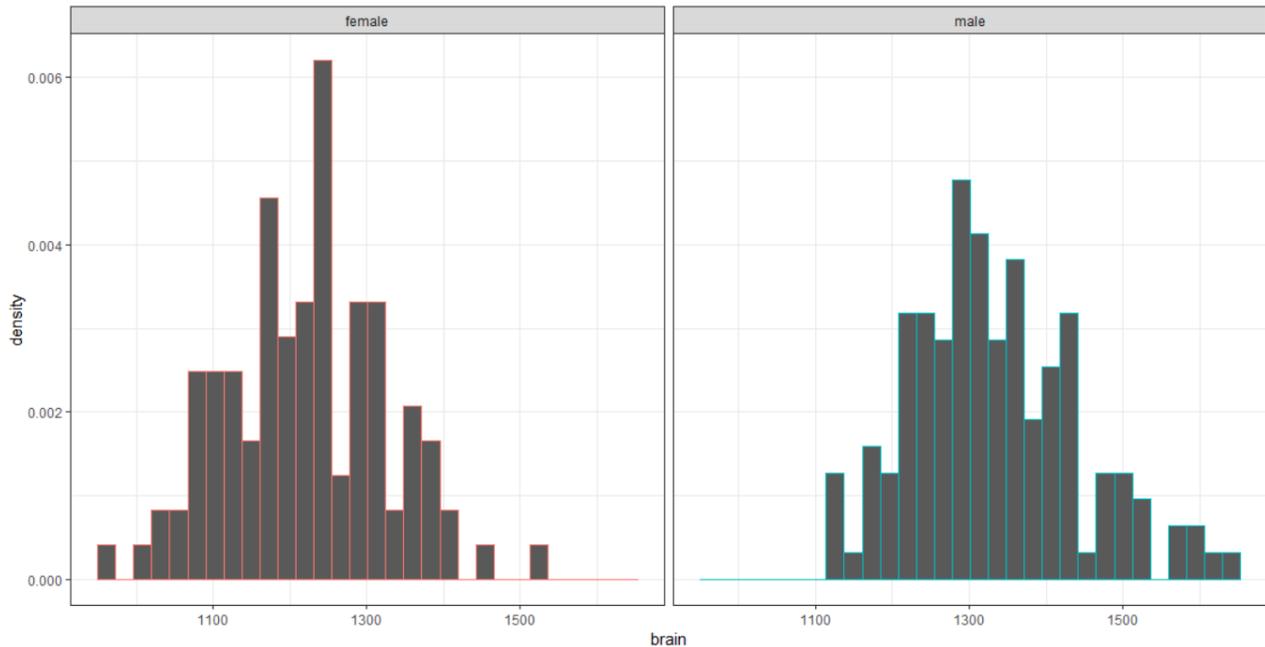


Figura 6 Distribución de densidades de la variable *brain* por genero

Los gráficos Cuantil-Cuantil para los dos géneros se muestran en la figura 7, y sugieren que los datos provienen de distribuciones normales, para corroborar esto se aplicó un test de normalidad, la prueba de Shapiro-Wilks, arrojando un p-valor de 0.05132 para hombres y 0.9919 para mujeres, verificando así la normalidad de los datos.

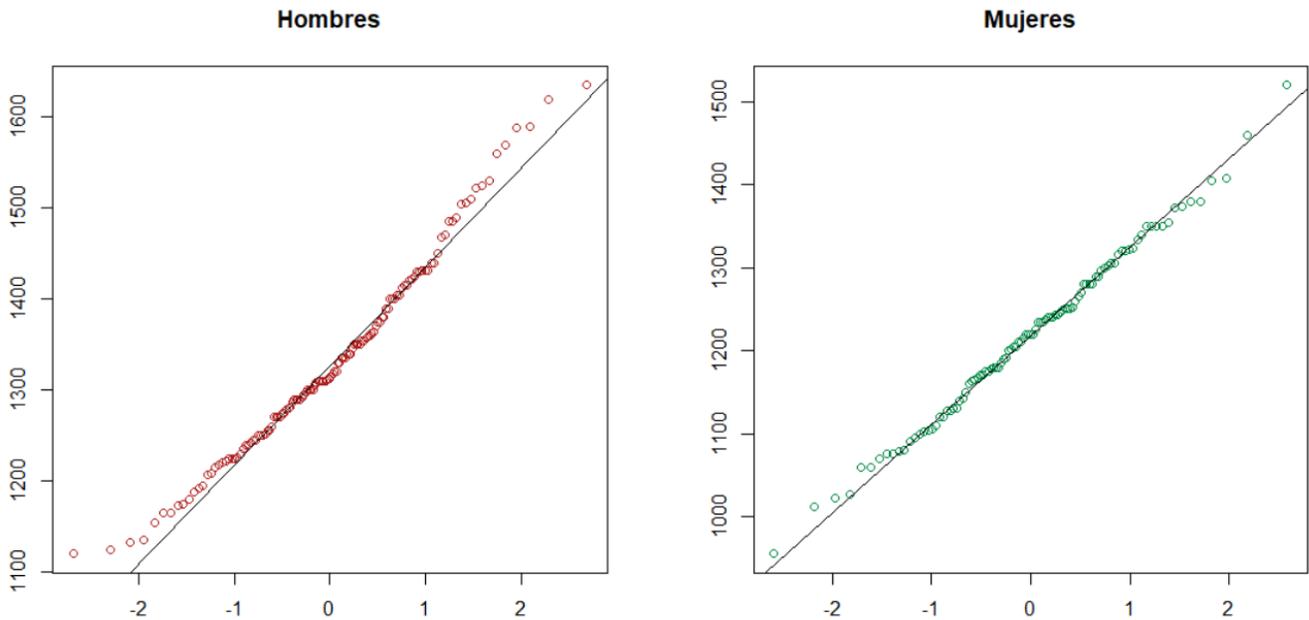


Figura 7 Gráficos Q-Q plot

- Igualdad de varianza

Para verificar la homocedasticidad entre los grupos se aplicó la prueba de Levene tomando como estadístico de centralidad la mediana. El test arroja un p-valor de 0.68, por tanto, no se encontraron diferencias significativas entre las varianzas de los grupos, verificando así la igualdad de varianzas.

- Nivel de significancia

$$\alpha = 0.05$$

- Calculo del p-valor

Al utilizar la función *t.test*, del software estadístico *R*, considerando la masa cerebral de ambos géneros y un nivel de confianza del 95 %, se obtuvo un *p – valor* = $3.9 * e^{-14}$.

Conclusiones

Con los datos analizados se pudo construir un modelo de regresión lineal que asocia la masa cerebral con la capacidad craneal y que no depende significativamente de la variable, género. Esto indica que la variable género no aporta para la explicación de la masa cerebral en función de la capacidad craneal. Al hacer las comparaciones de medias se encontró estadísticamente que hay diferencias significativas entre las masas cerebrales de mujeres y hombres.

Sería interesante diseñar e implementar pruebas para medir algún tipo de inteligencia a diferentes algún grupo de individuos y observar la respuesta a dichas pruebas, considerando factores como la edad, nivel escolar, entre otras y contraponer los resultados con los obtenidos en el presente estudio y como se dijo en la introducción la inteligencia se debe a las conexiones neuronales dentro del cerebro y no a la cantidad o tamaño de la masa cerebral, es decir, con un análisis profundo y específico se podría llegar a la conclusión de que no hay evidencias estadísticas que indiquen diferencias en la forma de razonar de mujeres y hombres, aun cuando estadísticamente hay diferencia entre la masa cerebral promedio de cada uno.

Este tipo de análisis pueden servir como ejemplo de aplicación en la búsqueda de relación o diferencia entre las variables que provienen de una misma población que solo se diferencia por género en este caso, pero que de forma natural surge la pregunta al hacer comparaciones de poblaciones con características aparentemente diferentes, aplicable tanto a personas, animales, plantas, crecimiento bacteriano en cultivos, entre otras.

Referencias:

*FICCOR*research. (s.f.). Obtenido de NCDData Master.

Johnson, R. A. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. USA: Pearson.

Milton, S. (2007). *Estadística para Biología y Ciencias de la Salud*. España: Mc Graw Hill.

Wackerly, D. (2008). *Estadística Matemática*. Cengage Learnings.

Walpole, R. E. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México: Pearson Educación.

Ponencia de Investigación 6

APRENDIZAJE COLABORATIVO EN DOCENTES: DESARROLLO DE MODELOS PARA LA ENSEÑANZA DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Florita Iliana Cano Rodríguez. Asesora: Angelina Alvarado Monroy
knoiliana@gmail.com

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas

Palabras clave: Aprendizaje Colaborativo; Desarrollo Profesional Docente; Matemática
Educativa

Resumen

Se informa el avance de una investigación, en la que participarán docentes de primer ciclo de primaria, cuyo objetivo es diseñar una propuesta de desarrollo profesional que combine estrategias para atender necesidades diversas en los contextos de los profesores y sus estudiantes (e.g. Lesson Study, Actividades Reveladoras del Pensamiento de los Estudiantes y Aprendizaje Colaborativo). En dicha propuesta se enfatiza en un monitoreo continuo para desarrollar una cultura docente situada que mejore la práctica e impacte en el aprendizaje de los estudiantes. La propuesta se implementará durante un ciclo escolar en la zona escolar 51 de sostenimiento estatal del municipio de Poanas, Durango. La evidencia recolectada se analizará para evaluar y documentar la efectividad del diseño.

Introducción

Desde una reflexión como Asesora Técnica Pedagógica (ATP) de la Secretaría de Educación del Estado de Durango en el nivel primaria, se considera que el hecho de que los alumnos no se desempeñen de manera eficiente en las situaciones problemáticas que se plantean en la escuela y en su vida cotidiana, sugiere que, dentro del proceso enseñanza aprendizaje, algo está fallando. Para detectar tales fallas, se pueden seguir diferentes vías. Una de ellas, y de interés en esta propuesta, es centrarse en los profesores para: revisar la didáctica que emplean como medio para desarrollar el pensamiento y las habilidades matemáticas; la manera en que diseñan y llevan a cabo las secuencias didácticas; cómo es el trabajo colaborativo entre docentes para la planeación de tareas matemáticas acordes a los planes y programas de estudio vigentes, diversidad de contextos y circunstancias de las escuelas.

De acuerdo con lo anterior, la atención de este trabajo se centra sobre el profesor, considerando que la planeación es una herramienta fundamental de la práctica docente, pues requiere que el profesor establezca metas, con base en los aprendizajes esperados de los planes de estudio, para lo cual ha de diseñar actividades y tomar decisiones acerca de cómo evaluará el logro de dichos aprendizajes (Secretaría de Educación Pública, 2017, p.121).

Con la entrada en vigor del Nuevo Modelo Educativo 2017, surge incertidumbre entre los docentes acerca de cómo lograr en los estudiantes los aprendizajes esperados en el grado

que atienden y cómo pueden contribuir en el logro de los rasgos del perfil de egreso que se pretenden al término de la Educación Primaria respecto a los ámbitos establecidos. Por lo cual, es necesaria una actualización profesional docente que se establezca de manera paralela y en armonía con la implementación del modelo educativo vigente.

Desde la práctica laboral de la autora, como ATP en la zona escolar N°51 del medio rural, se identifica como un problema relevante para este estudio que: en los espacios en los que se reúnen los profesores para revisar su práctica docente, no se promueve el aprendizaje colaborativo con la finalidad de que desarrollen de manera conjunta sus propios modelos para la enseñanza situada en los contextos particulares en los cuales se desenvuelven. Dichos modelos se pueden visualizar como: los sistemas explicativos e interpretativos de la práctica docente (Schorr & Lesh, 2003); la anticipación, secuenciación y conexión de respuestas a tareas propuestas a los estudiantes y los movimientos del profesor que apoyen la autonomía de los estudiantes durante el monitoreo (Stein, Engle, Smith, y Hughes, 2008).

En atención al problema identificado, el objetivo de esta investigación es diseñar una propuesta de desarrollo profesional que combine estrategias para atender necesidades que enfrentan los profesores al trabajar en los distintos contextos en los que se ubican sus centros escolares, así como el de sus estudiantes para el logro de los aprendizajes esperados en su grado escolar (e.g. Lesson Study, Actividades Reveladoras del Pensamiento de los Estudiantes y Aprendizaje Colaborativo), en la que se enfatiza un monitoreo continuo para desarrollar una cultura docente que mejore la práctica e impacte en el aprendizaje de los estudiantes de primer ciclo de educación primaria.

Al ser un estudio en el que se propone un diseño para el desarrollo profesional docente y, la investigación se realiza tomando como base tal diseño. La pregunta que guía esta investigación es: ¿cómo funciona el diseño propuesto para el desarrollo profesional en un grupo de profesores de primer ciclo de primaria del municipio de Poanas, Durango?

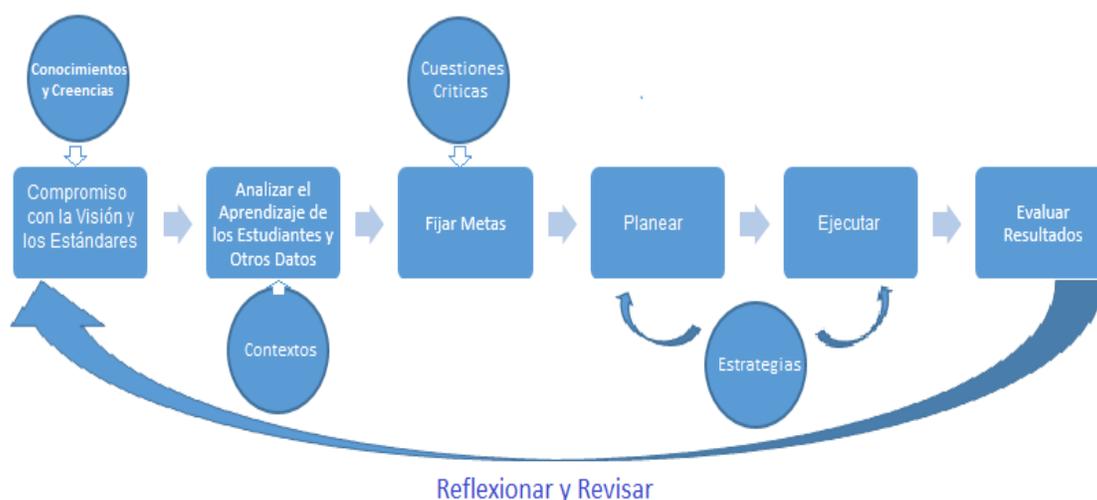
En esta propuesta se considera que incorporar el trabajo colaborativo entre profesores del mismo ciclo escolar como estrategia para la actualización de los docentes al estudiar y mejorar las lecciones, implicaría mejoras sustanciales tanto en los resultados de los estudiantes, como en la formación del profesor y la integración del colectivo docente, ya que tanto las experiencias compartidas de su práctica docente como el diseño colectivo de estrategias didácticas, estarán situados en contextos similares y esto impactará en una atención centrada en las necesidades de sus alumnos. En este sentido, Brown (1992: citado por Zawojewski, Chamberlin, Hjalmarson & Lewis, 2008) “describió la necesidad de desarrollar metodologías de investigación que permitieran, que un cambio en una parte del sistema implicara, una perturbación de todo el sistema” (p. 219). En vista de lograr un cambio positivo, se considera como una posible vía realizar un *Estudio de Diseño de Múltiples Niveles o Diseño Multiseriado* (Zawojewski, Chamberlin, Hjalmarson, & Lewis 2008) y considerar las directrices (Figura 1) para diseñar la propuesta de desarrollo profesional docente para matemáticas (Loucks- Horsley, Stiles, Sundry, Love, & Hewson, 2010).

Marco Teórico

El marco conceptual para el diseño de desarrollo profesional docente en el que se sustenta la presente investigación es el propuesto por Louck-Horsley et al. (2010). Dicho marco

ayuda para pensar, planificar e implementar el desarrollo profesional de profesores de matemáticas y ciencias. Para los autores mencionados el desarrollo profesional no consiste en importar modelos o seguir fórmulas, sino en la participación en un proceso reflexivo y consciente de toma de decisiones que puede verse reflejado en la Figura 1. En el modelo propuesto, se puede ver la transición hacia un aprendizaje profesional continuo e integrando en el trabajo sus mejores prácticas, con el propósito de brindar variedad de experiencias vinculadas a las necesidades de aprendizaje de maestros y estudiantes, además que las puedan combinar o modificar de acuerdo al contexto en el que se desenvuelven y las necesidades que se presenten durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Figura 8 Marco para el Diseño de Desarrollo Profesional Docente.



Fuente: Louck-Horsley et al. (2010)

Fase 1. Compromiso con la visión y estándares del modelo educativo vigente en México. Para elaborar esta parte, es necesario conocer las directrices que determina el Plan y Programa de Estudio del primer ciclo de primaria, por lo que es necesario tener conocimiento de éstas para que el proceso de enseñanza esté enfocado en lo que se pretende lograr.

Del compromiso con la visión y los estándares, en la Figura 1, se deriva el *conocimiento y las creencias* como una entrada importante en cada fase del diseño, desde la visión inicial hasta la evaluación, éstas se construyen principalmente de las experiencias, ayudan a tomar decisiones sobre qué hacer y qué no hacer, el *conocimiento* son las cosas que están respaldadas por hechos e investigaciones sólidas, las *creencias* se refieren a aquellas cosas que estamos llegando a conocer o crear basadas en experiencias personales, observaciones y convicciones (Louck-Horsley et al., 2010).

Fase 2 Aprendizaje de los estudiantes y otros datos. El propósito en esta fase es identificar objetivos específicos para mejorar el aprendizaje de los estudiantes, éstos determinarán los objetivos para el aprendizaje de los maestros y para constituir la base de un programa de desarrollo profesional claramente enfocado en los resultados para los estudiantes. Para Louck-Horsley et al. (2010), lo más importante es examinar múltiples fuentes de datos de aprendizaje de los estudiantes para determinar qué conocimientos y habilidades esenciales

aprenden y qué no aprenden, el análisis de datos puede comenzar con datos fácilmente disponibles, como evaluaciones estatales, nacionales o internacionales. Sin embargo, éstas no proporcionan evidencia adecuada del logro de todos los conocimientos y habilidades, por lo cual, es necesario implementar un sistema de evaluación local integral que complemente las pruebas de alto nivel con evaluaciones más formativas vinculadas a los estándares y al currículo locales, que incluyan tareas de desempeño, portafolios, calificaciones y examen del trabajo de los estudiantes, así como pruebas de respuesta corta y selección múltiple. Además de las evaluaciones locales en el aula y la escuela, las evaluaciones comunes administradas periódicamente por los maestros que enseñan el mismo nivel de grado o curso pueden proporcionar a los maestros comentarios oportunos y relevantes sobre la medida en que los estudiantes dominan los estándares acordados.

De esta fase se desprende un elemento no menos importante a considerar: el *contexto local* en el que se llevará a cabo el proyecto de desarrollo profesional. Así que, según Louck-Horsley et al. (2010), es sustancial comprender la cultura y en qué medida existe una comunidad de aprendizaje profesional entre los maestros. Esta información es relevante para fijar los objetivos de desarrollo para estudiantes y maestros, ayudando a garantizar que el desarrollo profesional esté vinculado con los resultados de aprendizaje. De igual manera, es importante considerar otras características del contexto como son: el liderazgo, políticas nacionales, estatales y locales que deben ser observadas, recursos disponibles, así como a las familias y comunidades. Considerar estos factores ayuda a tomar mejores decisiones a medida que se planifica, implementa y evalúa la propuesta de desarrollo profesional docente.

Fase 3. Metas y objetivos. Para Louck-Horsley et al. (2010), el análisis riguroso del aprendizaje de los estudiantes y otros datos establecen el escenario para establecer *metas* para el programa de desarrollo profesional como los establece la Figura 1, si la visión describe el futuro deseado y el análisis de datos describe la realidad actual, los objetivos son los puntos de referencia para evaluar el progreso hacia la visión.

Dado que el desarrollo profesional debe vincularse con el rendimiento estudiantil, hay cuatro tipos de objetivos relevantes: objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, objetivos para el aprendizaje de los maestros, objetivos para la práctica de la enseñanza y objetivos para la organización, y para cómo desarrollar el liderazgo y crear una comunidad profesional centrada en resultados de aprendizaje de los alumnos.

Louck-Horsley et al. (2010) enfatizan en la necesidad de señalar que al fijar los objetivos surgen *cuestiones críticas* para el éxito de los programas y que es esencial considerar cómo abordarlas como parte de la planificación, o es probable que generen problemas más adelante: (1) desarrollar la capacidad para la sostenibilidad, (2) dedicar tiempo al desarrollo profesional, (3) desarrollar la capacidad de liderazgo, (4) garantizar la equidad, (5) crear una cultura de aprendizaje profesional, (6) obtener apoyo público, y (7) la ampliación. Louck-Horsley, et al. (2010) sugieren anticipar estos problemas y comenzar a lidiar con ellos en la fase de diseño inicial.

Una vez que se establecen los objetivos, Louck-Horsley et al. (2010) recomiendan esbozar la propuesta de desarrollo profesional docente y pensar cómo medirán los resultados. Para ello, es útil ensayar respuestas a las preguntas siguientes:

- Dados nuestros objetivos, ¿cuál es la mejor combinación de estrategias que debemos implementar?
- Si nuestras metas se centran en un mayor conocimiento del contenido, ¿qué estrategias debemos usar?
- ¿Qué estrategias ayudarán a los maestros a traducir su nuevo conocimiento?
- ¿Mejoró la práctica en el aula?
- ¿Tenemos el liderazgo que necesitamos para hacer que lo planeado suceda? y, si no, ¿qué estrategias necesitamos para desarrollar líderes?

Louck-Horsley et al. (2010) sugieren revisar lo que se sabe sobre el contexto, descubriendo los factores importantes a tener en cuenta a medida que se adapta el programa a las propias circunstancias y revisar el aprendizaje de los estudiantes y otros datos que han recopilado para conectar los planes con los objetivos.

Fase 4. La planificación (Figura 1), es el momento de revisar y aclarar las creencias que subyacen en el programa. Es la fase del proceso donde se desarrolla el plan para el programa y su cronograma correspondiente sobre cómo recopilar datos de evaluación y qué datos recopilar. Además de seleccionar las estrategias pertinentes para las necesidades que se han detectado, se han identificado 16 estrategias de desarrollo profesional, organizadas en cuatro grupos, que se pueden usar en una variedad de contextos para diferentes propósitos: (1) inmersión en contenido, estándares e investigación; (2) examinar la enseñanza y el aprendizaje; (3) alineación e implementación del currículo; y, (4) estructuras de desarrollo profesional. Siguiendo el esquema anterior, se implementarán en este trabajo tres estrategias del grupo 2:

- La primera, es proponer Actividades Reveladoras del Pensamiento de los Estudiantes (ARPE o Model Eliciting Activities, MEA por sus siglas en inglés). Este tipo de actividades son centrales en la perspectiva situada de Modelos y Modelización en matemática educativa (Lesh & Doerr, 2003) y se caracterizan por utilizar contextos cercanos a los estudiantes en los cuales se propone una situación problemática que da pie a una diversidad de soluciones que van más allá de una única respuesta, es decir, demandan una explicación, justificación o un método.
- La segunda, incorporar el modelo “Lesson Study (LS)” propuesto por Lewis, Perry y Murata (2006) con la finalidad de involucrar a los profesores en un ambiente colaborativo para estudiar la planeación de una lección, anticipar lo que puede ocurrir al llevarla a los estudiantes y, posteriormente, analizar en el colectivo los resultados de los estudiantes y el desempeño del profesor.
- La tercera estrategia es el aprendizaje colaborativo y está integrada con las estrategias anteriores. Para Nussbaum (2016), al colaborar se adquieren roles dependientes entre los profesores y el trabajo se caracteriza por la existencia de un objetivo común entre ellos, la comunicación, coordinación y apoyo entre pares se ve favorecida, existe una responsabilidad compartida en las acciones, al igual que se tiene conciencia del trabajo de los otros. Otros rasgos son que: se tiene una fuente de retroalimentación común, los roles están entrelazados de modo que producen conocimiento compartido y el éxito o fracaso es común entre los profesores Según Cobb (1995), se identifican como rasgos para una buena comunicación y un aprendizaje colaborativo genuino en matemáticas: cuando los individuos participan con ideas y puntos de vista, al mismo tiempo que respetan y valoran las participaciones de sus compañeros y su profesor; y cuando no

representan una autoridad matemática durante el desarrollo de la interacción en pequeños grupos.

A continuación, se profundiza en las primeras dos estrategias.

Actividades Reveladoras del Pensamiento de los Estudiantes

Tradicionalmente la resolución de problemas implica presentar al estudiante una situación problemática y se espera que sea resuelta utilizando procedimientos asociados con una construcción fija que simplemente necesita ser identificada, recuperada y ejecutada correctamente, mientras en las ARPE, involucran una serie de ciclos de modelado, las heurísticas y estrategias que son más útiles tienden a estar orientadas a ayudar a los estudiantes a encontrar maneras productivas de adaptarse, modificar y refinar las ideas que tienen (Lesh & Doerr 2003).

La resolución de problemas no sólo conduce a formas significativas de aprendizaje, sino que un subproducto de estos episodios de aprendizaje es que los estudiantes producen automáticamente rastros auditables de documentación que revelan la naturaleza de lo que se está aprendiendo (Lesh & Lamon, 1992: citados en Lesh & Doerr, 2003, p.31). De ahí, la razón de su nombre, “dado que proporcionan herramientas poderosas para que los docentes e investigadores las utilicen como evaluaciones del rendimiento de los logros de los estudiantes que rara vez se abordan en pruebas estandarizadas” (Lesh y Lamon, 1992; citado por Lesh & Doerr, 2003, p.31).

Al resolver problemas de la vida real, las ARPE involucran el desarrollo de formas útiles para interpretar la naturaleza de los datos, objetivos, posibles caminos de solución, las soluciones generalmente involucran varios "ciclos de modelado" en los que las descripciones, explicaciones y predicciones se refinan y elaboran gradualmente. Por lo tanto, la enseñanza se centra en estructurar cuidadosamente las experiencias en las que los estudiantes enfrentan la necesidad de construcciones matemáticamente significativas, y en las que expresan, prueban y refinan repetidamente sus formas actuales de pensamiento. (Lesh & Doerr 2003).

Las ARPE con frecuencia proporcionan la base para las actividades que revelan el pensamiento de los maestros, ya que de manera anticipada los maestros deben encontrar las posibles soluciones que sus estudiantes puedan llegar a formular y de esta manera poder dar sentido e interpretar las formas de pensamiento de sus estudiantes. Entonces, mientras que los estudiantes están desarrollando modelos para dar sentido a las situaciones de resolución de problemas matemáticos, los maestros están desarrollando modelos para dar sentido al trabajo de los estudiantes. “Las actividades que revelan el pensamiento para los maestros incluyen el desarrollo de: (a) formas de observación que les permitan estructurar las notas que toman mientras que los estudiantes están trabajando en actividades de obtención de modelos; (b) formas de pensamiento que permitan a los maestros reconocer diversas maneras de pensamiento de los estudiantes al resolver una ARPE dada; y (c) procedimientos de evaluación de la calidad (o rúbricas de calificación) que les permitan juzgar las fortalezas y debilidades relativas de los productos que los estudiantes.” (Lesh & Doerr, 2003, p. 32)

Uno de los propósitos de las ARPE para los maestros es animarlos a revelar, probar, revisar o refinar explícitamente aspectos importantes de sus propias formas de pensar. La investigación sobre instrucción guiada cognitivamente “ha demostrado que una de las formas más efectivas de ayudar a los maestros a mejorar la efectividad de su enseñanza es

ayudarles a familiarizarse con las formas de pensamiento en evolución de sus estudiantes sobre ideas y temas importantes y las ARPE permiten a los maestros observar rastros de documentación desde las formas de pensar de sus propios estudiantes. En consecuencia, las ARPE para los maestros que se basan en las ARPE para sus alumnos, proporcionan la base para actividades efectivas y eficientes para el desarrollo del maestro y ambas se basan en los mismos principios de diseño” (p. 33).

Lesson Study

De acuerdo con Lewis, Perry y Murata (2006), el *Estudio de la Lección* o *Lesson Study* (LS, por sus siglas en inglés), es una aproximación japonesa para el desarrollo profesional docente que se centra en el estudio colaborativo de clases en vivo. Esta metodología se ha extendido rápidamente en los Estados Unidos desde 1999. En LS, uno de los docentes acepta impartir la lección mientras que todos hacen registros detallados de los procesos de aprendizaje y de la enseñanza a medida que éstos se desarrollan. Los datos obtenidos durante la observación de la lección se comparten durante un coloquio posterior a la lección. Tales datos se utilizan en este espacio colectivo para reflexionar sobre la lección y sobre el aprendizaje y la enseñanza de manera más amplia (Lewis, 2002, p.2).

Se identifican en LS las características siguientes: 1) considerar metas a largo plazo para el aprendizaje y para el desarrollo de los estudiantes; 2) estudiar los currículos y estándares existentes; 3) planear y conducir una clase de investigación; 4) recopilar datos durante la lección de investigación; y 5) compartir y analizar los datos en colectivo con pares que forman parte y tienen un particular interés en la lección estudiada. De acuerdo con Lewis, Perry y Murata (2006) se tienen dos rutas de la investigación hasta la mejora de la instrucción: una de *prueba general* y otra de *prueba local*. En este trabajo la ruta de interés es la de prueba local (Tabla 2).

Tabla 8 Ruta de prueba local de la investigación hasta la difusión de la mejora de la instrucción.

Características de la ruta	Ruta de prueba local
Descripción	La innovación se construye o reconstruye localmente. Los datos locales se usan para evaluar y mejorar la efectividad de la innovación. La propagación puede ser orgánica o planificada.
Productos de investigación y garantía	La innovación puede diferir entre sitios y en el tiempo. La evidencia de causalidad puede ser débil.
Interacción entre innovación y sitio	La innovación puede depender de la capacidad local y estar diseñada para construirla. La innovación puede transformarse y transformarse por sitios a lo largo del tiempo.
Diseminación	La diseminación iniciada localmente puede ocurrir en cualquier momento.
Flexibilidad de la innovación	Las adaptaciones continuas son posibles. Las adaptaciones locales se esperan y se estudian como fuentes de mejora potencial para el diseño y la teoría de la innovación. Las "mutaciones letales" también pueden ocurrir.
Institucionalización	La innovación y las estructuras locales pueden adaptarse entre sí desde el principio, comenzando así el proceso de institucionalización temprano.
Base de conocimientos	La base de conocimiento puede realizarse localmente, incorporarse en estructuras locales (en lugar de "conocidas") e incluir solo el conocimiento

	necesario a nivel local.
Principales fortalezas	La adaptación local, la propiedad, la mejora y la propagación son posibles. Los datos locales se pueden usar para garantizar la efectividad.

Fuente: Adaptada de Lewis, Perry y Murata (2006).

Ambas estrategias han reportado resultados exitosos en la formación de profesores y en los resultados de los estudiantes al abordar situaciones problemáticas auténticas. Por ejemplo, LS implementado en Japón por Hart, Alston y Murata (2011), y posteriormente, en Estados Unidos (Chokshi & Fernandez, 2005; Lewis, Perry, & Hurd, 2009) y Singapur (Lawrence-Chong, 2009). Por otra parte, se han revisado también, experiencias exitosas de implementaciones de Actividades Reveladoras del Pensamiento en los Estudiantes, en las cuales la modelización es utilizada para promover aprendizajes en profesores con impacto directo en los estudiantes a través de la implementación (Clark & Lesh, 2003; Schorr & Lesh, 2003; McClain, 2003; Zawojewsky et al., 2008). Así, con las ARPE, se pueden proporcionar experiencias que conduzcan al desarrollo de nuevos modelos de instrucción pues, como lo sugiere el nombre de dichas actividades, permiten revelar el propio pensamiento del estudiante, extenderlo, refinarlo y compartirlo. (Schorr & Lesh, 2003).

Metodología

Dados los objetivos de esta investigación, se requiere de una metodología que permita, que un cambio en una parte del sistema implique, una perturbación de todo el sistema. De tal manera que se considera apropiada la metodología de *Estudios de Diseños de Múltiples Niveles* o *Diseños Multiseriados* (Zawojewski et al., 2008). En estos estudios, investigadores y diseñadores instruccionales proponen esquemas de desarrollo profesional docente, donde las secuencias didácticas serán objeto de estudio y se evaluará su impacto tanto en los docentes como en los estudiantes, pero también informará a investigadores y diseñadores para realizar mejoras. Así, los docentes participan en el desarrollo de secuencias y estrategias que revelan aspectos de su propio pensamiento; los maestros están comprometidos en probar y revisar las secuencias y estrategias; y se les pide que describan y documenten los principios rectores que han usado en su revisión. Cuando los maestros producen objetos educativos para usar en su propia práctica tienen la oportunidad de examinar su propio pensamiento, porque sus estrategias son una representación externa de sus propios sistemas interpretativos. La prueba y la revisión se llevan a cabo cuando grupos de maestros negocian el desarrollo del objeto educativo, cuando se evalúa sobre el terreno en el aula y cuando los datos de la clase se informan y se discuten entre compañeros. (Zawojewski et al., 2008).

Los estudios de múltiples niveles requieren que el investigador y los facilitadores trabajen juntos para planificar actividades que proporcionen simultáneamente oportunidades de crecimiento y que documenten su trabajo. Durante el curso de la investigación, en este tipo de estudios, se cuestiona desde un punto de vista claramente articulado que el desarrollo profesional se ha orientado en la dirección correcta, abordando los problemas de los docentes y la flexibilidad en las actividades planificadas. La documentación puede obtenerse de múltiples fuentes y se obtienen como parte de la experiencia de desarrollo profesional, se analiza la perspectiva de los datos, lo que lleva a múltiples conclusiones e implicaciones de los aspectos de investigación de la formulación de un estudio de diseño. En los estudios de diseño de múltiples niveles en cada nivel se espera un producto determinado, esto se ilustra en la Figura 2.

Figura 9 Estructura de estudio de diseño multiseriado y producto asociado a cada nivel.



Fuente: Elaboración propia con información de Zawojewski et al. (2008)

Diseño de Actividades para estudiantes y maestros

Para lograr experiencias que estimulen el crecimiento docente y que tengan un impacto en los resultados de los aprendizajes esperados en los estudiantes, se presenta en este espacio un ejemplo del tipo de actividades que los profesores estudiarán y, posteriormente, experimentarán con sus estudiantes.

La actividad se introduce con una lectura tipo artículo de periódico que habla de la labor que desempeña una fundación destinada a apoyar el desarrollo integral de niños indígenas. Este contexto es relevante para el estado de Durango. Posteriormente, se presenta la Actividad Reveladora del Pensamiento de los Estudiantes que aparece en la Figura 3.

Figura 10 Actividad Reveladora del Pensamiento del Estudiante "Apadrina un niño o niña esta Navidad."

Yolanda que tiene un gran corazón y le gusta siempre apoyar a los niños con mayores necesidades se le ha ocurrido realizar la actividad "Apadrina un niño o niña esta Navidad", entre sus conocidos, para que ningún niño o niña se quede sin juguetes esta Navidad. La actividad consiste en aportar \$100 para comprar con ellos juguetes, como los que se muestran a continuación, formando paquetes que en conjunto cubran ese valor. Los paquetes reunidos serán donados a niños y niñas de escasos recursos. ¿Te gustaría Apadrinar una niña o niño esta Navidad? ¡Anímate y arma tu paquetes!

Apadrina un niño o niña esta Navidad
Con tus \$100 pesos arma tu paquete



¡Ayuda a formar algunos paquetes, para que niños como tú puedan apadrinar a un niño o niña esta Navidad. Escribe o dibuja los juguetes que conforman el paquete, recuerda que deberán pagar por ellos \$100 pesos.

Paquete 1	Paquete 2	Paquete 3
Paquete 4	Paquete 5	Paquete 6

Fuente: Elaboración propia.

Aunque en este apartado sólo se menciona un ejemplo, se han diseñado ARPE para cada uno de los ejes del programa para el primer ciclo de educación primaria, como lo son: Número, algebra y variación; Forma, medida y espacio; así como Análisis de datos.

Participantes del estudio y recolección de datos

Los profesores participantes serán diez docentes que atienden primer grado y diez de segundo grado y uno que atiende los dos grados (multigrado) de la zona escolar N° 51 de sostenimiento estatal, perteneciente al municipio de Poanas, Durango y sus correspondientes estudiantes del primer ciclo de educación primaria. El investigador y asesor participarán del diseño y como facilitadores del taller.

Para la recolección de datos se considerarán todas las evidencias escritas de las producciones de los profesores tanto en los talleres de desarrollo profesional como de las interpretaciones de las producciones de sus estudiantes, notas de campo de los investigadores y facilitadores de los talleres, fotografías y grabaciones de audio y video.

Resultados

Para una revisión de avances en los resultados seguiremos el esquema presentado en la Figura 1, sobre el marco de diseño de desarrollo profesional y los avances de cada una de las fases.

Fase 1 Compromiso con la visión y estándares del modelo educativo vigente en México.

El aprendizaje de los alumnos se determina por las directrices que determina el Plan y Programa de Estudio del nivel primaria (SEP, 2017), por lo que se ha realizado una revisión detallada para tener conocimiento de éstas y garantizar que el proceso de enseñanza esté enfocado en lo que se pretende lograr. Entre los principales elementos revisados se tienen: el enfoque pedagógico de las matemáticas el cual nos indica tanto las metas como los medios para aprender matemáticas, así como, el papel que debe desempeñar el profesor en el diseño, implementación y evaluación de las actividades; cuatro de los once rasgos del perfil de egreso de la Educación Primaria, que se relacionan ampliamente con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el trabajo cotidiano de éstas en el aula; los Propósitos para la Educación Primaria en la asignatura de matemáticas los cuales nos indican lo que se pretende lograr en los estudiantes al finalizar su educación primaria; y, finalmente, se ha revisado a detalle cómo se organiza el currículo en la asignatura de matemática, los ejes temáticos, temas en los que se dividen y los aprendizajes esperados de cada uno de ellos en los dos primeros grados de educación primaria que son en los que se enfocará este trabajo de investigación.

Fase 2 Aprendizaje de los estudiantes

Por razones de espacio en esta fase no se informan resultados, aunque se ha estudiado cómo aprenden matemáticas los niños desde la base de la ciencia cognitiva de Lakoff y Núñez (2000) y cuya tesis es que las ideas matemáticas surgen como *metáforas*. Tales metáforas son en esencia isomorfismos que consisten de un *dominio fuente*, que es concreto, a un *dominio destino* (objetos matemáticos nuevos que están en desarrollo) y una *correspondencia* entre ambos dominios. En aritmética, por ejemplo, un dominio fuente es una colección de objetos, un dominio destino es la aritmética, la colección de objetos se corresponde con números, el tamaño de la colección se corresponde con un número, la colección más pequeña posible es para el número 1, al agregar un objeto es de 2, se agrega uno más será de 3, etc. Si la colección es de 3 y se retira 1 objeto sería de 2.

Fase 3 Metas y objetivos

Los avances de esta fase se presentan resumidos en la Tabla 2.

Fase 4 Planeación del diseño

Para llevar a cabo esta investigación, como ya se expuso en el marco teórico, se ha decidido utilizar como estrategias para el diseño de desarrollo profesional docente: 1) Lesson Study, 2) las Actividades Reveladoras del Pensamiento de los Estudiantes y de manera implícita en ambas, 3) el Aprendizaje Colaborativo entre docentes. Como productos del diseño propuesto se espera recolectar durante el trabajo en el aula evidencias que servirán para que los profesores alimenten instrumentos conocidos como Hojas Reveladoras del Pensamiento Matemático, que los ayudarán a desarrollar en colectivo sistemas interpretativos del pensamiento de sus estudiantes (explícito en las ARPE), al igual que sistemas explicativos de su práctica docente. Finalmente, se espera que el análisis y documentación de tales evidencias ayuden a informar la mejora del diseño de desarrollo profesional docente.

Tabla 9 Propuesta para el Desarrollo Profesional Docente (DPD) en Poanas Durango.

Nivel, rasgos y aprendizajes esperados	<p><i>Nivel de atención:</i> Primer ciclo de Educación Primaria.</p> <p><i>Rasgos del perfil de egreso de los estudiantes atendidos:</i> Pensamiento matemático, pensamiento crítico y resolución de problemas, colaboración y trabajo en equipo, habilidades digitales</p> <p><i>Aprendizajes esperados:</i> Resuelve problemas de suma y resta con números naturales menores que 100; calcula mentalmente sumas y restas con resultados menores que 100; estima, compara y ordena diferentes magnitudes; recolecta datos y hace registros personales; construye configuraciones con figuras geométricas.</p>
Conocimiento y creencias	Los estudiantes aprenden matemáticas mediante metáforas (Lakoff & Núñez, 2000); y desde la construcción, desarrollo, prueba y mejora de sistemas conceptuales que representan y resuelven situaciones contextualizadas de las cuales ellos pueden extraer significados (Lesh & Doerr, 2003).
Contexto	Esfuerzos de desarrollo profesional local realizados hasta el momento y sus resultados; conocimiento de los maestros (contenido matemático para la enseñanza; estándares nacionales y resultados de evaluación (locales, estatales, nacionales e internacionales).
Meta	<p>Mejorar el aprendizaje de la matemática a través de implementación de actividades contextualizadas con una variedad de respuestas determinadas por el pensamiento del niño y estudiadas previamente por los profesores en colectivo.</p> <p>Fortalecer habilidades en los profesores para diseñar e implementar nuevas formas de enseñanza de manera colaborativa con sus pares, así como su liderazgo en el aula.</p> <p>Desarrollar en todos los estudiantes del primer ciclo las habilidades y actitudes necesarias para lograr los aprendizajes esperados.</p>
Estrategias	Actividades Reveladoras del Pensamiento de los Estudiantes; Lesson Study; talleres de desarrollo profesional; acompañamiento a los docentes; inmersión en nuevas formas de enseñanza y aprendizaje (ARPE) y profundizar en la construcción, integración y desarrollo de los sistemas

	conceptuales; enfatizar en el aprendizaje colaborativo de profesores (Nussbaum, 2016; Cobb, 1995) y, en consecuencia, de sus estudiantes.
Puntos críticos	Desarrollar liderazgo, construir capacidad para que el desarrollo profesional sea sustentable y desarrollar una cultura y conciencia del desarrollo profesional colaborativo y su impacto en el aula.
Población de atención	21 profesores que atienden alumnos del primer ciclo de educación primaria en el municipio de Poanas, Durango.
Actividades	Taller 1 (2 sesiones, de 5 horas): estudiar las lecciones en colectivo. Acompañamiento en las implementaciones en el aula (4 observaciones; 2 de primer grado y 2 en segundo). Taller 2 (2 sesiones, de 5 horas): Retroalimentar la implementación y evaluación formativa. Acompañamiento en implementaciones en el aula (4 observaciones; 2 de primer grado y 2 en segundo). Taller 3 (2 sesiones de 5 horas cada una): Elaborar conclusiones y proponer mejoras. Institucionalización del DPD.

Fuente: Elaboración propia.

Fase 5. Evaluación

En esta parte se pretende conducir una evaluación formativa, ésta se refiere a cualquier medio que proporcione información del progreso de los profesores o de los estudiantes y que cumpla con dos criterios: 1) que la información sea de lo ocurrido durante el proceso de aprendizaje y con el propósito de proporcionar retroalimentación a los investigadores, profesores o estudiantes, acerca de algunos aspectos del progreso y entendimiento de los participantes (Organisation for EconomicCo-operation and Development, 2005) del estudio de diseño multinivel. Para Black y Wiliam (1998) tal retroalimentación debe utilizarse para modificar o ajustar el diseño propuesto en el cual se ven involucrados investigadores, profesores y estudiantes.

Conclusiones

De los avances informados en este trabajo, se puede concluir que, en los últimos años, se han implementado diversos proyectos de desarrollo profesional que se destacan por la búsqueda y ejecución de estrategias que permiten comprender el pensamiento de los alumnos, las interpretaciones de los problemas, así como, a detectar y superar errores para mejorar el aprendizaje. Estos proyectos permiten a los docentes avanzar en su práctica de instrucción, construir nuevos modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ser más analíticos y reflexivos en su práctica docente.

Tomando en cuenta las experiencias exitosas citadas en el desarrollo de este escrito, tanto del uso de ARPE como de LS, se considera pertinente y viable utilizarlas como estrategias para el diseño de la propuesta para el desarrollo profesional docente en el municipio de Poanas, Durango, México, con profesores de primaria, con la expectativa de desarrollar habilidades en ellos para el trabajo colaborativo, documentando un estudio de diseño multinivel que impacte en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la asignatura de matemáticas con estudiantes del primer ciclo de educación primaria.

Tomando como base lo expuesto en este reporte, se ha construido un entendimiento de las bases de las directrices para el diseño de desarrollo profesional docente en matemáticas (Louck-Horsley et al., 2010), de la metodología para conducir un estudio de diseño multinivel (Zawojewski et al., 2008) y se tiene la expectativa de que esta forma de trabajo con los docentes los puede comprometer a conocer los Planes y Programas vigentes, explorar nuevas formas de enseñanza centradas en explicar e interpretar el pensamiento de los estudiantes y a trabajar de manera colaborativa con sus pares, ya que, requieren de espacios en los cuales puedan compartir con sus compañeros las experiencias exitosas y áreas de oportunidad que detectan en su práctica docente. Además, se espera que promueva una actualización continua que considere la diversidad de estrategias de enseñanza de la matemática que surgen en armonía con los cambios actuales donde el docente debe dejar de ser el trasmisor de conocimientos para convertirse en un agente de cambio del sistema educativo que favorece la construcción del conocimiento por parte de los alumnos a partir de situaciones contextualizadas en su vida diaria.

Referencias

- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy y Practice*, 5(1), 7-74.
- Brown (1992). Developing Design Studies in Mathematics Education Professional Development: Studying Teacher's Interpretive Systems. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek, *Hanbook of Design Research Methods in Education* (pp. 219-243). New York: Routledge.
- Chokshi, S. & Fernandez, C. (2004). Challenges to Importing Japanese Lesson Study: Concerns, Misconceptions, and Nuances. *Phi Delta Kappan*, 85(7), 520.
- Chokshi, S. & Fernandez, C. (2005). Reaping the Systemic Benefits of Lesson Study: Insights from the US. *The Phi Delta Kappan*, 86 (9), 674-680.
- Clark, K., & Richard, L. (2003). A Modeling Approach to Describe Teacher Knowledge. En H. Doerr, & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 159-174). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb, H. Bauersfeld, P. Cobb, & H. Bauersfeld (Edits.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25-129). Hillsdale: Laurence Erlbaum Associates.
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. New York: Routledge.
- Groth, R. (2011). Improving Teaching through Lesson Study Debriefing. *The Mathematics Teacher*. 104 (6), 446-451. NCTM.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. New York: Basic Books.
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia: Research for Better Schools
- Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational researcher*, 35(3), 3-14.
- Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 285-304.

- Loucks- Horsley, S., Stiles, K., Mundry, S., Love, N., & Hewson, P. (2010). *Designing Professional Development for Teachers of Science and Mathematics*. USA. Corwin Press.
- Hart, L., Alston, A., & Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.
- McClain, K. (2003). Task-Analysis Cycles as Tools for Supporting Students' Mathematical Development. En H. Doerr & R. Lesh, *Beyond Constructivism Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching* (pp. 175-190). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Nussbaum, M. (2016). Hacia una práctica constructivista en el aula. Pontificia Universidad Católica de Chile. Curso disponible al 15 de enero de 2019: <https://www.coursera.org/learn/aulaconstructivista>.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2005). *Formative Assessment: Improving Learning in Secondary Classroom*. Paris: OECD.
- Schorr, R. Y & Lesh, R. (2003). A Modeling Approach for Providing Teacher Development. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education* (141-158). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria: Educar para la libertad y la creatividad*. Ciudad de México: SEP.
- Secretaría de Educación Pública (2018). Matemáticas. En *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio la educación básica*. (pp. 298-395). Ciudad de México: SEP.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10 (4), 313-340.
- Lawrence A., Chong, W., (2011). *Teacher collaborative learning through the lesson study: identifying pathways for instructional success in a Singapore high school*. Seoul, Korea: Springer.
- Fujii, T., Takahashi, A., (2015). Improving Teacher Professional Development Through Lesson Study. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. ICME.
- Zawojewski, J., Chamberlin, M., Hjalmarson, M. A., & Lewis, C. (2008). Developing Design Studies in Mathematics Education Professional Development: Studying Teacher's Interpretive Systems. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek, *Hanbook of Design Research Methods in Education* (pp. 219-243). New York: Routledge.

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 7

ESTUDIO DE LA RELACIÓN LINEAL ESTADÍSTICA ENTRE EL COLOR, COMPOSICIÓN FENÓLICA Y OTRAS CARACTERÍSTICAS DE LOS VINOS

David Emmanuel López Castro. Asesora: Dra. Diana Barraza Barraza

davidlopez586493@gmail.com

Universidad Juárez del Estado de Durango. Facultad de Ciencias Exactas

Nivel Educativo: Maestría en Estadística Aplicada

Color del vino, clusterización, modelos de regresión.

Las características fenólicas del vino suelen asociarse con el porcentaje de absorbancia (color), en este estudio se busca encontrar la relación lineal estadística entre el color y características fenólicas de cada vino. Se busca también, explicar la relación asociativa entre estas características a través de clusterización. Se ajustó un modelo de regresión lineal con 6 variables regresoras significativas, la medida de asociación entre las variables permitió una clasificación estadística en la que se identificaron 3 agrupamientos, que coinciden con su proceso de fermentación.

Introducción

El vino es una bebida que se obtiene por medio de la fermenta alcohólica de uvas, los atributos o características de éstos son influidos por diversos factores, como la zona geográfica, el método de cultivo de las uvas, el proceso de vinificación y la variedad (Jackson, 2008). El color en particular, está determinado por la concentración y tipo de antocianos, y una de las vías de su síntesis en la uva es a partir de la glucosa (De La Cruz-De Aquino, Martínez-Peniche, Becerril-Román, Del, & Chávaro-Ortiz, 2012).

En la presente investigación se busca encontrar la relación entre las características cromáticas y químicas de los vinos, aplicando un modelo de regresión lineal; así como agrupar estadísticamente los vinos, con base a los atributos de éstos. En el apartado de Marco teórico, se detallan algunos conceptos y definiciones básicas, referentes a los vinos y sus características, modelos de regresión lineal y clusterización. En la segunda sección se da a conocer la metodología utilizada; finalmente, se muestran los resultados y conclusiones.

Marco Teórico

El color rojo en el vino viene de un pigmento llamado antocianina, que está presente en muchas otras frutas, incluyendo ciruelas, arándanos y cerezas. El pigmento en vino tinto proviene de las pieles de las uvas. Al remojar las pieles en el jugo, se libera antocianina, que tiñe el vino. Las diferentes variedades rojas producen diferentes niveles y expresiones de este grupo de compuestos de pigmentos, lo que hace que la ciencia detrás de esto sea muy compleja. Cada variedad de uva roja expresa el color de manera un poco diferente y hay muchas variables que afectarán el color (Jackson, 2008).

La tonalidad del color se puede observar con la opacidad del vino. Los vinos tintos opacos se observan por tener más pigmentos y fenoles que los vinos tintos más translúcidos. La intensidad del color puede ser amplificada por otros polifenoles en el vino. Los vinos pierden pigmento a medida que envejecen (De La Cruz-De Aquino et al., 2012).

Modelos de regresión lineal

Para representar la relación lineal de una variable Y con respecto a otra variable X , se utilizan los modelos de regresión (Kutner et al., 2005). Para obtener un modelo de regresión múltiple, basta considerar una combinación lineal de las variables regresoras, de la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon \quad (1)$$

Donde cada X_i es una variable regresora o independiente, que es conocida y constante. Los β_i son parámetros de las X_i , y el término ε , es conocido como el término de error.

La estimación de los parámetros β_i , se hace por medio de Mínimos Cuadrados, y el término de error ε cumple con los siguientes supuestos:

- $\varepsilon \sim iid N(0, \sigma^2)$
- ε_i es independiente de ε_j , para todo $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.
- Los términos de error ε tienen varianza constante.

Se debe hacer una selección de variables regresoras, de modo que solo se incluyan las necesarias. Para elegir las variables regresoras, existen diferentes métodos y algoritmos, se hará uso de los métodos (Kutner & et.al, 2005):

- Métodos Forward: Consiste en la selección de variables hacia adelante.
- Métodos Backward: Se basa en la eliminación de variables hacia atrás.
- Métodos Stepwise: Engloban una serie de procedimientos de selección automática de variables significativas, basados en la inclusión o exclusión de las mismas en el modelo de una manera secuencial.
- Best subset: Se basa en encontrar un subconjunto de variables que proporcione el mejor modelo.

El criterio C_p de Mallows, compara la precisión y el sesgo del modelo completo con modelos que incluyen un subconjunto de los predictores. Un valor del C_p de Mallows pequeño indica que el modelo es relativamente preciso para estimar los coeficientes de regresión verdaderos y pronosticar futuras respuestas. Cuando ya se tienen las variables regresoras, se crea el modelo y se tienen que verificar los supuestos de éste, que son normalidad, homocedasticidad e independencia de los residuales, los cuales se verifican con una prueba de Shapiro-Wilks o la prueba de Kolmogorov-Smirnov, para normalidad, si el p-valor es menor que el nivel de significancia, se concluye que los datos no siguen una distribución normal. Una prueba de Breusch-Pagan, para igualdad de varianzas, si el p-valor asociado a una prueba de heterocedasticidad cae por debajo de un nivel de significancia, se llega a la conclusión de que los datos son significativamente heterocedásticos. La prueba Durbin-Watson se usa para probar la independencia de los datos, si el p-valor es menor que el nivel de significancia, se concluye que los datos no son independientes (Kutner & et.al, 2005).

Para validar el modelo, se hace una partición de los datos, los cuales no se incluyen para la estimación de los parámetros del modelo, y se ingresan los datos de las variables regresoras, para obtener los valores de la variable de respuesta ajustados; éstos se comparan con la variable de respuesta observada.

Técnicas de Agrupación

Existen diversos métodos para realizar agrupaciones, las cuales crean una clasificación estadística de los datos; en particular, el método de clusterización de k -medias, consiste en dividir las n observaciones en $k \leq n$ grupos o clústeres, o dado un conjunto de observaciones (X_1, X_2, \dots, X_n) donde cada observación es un vector real p -dimensional; el agrupamiento de k -medias busca minimizar la suma de cuadrados dentro de cada grupo $S_i \in \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ (Johnson & Wichern, 2007). Tomando en cuenta las distancias euclidianas determinadas por:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_p - y_p)^2} \quad (2)$$

Se agrupan considerando el punto más cercano, esto es, seleccionando las observaciones X_i y X_j , tales que: $\min_{i,j} \{d(X_i, X_j)\} \quad i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j$.

Para determinar el valor del parámetro k , si observamos el porcentaje de varianza explicado como una función del número de clústeres: uno debe elegir un número de clústeres para que agregar otro clúster no dé un mejor modelado de los datos. Existen diversos índices que ayudan para determinar ese número (Johnson & Wichern, 2007).

Planteamiento del Problema

Objetivo general

Determinar la relación lineal estadística entre el Color de diferentes tipos de vinos, con otras características químicas y cromáticas, así como realizar una clasificación de éstos.

Objetivos particulares.

1. Analizar la relación estadística entre el color y otras características cromáticas y químicas de vinos.
2. Realizar una clasificación estadística de los vinos, según las características cromáticas y químicas, a través del método de k -medias.

Justificación

Los resultados y conclusiones que se encontrarán a través de esta investigación ayudarán a los catadores de vino a tener una perspectiva inicial, desde un punto de vista del color, tonalidad y otras características.

La exploración de los vinos y sus características, permitirá tener una visión de las amplias y variadas aplicaciones de la estadística.

Alcances y limitaciones

Dentro del análisis realizado, se crea el modelo de estimación del color en función de algunas características del vino y se hace una clasificación de éstos. Se puede generalizar la metodología usada, contemplando más variables como sabor, variedades, entre otras.

Existen bastantes bases de datos referentes a características de vinos, se eligió la que contemplaba las variables requeridas para comprobar o refutar las hipótesis.

Hipótesis de investigación

Existe una relación lineal estadística entre el color y las características químicas y cromáticas de los vinos.

Se puede hacer una clasificación estadística de los vinos, a través del método de k-medias.

Metodología

La tipología del estudio es documental, debido a que la información se obtuvo de fuentes bibliográficas, y correlacional, ya que se describen algunas relaciones de los vinos y grupos de estos.

Técnicas y Procedimientos para la Recopilación de Información

Revisión documental: Se obtuvo la base de datos del Repositorio de Aprendizaje Automático de la Universidad de Irvine California (UCI por sus siglas en inglés) (“UCI Machine learning repository: wine data set,” n.d.). Esta base de datos cuenta con las características cromáticas y algunas características químicas de una muestra de 178 vinos diferentes, por lo que se adapta para contrastar las hipótesis.

Técnicas de Análisis de Información

El conjunto de datos de vino contiene los resultados de un análisis químico de vinos cultivados en un área específica de Italia. Es una muestra de tres tipos de vino de 178 observaciones, con los resultados de 13 análisis químicos registrados para cada observación.

Las 13 características tomadas como atributos son:

- Grado de alcohol: contenido de alcohol, reportado en unidades de alcohol por volumen, que van desde 11 a 14.8.
- Cantidad de ácido málico: responsable del sabor ácido de la fermentación de las frutas, tiene un rango de valores de 0.7 a 5.8 unidades por volumen.
- Cenizas: tiene valores entre 1.36 y 3.23 unidades por volumen, es la materia orgánica resultante de la calcinación del vino.
- Alcalinidad de las cenizas: es la suma de los cationes de amonio mezclados en los ácidos del vino, tiene valores de 10.6 a 30.0.
- Magnesio: el cual determina las condiciones de almacenamiento del vino y afecta el sabor del vino, se encuentra en valores entre 70.0 y 162.0 mg/lt.
- Fenoles totales: los valores en los vinos están entre 0.98 y 3.88 unidades por 100 ml de vino, son responsables de la pigmentación del vino.
- Flavonoides o pigmentos amarillos: son fenoles que aumentan a envejecer el vino blanco.
- Fenoles no flavonoides: otro tipo de fenol que influye en la coloración del vino.
- Proantocianinas: es otro tipo de fenol, otorga las propiedades beneficiosas del vino a la salud humana.
- Intensidad del color: sin importar si el vino es blanco o tinto, hace referencia valores de los porcentajes de absorbancia (Noriega & Casp, 2001), su rango de valores es de 1.3 a 13.0 .
- Matiz del color del vino o tonalidad: se mide tomando en cuenta la diferencia de dos porcentajes de absorbancias (Noriega & Casp, 2001).
- OD280/OD315: tiene valores de 1.27 a 4.0 y representa la concentración de los vinos diluidos.

- Prolina: es un aminoácido que forma las proteínas de los seres vivos, los valores están entre 278 y 1680.

Los tipos de vinos son:

- Vino de mesa: El Vino de Mesa es justamente un tipo de vino que no posee aún una calificación de las uvas y viñedos donde se produce, en parte por tratarse de mezclas de diversas regiones clasificadas y porque la etiqueta que debería reflejar su categoría no indica en realidad su cosecha.
- Vino de crianza: aquellos vinos con un envejecimiento total mínimo de 24 meses, de los cuales al menos 6 deben ser en barrica.
- Vino de reserva: los vinos tintos el período total de envejecimiento debe ser de al menos 36 meses, con un mínimo de 12 meses de permanencia en barrica.

Previo a la creación del modelo, se hace un análisis descriptivo de los datos, haciendo diagramas de cajas, para cada una de las variables y un gráfico de puntos e histogramas, para visualizar las relaciones entre las variables, la distribución de probabilidad de éstas y posibles correlaciones.

Se encuentra el grupo de variables regresoras para el modelo, utilizando el método de Backward y aplicando el método de mínimos cuadrados, se estiman los parámetros del modelo de la Ecuación 1. Se hace un Análisis de Varianza para determinar las variables que son estadísticamente significativas para el modelo, y se omiten las que no lo son. Luego de tener el modelo adecuado, se aplican las pruebas de Levene, Durbin-Watson y Durbin-Watson a los residuales, para la verificación de los supuestos del modelo. Para la validación del modelo, se hace una predicción de los 17 valores correspondientes a la partición no usada para la estimación de los parámetros, y se observaran las diferencias.

Se realiza una clasificación estadística de los vinos, usando clusterización por k-medias, y se hace una descripción de los grupos formados. Se observarán las diferencias entre los grupos y la similitud que tienen con la clasificación creada por el proceso de fermentación.

Resultados

En las Ilustración 1 se muestran los diagramas de cajas de las características de los vinos, en la cual se aprecia que en la variable Ceniza hay dos observaciones atípicas, así como en la variable Proantocianinas. Las variables Tonalidad, Color y Magnesio tienen un dato atípico superior; la variable prolina, debido a su escala, tiene un rango de valores más amplio y con más dispersión.

Para visualizar la relación entre las variables, se utiliza las gráficas de correlaciones y de puntos; en la Ilustración 2 se muestra la gráfica de correlaciones entre las variables, en la cual los tonos azules muestran una correlación positiva y los tonos rojos una correlación negativa. Se aprecia que las variables Prolina y Color tienen correlación fuerte y positiva con la variable Alcohol, así como las variables Fenoles y Flavonoides.

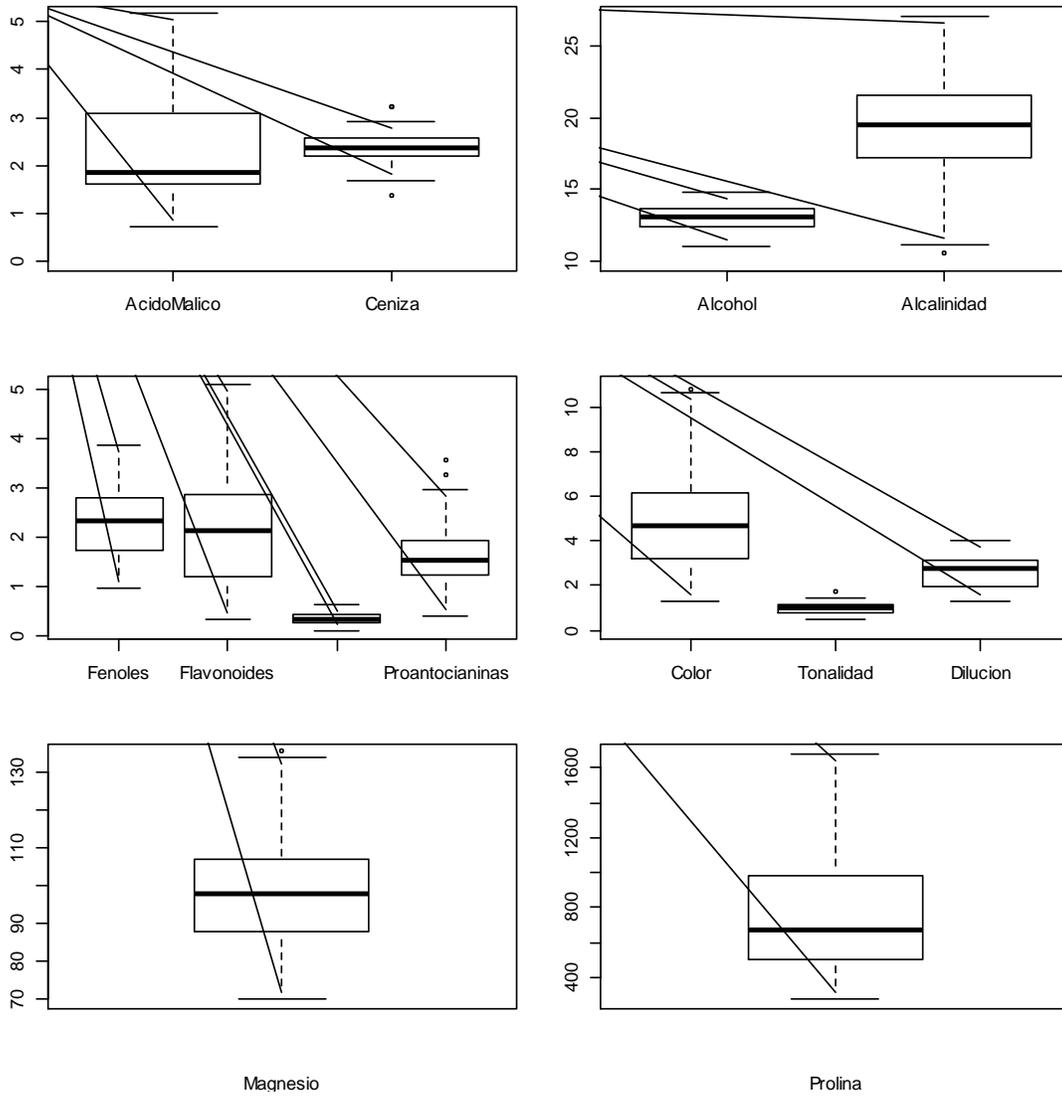


Ilustración 17: Diagrama de Cajas de las características de los Vinos

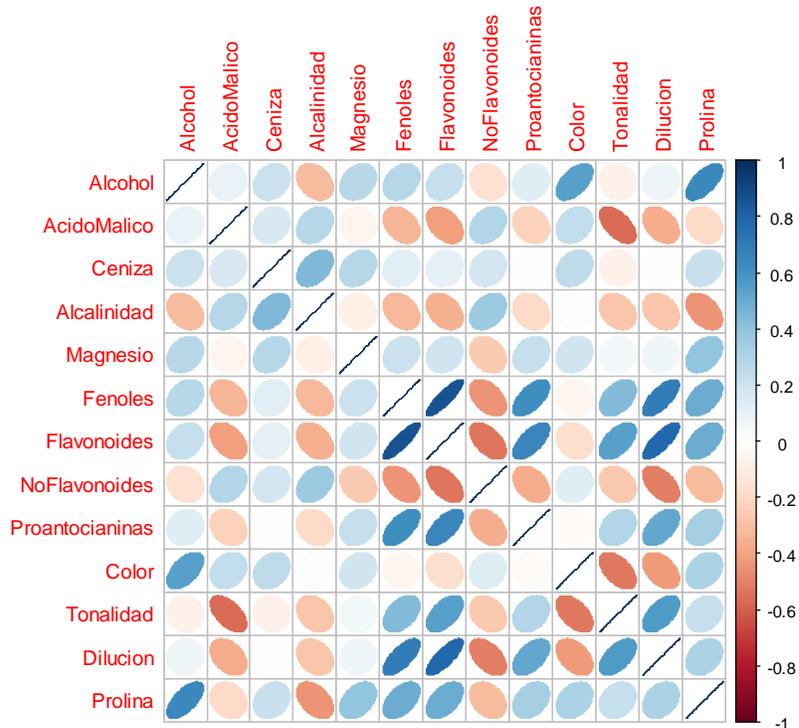


Ilustración 18: Diagrama de correlaciones

Como sí existe correlación en las variables, se crea un modelo con todas las variables, en el cual la variable de respuesta es el color, ya que es la variable de interés en esta investigación; se elige el grupo de variables regresoras, por el método de Backward y considerando el Criterio Cp de Mallow. En la Ilustración 3 se muestra el gráfico de los conjuntos de variables regresoras y el Cp de cada correspondiente a cada modelo. Según el criterio de Mallow, se elige el grupo de variables que tenga el Cp más bajo, en este caso el mejor grupo está conformado por las variables: Alcohol, AcidoMalico, Ceniza, Fenoles, Tonalidad, Dilución y Prolina.

Usando el método de Mínimos Cuadrados para estimar los parámetros, el modelo queda de la siguiente forma:

$$Color = -4.73 + 1.034Alcohol + -0.21AcidoMalico + 0.87Ceniza + 0.74Fenoles + -4.25Tonalidad + -1.48Dilucion + 0.0013Prolina + \varepsilon \quad (3)$$

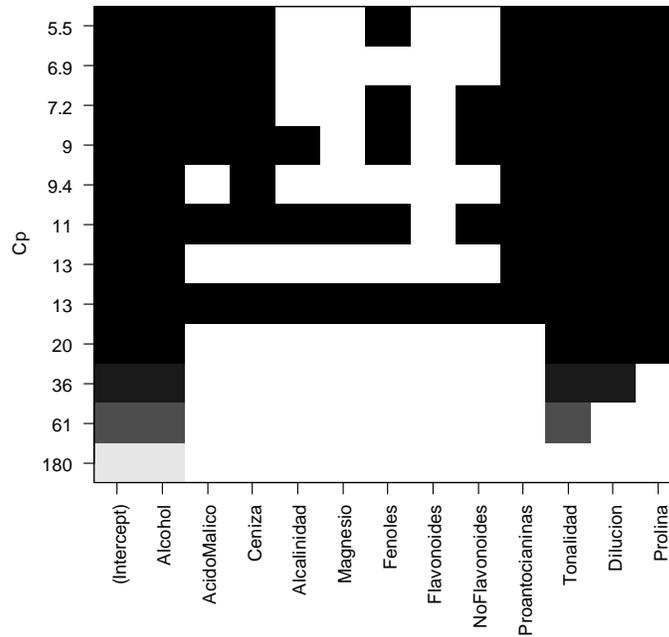


Ilustración 19: Gráfico de conjuntos de variables regresoras.

Se hace un análisis de varianza del modelo, para determinar si las variables son significativas para éste. Los resultados se presentan en la Tabla 1, indicando que las variables Alcohol, AcidoMalico, Ceniza, Tonalidad, Dilucion y Prolina, son significativos, por lo que estos son los que integraran el modelo.

Tabla 1: Análisis de varianza del modelo.

Analysis of Variance Table					
Response: Color					
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Alcohol	1	0.160630	0.160630	1.889.865	< 2.2e-16 ***
AcidoMalico	1	0.003986	0.003986	46.897	0.031893 *
Ceniza	1	0.008877	0.008877	104.438	0.001507 **
Fenoles	1	0.002037	0.002037	23.969	0.123645
Tonalidad	1	0.059385	0.059385	698.684	3.614e-14 ***
Dilucion	1	0.033292	0.033292	391.686	3.725e-09 ***
Prolina	1	0.011585	0.011585	136.305	0.000309 ***
Residuals	153	0.130043	0.000850		

El modelo resultante con la transformación de la variable Color, se muestra en la ecuación 4:

$$\begin{aligned}
 \text{Color} = & \\
 & -4.73 + 1.002\text{Alcohol} - 0.29\text{AcidoMalico} + 0.92\text{Ceniza} - 3.94\text{Tonalidad} + \\
 & -0.88\text{Dilucion} + 0.0017\text{Prolina} + \varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

En la verificación de los supuestos, los residuales del modelo no cumplen con ser normales, pues la prueba de Shapiro-Wilk arroja un p-valor=0.0006. Por lo que se toma una medida

remedial, para esto se hace una transformación de la variable Color; la familia de transformaciones más utilizada para resolver los problemas de falta de normalidad y de homocedasticidad es la familia de Box-Cox, la cual es $Y_i^\lambda = Y_i^\lambda$ (Kutner & et.al, 2005).

Haciendo la transformación, el λ adecuado para normalizar los datos es de 0.1, por lo que la variable Color se eleva a esa potencia. Se verifica que los residuales del nuevo modelo siguen una distribución normal, se muestra el resultado de la prueba Shapiro-Wilks, la cual arroja un p-valor=0.366. La Ilustración 4 muestra el gráfico Q-Q plot, en la que se aprecia la normalidad de los residuos.

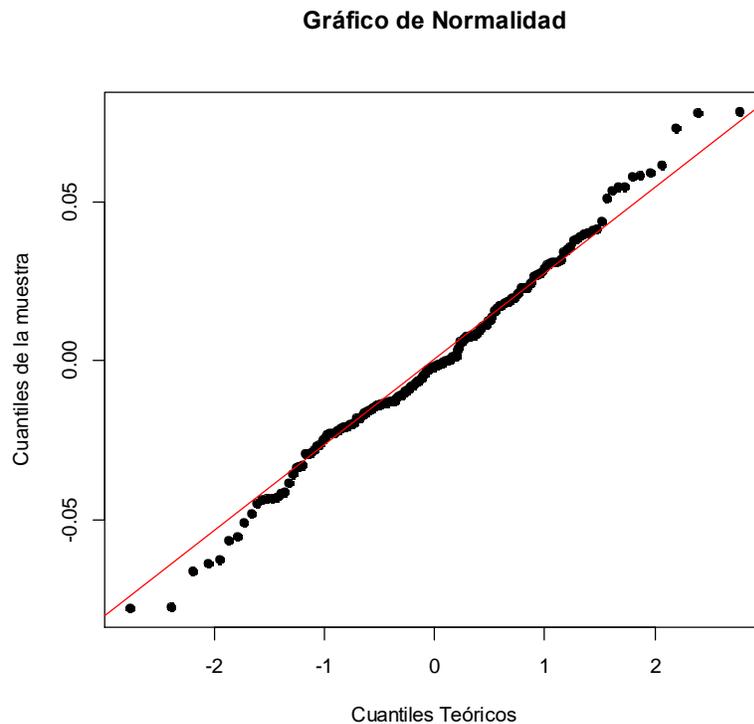


Ilustración 20: Gráfico Q-Q.

La prueba de homocedasticidad de Breusch-Pagan indica que los residuales cumplen con este supuesto, ya que el p-valor es mayor que el nivel de significancia de 0.05.

Para verificar que los términos de error son independientes se aplica la prueba Durbin-Watson, la cual arroja un p-valor de 0.04, si se toma un nivel de significancia de 0.01 se concluye que los datos son independientes.

Con los supuestos verificados, el modelo resultante se muestra en la ecuación (5), el cual tiene un $R^2=0.6113$, lo que indica que el modelo explica un 61.13% de la variabilidad de los datos.

$$\text{Color}^{0.1} = 0.87 + 0.026\text{Alcohol} - 0.0059\text{AcidoMalico} + 0.023\text{Ceniza} - 0.085\text{Tonalidad} - 0.02\text{Dilucion} + (4.76e - 05)\text{Prolina} + \varepsilon$$

(5)

La gráfica de los valores esperados del modelo contra los valores observados, mostrada en la Ilustración 5, muestra que los puntos se ubican cerca de una línea, que es lo que se desea. En el gráfico de los valores esperados contra los residuales de la Ilustración 5, se aprecia que los residuales son valores cercanos a 0, sin embargo, se aprecia una figura con forma de parábola, lo que sugiere construir un modelo con términos de interacción entre las variables y/o con términos cuadráticos.

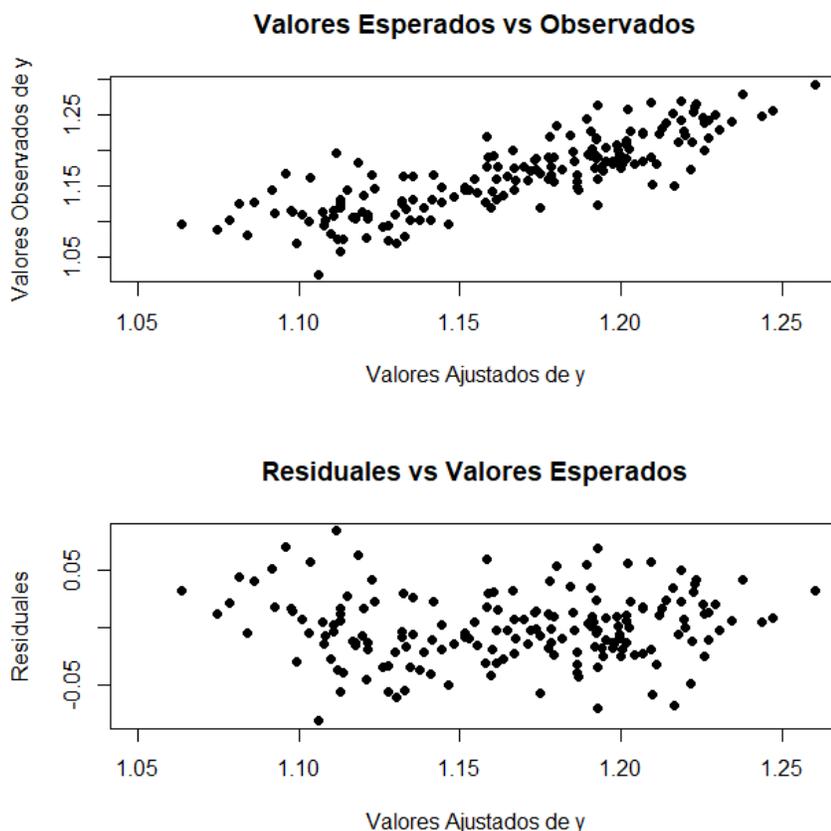


Ilustración 21: Gráfico de los valores ajustados.

Se hace la validación del modelo con los 17 elementos que no se contemplaron para la estimación de los parámetros, la Tabla 2 contiene los valores ajustados y los respectivos intervalos de confianza, así como los valores observados y las diferencias entre éstos. Debido a que algunos valores observados están muy distantes a los ajustados, se tiene una suma de las diferencias de 22.63, podría ser porque el modelo solo explica el 61% de la variabilidad.

Tabla 2: Valores ajustados del modelo .

	Ajustado	Lim. Inferior	Lim. Superior	Observado	Diferencias
162	6.18	5.65	6.74	5.88	-0.30
163	4.95	4.64	5.27	5.58	0.63

164	6.22	5.81	6.65	5.28	-0.94
165	7.45	6.84	8.09	9.58	2.13
166	6.12	5.51	6.78	6.62	0.50
167	6.69	6.13	7.29	10.68	3.99
168	5.82	5.43	6.24	10.26	4.44
169	7.75	7.16	8.39	8.66	0.91
	Ajustado	Lim. Inferior	Lim. Superior	Observado	Diferencias
170	6.96	6.28	7.71	8.50	1.54
171	4.94	4.56	5.34	5.50	0.56
172	6.30	5.76	6.88	9.90	3.60
173	9.10	8.21	10.07	9.70	0.60
174	7.26	6.43	8.19	7.70	0.44
175	7.29	6.74	7.88	7.30	0.01
176	7.47	6.77	8.22	10.20	2.73
177	7.87	7.22	8.57	9.30	1.43
178	8.85	7.91	9.88	9.20	0.35

Análisis de Clusterización

Para establecer una agrupación de los vinos de acuerdo a sus características químicas, se lleva a cabo una clusterización, para esto, se crea un mapa de calor para las distancias estadísticas de las observaciones, tomando la distancia euclidiana entre cada par de éstas. Debido a que la escala de las mediciones es distinta en cada una de las características, se hace una estandarización de éstas para hacer una comparación que no sea afectada por la escala de las variables. En el mapa de calor, mostrado en la Ilustración 5, se observan las distancias entre las observaciones, los tonos rojos representan cercanía y los tonos claros indican mayor distancia. Se pueden identificar tres grupos que tienen distancias más pequeñas, por lo que se opta por que el número de grupos k sea 3.

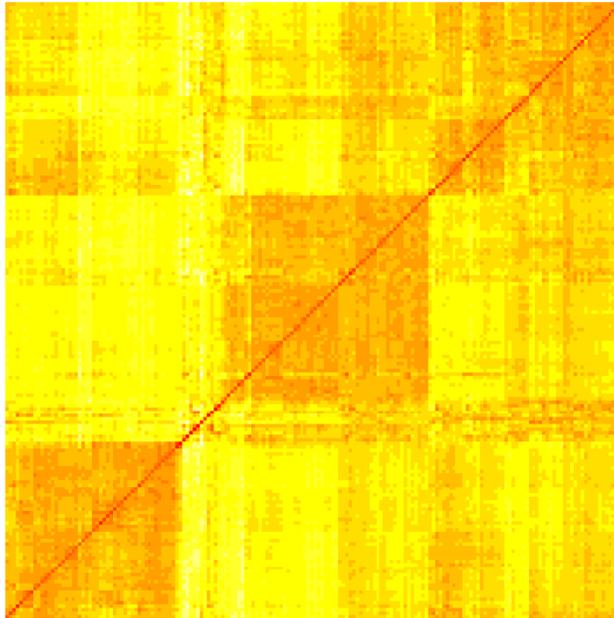


Ilustración 22: Mapa de Calor de las distancias entre vinos

Se toma un número $k=3$ de grupos para hacer la clusterización, tomando las distancias euclidianas y el método de k -medias se obtienen los grupos. Se puede apreciar la agrupación de los vinos en una representación de dos dimensiones, mostrada en la Ilustración 6, se observa que se puede distinguir entre un clúster y otro, de forma que es adecuada la agrupación.

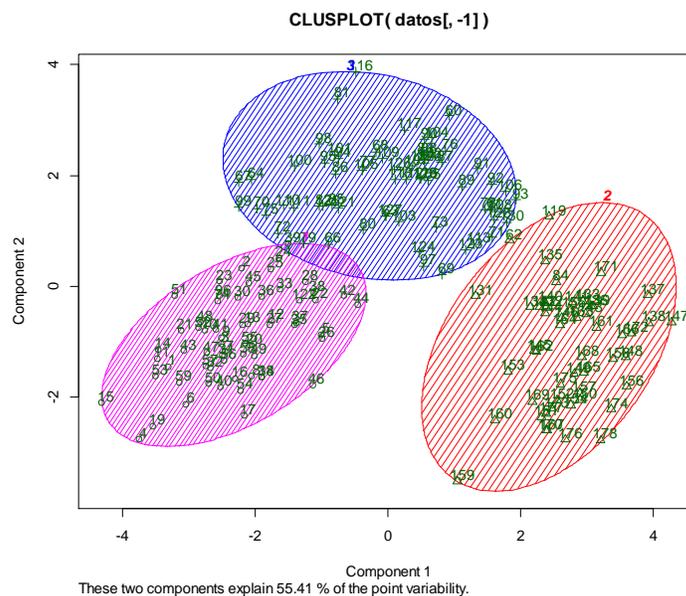


Ilustración 6: Agrupación por clústeres.

En la Ilustración 7, se muestra la gráfica de puntos de las variables que tienen más correlación, en los cuales el color de los puntos está de acuerdo con la agrupación por clúster; esta agrupación coincide en mayoría con la clasificación por tipo de vino.

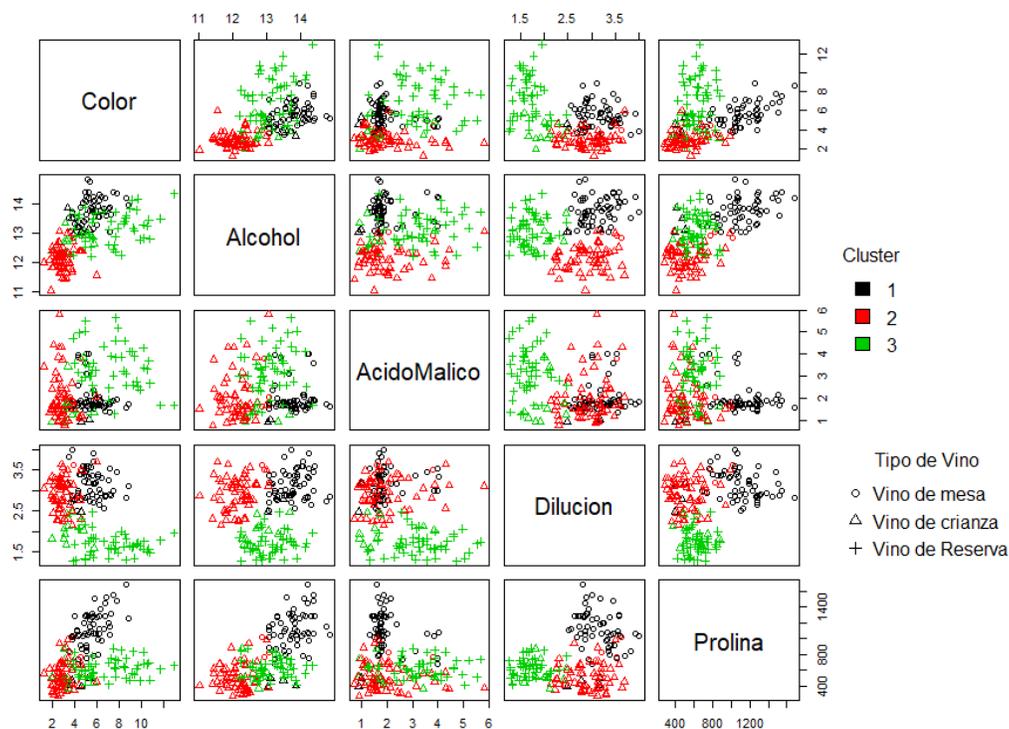


Ilustración 23: Gráfico de puntos, agrupados por Clusterización

Como se observa en la Ilustración 7, el clúster 1 coincide con el vino de mesa, el clúster 2 con el vino de crianza y el clúster 3 con el vino de reserva. Los promedios de cada característica de los vinos para cada clúster, se muestran en la Tabla 2. El promedio de grado de alcohol es menor para el clúster 2, el promedio de ácido málico es bastante superior en el clúster 3; el promedio de alcalinidad de las cenizas es menor en el clúster 1, así como un promedio de Magnesio superior en éste. Se observa una diferencia en el promedio de prolina para el clúster 1.

Tabla 10: Promedios de las características de los vinos.

	cluster 1	cluster 2	cluster 3
	Promedios		
Alcohol	13,63	12,23	13,08
AcidoMalico	1,95	19,22	3,28
Ceniza	2,44	2,23	2,42
Alcalinidad	17,49	20,16	21,25
Magnesio	108,26	90,31	99,64
Fenoles	2,82	2,27	1,67
Flavonoides	0,30	0,21	0,82
NoFlavonoides	0,29	0,37	0,44
Proantocianinas	1,95	1,57	1,17
Color	1,18	1,11	1,21
Tonalidad	1,07	1,06	0,70

Dilucion	3,15	2,80	1,73
Prolina	1069,61	495,53	624,85

Conclusiones

El color del vino tiene una relación con diversas características de éste, como la tonalidad, grado de alcohol, la cantidad de ceniza o residuos orgánicos, la tonalidad y la dilución. Se logró ajustar un modelo de regresión lineal para determinar el color, tomando en cuenta las características que se relacionan con éste. El modelo permite tener una perspectiva inicial, desde un punto de vista del color, sin embargo, el modelo solo explica el 61% de la variabilidad, resulta útil, pero no lo suficiente para el autor.

Los procesos de vinificación producen vinos que tienen una diferencia estadística entre ellos, esto se vio reflejado en la clusterización realizada, salvo algunos que tienen características estadísticas similares a otro proceso, pero son muy pocos. Se determinó una asociación entre las variables que permitió hacer ésta distinción y crear agrupación estadística de los vinos, usando el método de clusterización por k-medias, resultando tres clústeres.

En investigaciones futuras se planea ajustar un modelo, en el que se incluyan más variables de regresión como la variedad de las uvas, el tiempo de fermentación y otros tipos de vino, para que el modelo explique ms porcentaje de la variabilidad.

Referencias

- De La Cruz-De Aquino, M. A., Martínez-Peniche, R. A., Becerril-Román, A. E., Del, M., & Chávaro-Ortiz, S. (2012). *Caracterización física y química de vinos tintos producidos en Querétaro. Fitotec. Mex* (Vol. 35).
- Jackson, R. S. (2008). *Wine Science: Principles and Applications, Third Edition*.
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). *Applied multivariate statistical analysis. Applied Multivariate Statistical Analysis*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17229-8>
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., Li, W., McGraw-Hill, wa, Burr Ridge, B., ... New York San Francisco St LoUIS Bangkok Bogota Caracas Kuala Lumpur Lisbon London Madnd MexIco CIty Milan Montreal New Deihl Santiago Seoul Smgapore Sydney TaIpeI Toronto, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models Fifth Edition t:a Irwin*. Retrieved from www.mhhe.com
- Noriega, M. J. * ;, & Casp, A. (2001). *Características cromáticas de vinos tintos jóvenes de D. O. Navarra*.
- UCI Machine learning repository: wine data set. (n.d.). Retrieved December 16, 2018, from <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Wine>

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 8

COMPARACIÓN DEL EFECTO EMBRIAGANTE EN 3 SABORES DE VINO DE FRUTAS

Eybette Mercado Favela. Asesor: Dra. Diana Barraza Barraza

eybette_mercado@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas UJED

Estudiante de 8vo semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Palabras Clave: Nivel de embriagamiento, Comparación de tratamientos, Medidas repetidas.

Se estudió el proceso de embriagamiento en las personas mediante la metodología del diseño de experimentos y se eligió como técnica principal un diseño de medidas repetidas. Para obtener datos para este experimento se realizaron tres pruebas distintas, las variables de respuesta que se utilizaron fueron las calificaciones que los individuos obtuvieron a lo largo de las pruebas, y después, se hace un análisis estadístico de los datos. El objetivo de la investigación es saber si el sabor del vino influye en el efecto embriagante que produce éste sobre los individuos. Se realizó un experimento factorial 3x2 con 2 réplicas, usando como factor principal el tipo de vino y como factor bloque el género del individuo. En las pruebas estadísticas se utilizó un valor $\alpha = 0.05$.

Introducción

Investigadores de diferentes campos llevan a cabo experimentos, generalmente para descubrir algo acerca de un proceso o sistema particular. El diseño de experimentos es una herramienta de alto impacto en el progreso de la industria. Mediante estas técnicas podemos conocer los procesos de una manera más profunda, y este conocimiento nos permite, a su vez, hacer mejoras en la calidad y bajar los costos de producción (se traduce en obtener un mayor ingreso económico, producir más y mejor con lo menos posible). Previendo la forma de reducir al máximo la variabilidad de los procesos. Estudiando los factores que son considerados como de más alta influencia sobre el proceso. Este diseño nos permitirá saber si el sabor del vino influye en el efecto embriagante que produce sobre los individuos. Para este experimento tomaremos en cuenta un factor de bloque, el cual es el género. Este factor se estudia porque en principio se piensa que tiene un efecto sobre la variable de respuesta.

Marco Teórico

Antecedentes

- Las bebidas alcohólicas contienen diferentes cantidades de alcohol.
- La cerveza tiene aproximadamente 5% de alcohol, aunque algunas cervezas tienen más.
- El vino generalmente tiene de 12% a 15% de alcohol.
- El licor fuerte tiene aproximadamente 45% de alcohol.

Diferencias relacionadas al género

Al aconsejar a la población en general sobre el consumo moderado de alcohol, deben tenerse en cuenta las diferencias en el metabolismo del alcohol relacionadas con el género. El acuerdo general es que el consumo moderado de alcohol debe ser menos de 30 g de alcohol/día (dos bebidas) y 15 g de alcohol/día (una bebida) para los hombres y mujeres, respectivamente. Estas diferencias se han resaltado en varios ensayos clínicos y meta-análisis en que fueron observados mejores efectos proteccionistas en hombres que en las mujeres (Taylor, Irving, Baliunas, Roerecke, Patra, Mohapatra, 2009). Un estudio observó una asociación negativa entre el consumo de alcohol y concentración de LDL en mujeres jóvenes, pero con una asociación positiva en los hombres de mayor edad (Whitfield, Heath, Madden, Pergadia, Montgomery, Martin, 2013). Igualmente, los efectos del alcohol a diferentes edades son desiguales, como lo visto en el control de la LDL.

Diseños con medidas repetidas.

Los experimentos con medidas repetidas se pueden ver como una generalización de las pruebas pareadas, en el sentido de que en ellos se realizan varias mediciones de la variable de respuesta sobre las mismas unidades experimentales bajo condiciones cambiantes. Las condiciones cambiantes pueden ser diferentes tratamientos o distintas evaluaciones a lo largo del tiempo. Al utilizar los mismos sujetos o unidades experimentales no sólo se logra economizar en muestra, sino que se elimina la variación que se tendría si las mediciones se hicieran sobre sujetos diferentes. Cuando las medidas repetidas son a lo largo del factor tiempo, que es un caso muy frecuente, también se conocen como “datos longitudinales” [...]

Una manera de evitar la dependencia de las medidas repetidas es tratar de reducir las a estadísticos que resuman adecuadamente el comportamiento de aquellas. Esto se puede lograr, por ejemplo, ajustando un modelo lineal al vector de medidas repetidas de cada sujeto y utilizar los coeficientes estimados como nuevas variables a las cuales aplicar las técnicas usuales como el ANOVA. (Gutiérrez y de la Vara, páginas 424-425)

En los experimentos que involucran la administración de algún fármaco a lo largo de periodos de tiempo se obtienen medidas dependientes. Para el caso del alcohol es completamente análogo. Como a medida que más se embriaga una persona, esta pierde sus capacidades de equilibrio, es razonable intentar modelar este efecto mediante un modelo lineal.

Planteamiento del problema

Se busca estudiar el efecto embriagante de distintos tipos de vinos y hacer comparaciones entre ellos para ver si es que existe una diferencia significativa. En un principio, cada sabor de vino contiene el mismo porcentaje de alcohol, pero se cree que el proceso de elaboración y la cantidad de azúcar que tiene cada uno pueden influir sobre su efecto embriagante.

Justificación

La buena interpretación de este estudio experimental nos brindará información de utilidad, si se comprueba la hipótesis de que el género tiene efecto embriagante, sugeriría a las personas que venden alcohol que deben enfocar su público hacia el género que tiene una resistencia mayor a los efectos embriagantes, esto con el fin de que las personas consuman más alcohol.

Metodología

Se realizó un experimento factorial 3x2 con 2 réplicas, usando como factor principal el tipo de vino y como factor bloque el género del individuo. Las variables de respuesta que se utilizaron fueron las calificaciones que los individuos obtuvieron a lo largo de las pruebas.

Una corrida experimental consistía en que cada participante realizara las tres pruebas (vaso de agua, dicción y Nystagmus). Se realizaron cuatro corridas experimentales y cada una tomó alrededor de 20 minutos. Se utilizaron tres tipos de vino, uno de granada (GR), uno de membrillo (AM) y uno de perón (PE), cuatro sujetos por cada vino, con dos de cada género (H y M). Cada prueba consistía en lo siguiente: en la prueba del vaso de agua, los participantes recorrieron una línea en el suelo, marcada con cinta canela, mientras sostenían un vaso lleno de agua con plato, con una calificación del 1 al 10. En la prueba de dicción, se les pedía a los participantes que leyeran un fragmento de una obra literaria, la cual cambiaba cuando la prueba se volvía a realizar, y cuya medición fue dada por dos alumnas de la Facultad de Psicología y Terapia de la Comunicación, con una calificación del 1 al 5. Para la prueba de Nystagmus, a los participantes se les pedía que siguieran un lápiz o pluma con la vista, sin mover la cabeza, con una calificación del 1 al 8. En la prueba del vaso con agua y de dicción, dos personas tomaron las mediciones y, en la prueba de Nystagmus una persona realizó la medición.

El material requirió alrededor de 30ml de cada vino para la primer y segunda prueba, mientras que la última prueba usó 60ml, los cuales se sirvieron en vasos desechables. Las mediciones del líquido se tomaron con una tasa medidora. En total, se usaron 160ml de cada tipo de vino, quince vasos desechables, cinco personas para la medición de las pruebas y doce sujetos de prueba. El costo del material fue de \$230 pesos.

Debido a que las mediciones que se realizaron a través del tiempo sobre el mismo individuo son pareadas, se procedió a trabajar con los datos para poder realizar un análisis univariado. Como era de esperarse que a medida que las personas se ponen más briagas sus reflejos disminuyan, se ajustó un modelo lineal para cada tipo de prueba, pues los coeficientes de este pueden resumir adecuadamente el comportamiento de las variables de respuesta y evitar la dependencia entre las mediciones. (Gutiérrez y de La Vara, pág. 425)

De esta manera el análisis se redujo a trabajar únicamente con 2 variables de respuesta para cada tipo de prueba, que son las ordenadas a la abscisa y las pendientes de los respectivos modelos lineales ajustados.

Como se obtuvieron valores adecuados (véase la sección de resultados) de los estadísticos que describen los modelos lineales ajustados a cada individuo en cada prueba, se procedió a un análisis de varianza univariado (ANOVA). Para efectuar el análisis de datos se usó el software estadístico R-studio junto a las librerías car y ggplot.

El modelo estadístico que se usó para cada tipo de prueba y para cada variable de respuesta es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij}.$$

Donde Y_{ij} es la medición obtenida en la prueba que corresponde al tratamiento i y al bloque j , μ es la media global, τ_i es el vino i , β_j es el efecto debido al género j y $\tau\beta_{ij}$ la interacción entre el tipo de vino i y género j . Las hipótesis a probar son las siguientes:

- H_0 : Ninguno de los vinos tiene efecto sobre la variable de respuesta de los individuos. ($\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$)
- H_1 : Alguno de los vinos tiene efecto sobre la variable de respuesta de los individuos. ($\tau_i \neq 0$ para algún i)
- H_0 : Ninguno de los géneros tiene efecto sobre la variable de respuesta de los individuos. ($\beta_1 = \beta_2 = 0$)
- H_1 : Alguno de los géneros tiene efecto sobre la variable de respuesta de los individuos. ($\beta_j \neq 0$ para algún j)
- H_0 : Ninguna de las interacciones tiene efecto sobre la variable de respuesta de los individuos ($(\tau\beta)_{ij} = 0$, para cualquier i y cualquier j)
- H_1 : Alguna de las interacciones tiene efecto sobre la variable de respuesta de los individuos ($(\tau\beta)_{ij} \neq 0$ para algún i y algún j)

Desarrollo del Experimento

El experimento se llevó a cabo en el salón de octavo semestre. A cada sujeto de prueba se le asignó un número al azar, el cual se usó para llamarlo a cada estación de cada prueba.

Las corridas experimentales se realizaron de la siguiente manera:

1. Corrida experimental de control (esto es, se realizaron sin que los individuos hubieran ingerido alcohol).
2. Corrida experimental con 30ml (Después de haber ingerido 30ml de determinado sabor de vino).
3. Corrida experimental con 60ml (Después de haber ingerido 30ml más, 60ml en total).
4. Corrida experimental con 120ml (Después de haber ingerido 30ml más, realizar actividad física y consumir otros 30ml adicionales, 120ml en total).

Resultados

Debido a la dependencia que existe entre las variables que se obtienen entre cada ronda de ingesta de alcohol, se procedió a realizar un análisis de varianza (ANOVA) univariado usando como variables de respuesta las pendientes (B1) y ordenadas a la abscisa (B0) de los correspondientes modelos lineales que se ajustan a los datos registrados a través del tiempo.

En la tabla 1 se muestran los resultados del modelo ajustado que se obtuvieron para las variables de respuesta en la prueba del vaso rebosante. Se pueden apreciar valores elevados de r-cuadrada y pendientes negativas para todas las pruebas.

Tabla 1 Resultados del modelo ajustado para la prueba del vaso rebosante

Grupo	Individuo	B0	B1	R2	Género
1	P1	8.90	-0.85	0.9796610	H
1	P2	10.15	-0.85	0.9796610	H
1	P3	9.53	-0.47	0.9460385	M
1	P4	9.92	-0.33	0.9594714	M
2	G1	9.53	-0.47	0.9460385	H
2	G2	9.07	-0.33	0.9594714	H

2	G3	9.85	-1.15	0.9887850	M
2	G4	9.98	-0.52	0.9797101	M
3	M1	9.53	-0.47	0.9460385	H
3	M2	9.35	-0.65	0.9657143	H
3	M3	9.42	-0.33	0.9594714	M
3	M4	8.94	-0.41	0.9688761	M

En la figura 1 se muestra la gráfica de perfiles para los tipos de vino, usando como respuesta la calificación en la prueba del vaso rebosante. Cada línea representa la calificación de un individuo en la prueba del vaso rebosante a lo largo del tiempo En la figura 2 se tiene la gráfica de perfiles, sólo que agrupando usando el género, cada línea representa la calificación de un individuo en la prueba del vaso rebosante a lo largo del tiempo

Figura 1 Gráfica de perfiles para el tipo de vino.

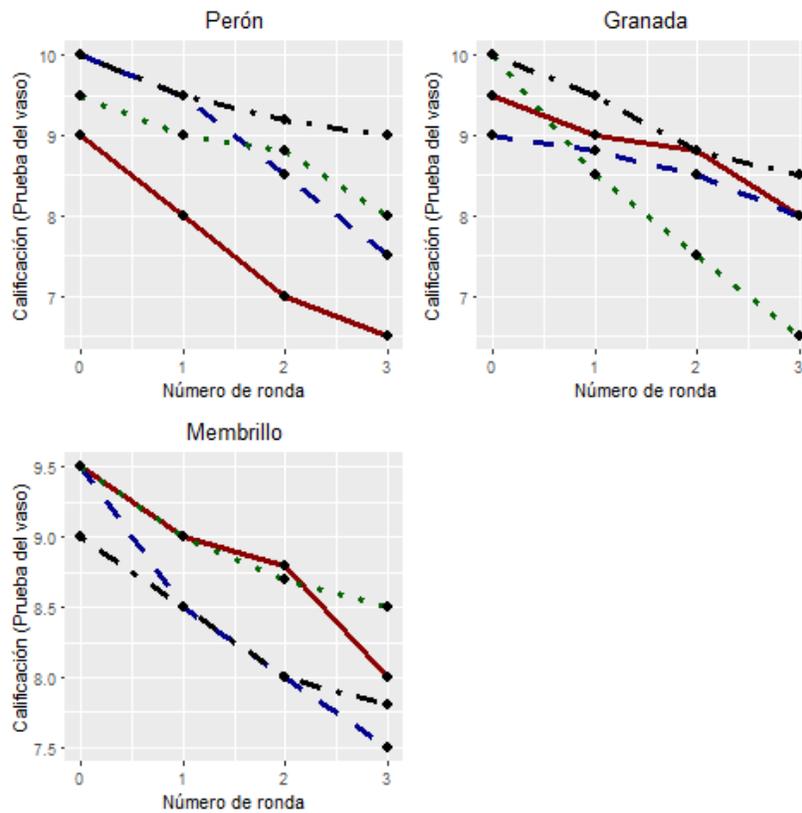
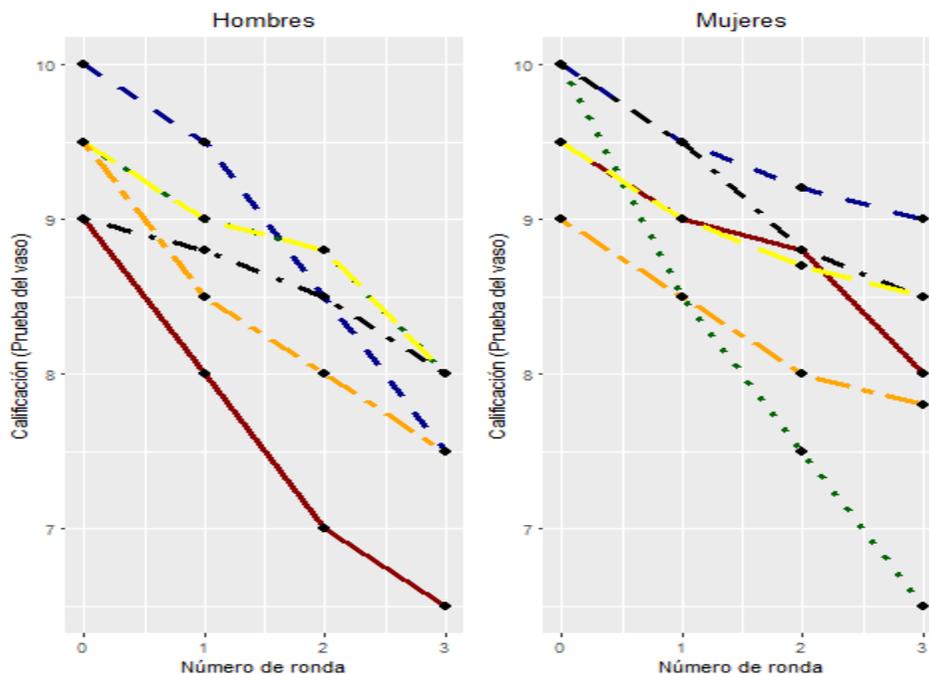


Figura 2. Gráfica de perfiles para el género.



En las figuras anteriores es posible apreciar que no hay diferencia significativa entre los grupos, ya sea agrupando por tipo de vino (figura 1) o bien por género (figura 2). Esto se puede contrastar viendo los valores de las tablas ANOVA simultáneas del diseño por factoriales completos (tabla 2). Que los valores p correspondientes a la ordenada a la abscisa (tabla 2) sean no significativos se traduce en que en la prueba de control, los grupos tienen en promedio la misma calificación.

Tabla 2. Tabla Anova para la prueba del vaso

Ordenada a la abscisa.

Variación	GL	SCT	SCM	Valor F	p-value
Vino	2	0.2507	0.1254	0.682	0.541
Género	1	0.1027	0.1027	0.559	0.483
Vino:Género	2	0.3831	0.1916	1.042	0.409
Residuales	6	1.1029	0.1838		
Pendiente					
Vino	2	0.0652	0.03261	0.824	0.4829
Género	1	0.0140	0.01401	0.354	0.5736
Vino:Género	2	0.4138	0.20691	5.228	0.485
Residuales	6	0.2374	0.03957		

Para la pendiente, vemos que ni el tipo de vino ni el género son significativos. Tampoco es significativo el efecto de la interacción.

A continuación se presenta la tabla 3, la cual muestra los valores de la pendiente y ordenada a la abscisa del modelo lineal ajustado a las variables de respuesta de la prueba de Nystagmus. También podemos apreciar valores relativamente altos de la r-cuadrada, así como pendientes negativas en todos los casos, lo cual es congruente con el hecho de que a mayor embriaguez más se van disminuyendo los reflejos.

Tabla 4. Resultados del modelo ajustado para la prueba de Nystagmus

Grupo	Individuo	Género	Bo	B1	R2
1	P1	H	8.05	-0.7	0.9800000
1	P2	H	8.25	-1.0	0.9523810
1	P3	M	7.70	-1.3	0.9657143
1	P4	M	7.70	-0.8	0.9142857
2	G1	H	7.80	-0.7	0.8909091
2	G2	H	7.60	-0.9	0.8526316
2	G3	M	7.50	-1.0	0.8333333
2	G4	M	7.90	-0.6	0.9000000
3	M1	H	7.60	-0.9	0.8526316
3	M2	H	8.10	-0.9	0.8526316
3	M3	M	7.80	-0.7	0.8909091
3	M4	M	7.60	-0.9	0.8526316

En la figura 3 se tiene la gráfica de perfiles para la prueba de Nystagmus, agrupándose a través del tipo de vino, cada línea representa la calificación de un individuo en la prueba de Nystagmus a lo largo del tiempo. Se puede apreciar una gran similitud entre la rapidez con que se van perdiendo los reflejos. En la figura 4, donde cada línea representa la calificación de un individuo en la prueba de Nystagmus a lo largo del tiempo, la agrupación es usando el género, y tampoco se puede evidenciar ninguna señal de que exista algún efecto significativo.

Figura 3. Gráfica de perfiles para el tipo de vino

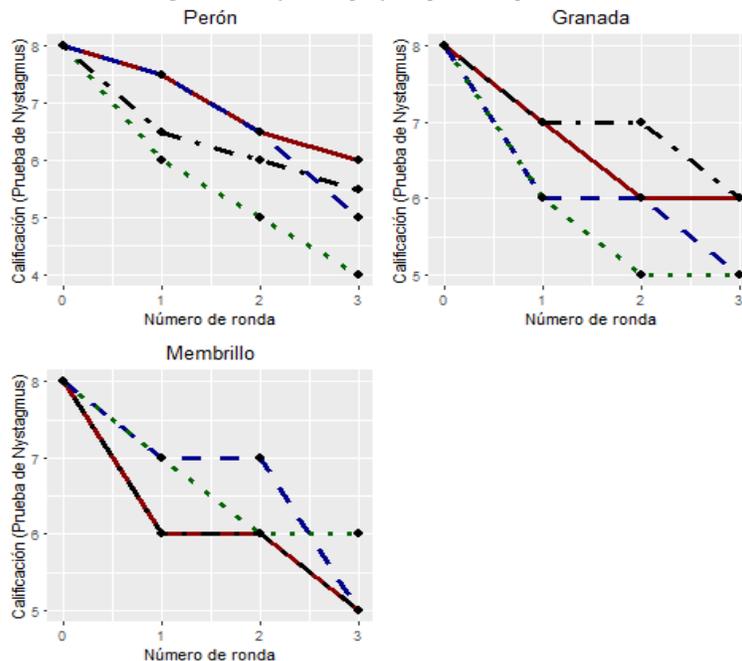
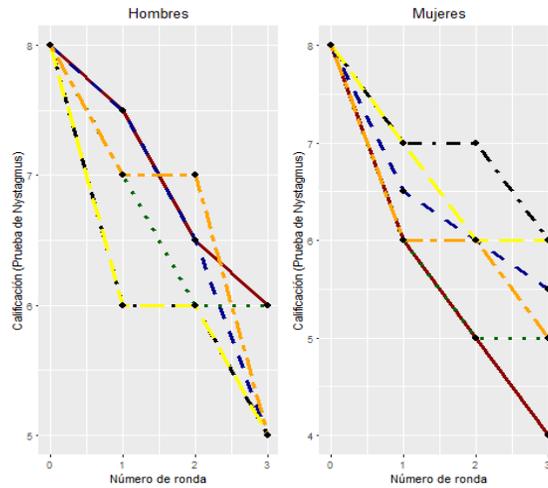


Figura 4 Gráfica de perfiles para el género.



5

Los resultados mostrados en las figuras anteriores se pueden contrastar con la tabla simultánea del ANOVA del experimento (tabla 4). Ningún p-value resultó significativo, por lo cual hay evidencia para afirmar que ni el vino ni el género tienen efecto sobre la calificación que obtienen los individuos en la prueba de Nystagmus a lo largo del tiempo.

Tabla 4. Tabla ANOVA de la prueba de Nystagmus

Ordenada a la abscisa					
Variación	GL	SCT	SCM	Valor F	p-value
Vino	2	0.105	0.05250	1.189	0.367
Género	1	0.120	0.12000	2.717	0.150
Vino:Género	2	0.105	0.05250	1.189	0.367
Residuales	6	0.265	0.04417		
Pendiente					
Variación	GL	SCT	SCM	Valor F	p-value
Vino	2	0.04667	0.02333	0.483	0.639
Género	1	0.00333	0.00333	0.069	0.802
Vino:Género	2	0.04667	0.02333	0.483	0.639
Residuales	6	0.29000	0.04833		

A continuación en la tabla 5 se presentan los valores obtenidos de los coeficientes de los modelos lineales ajustados a la prueba de dicción.

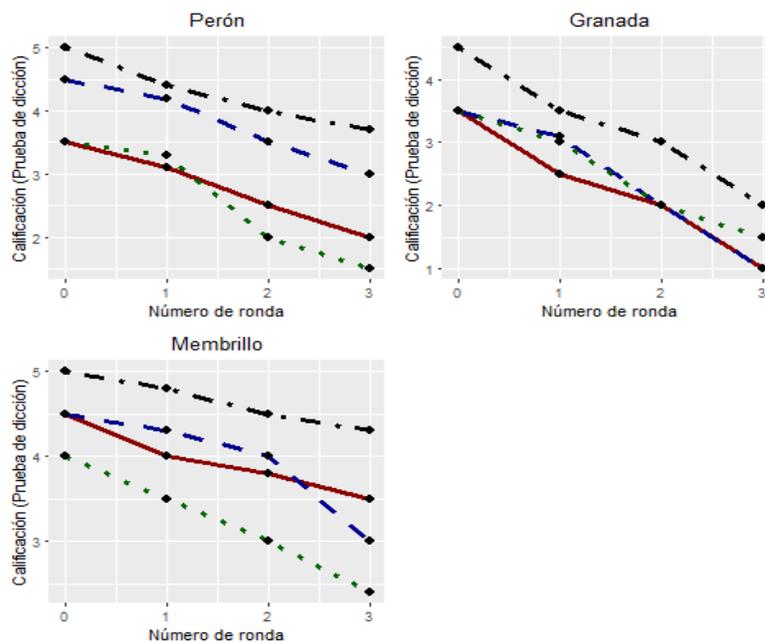
Tabla 5. Resultados del modelo ajustado para la prueba de dicción

Grupo	Individuo	B0	B1	r2	Género
1	P1	3.5 4	-0.51	0.994646 3	H
1	P2	4.5 8	-0.52	0.979710 1	H
1	P3	3.6 7	-0.73	0.929206 6	M
1	P4	4.9 2	-0.43	0.975725 6	M
2	G1	3.4 5	-0.80	0.984615 4	H
2	G2	3.6	-0.86	0.968062	H

		9		8	
2	G3	3.5	-0.70	0.980000	M
		5		0	
2	G4	4.4	-0.80	0.984615	M
		5		4	
3	M1	4.4	-0.32	0.966037	H
		3		7	
3	M2	4.6	-0.48	0.866165	H
		7		4	
3	M3	4.0	-0.53	0.997868	M
		2		6	
3	M4	5.0	-0.24	0.993103	M
		1		4	

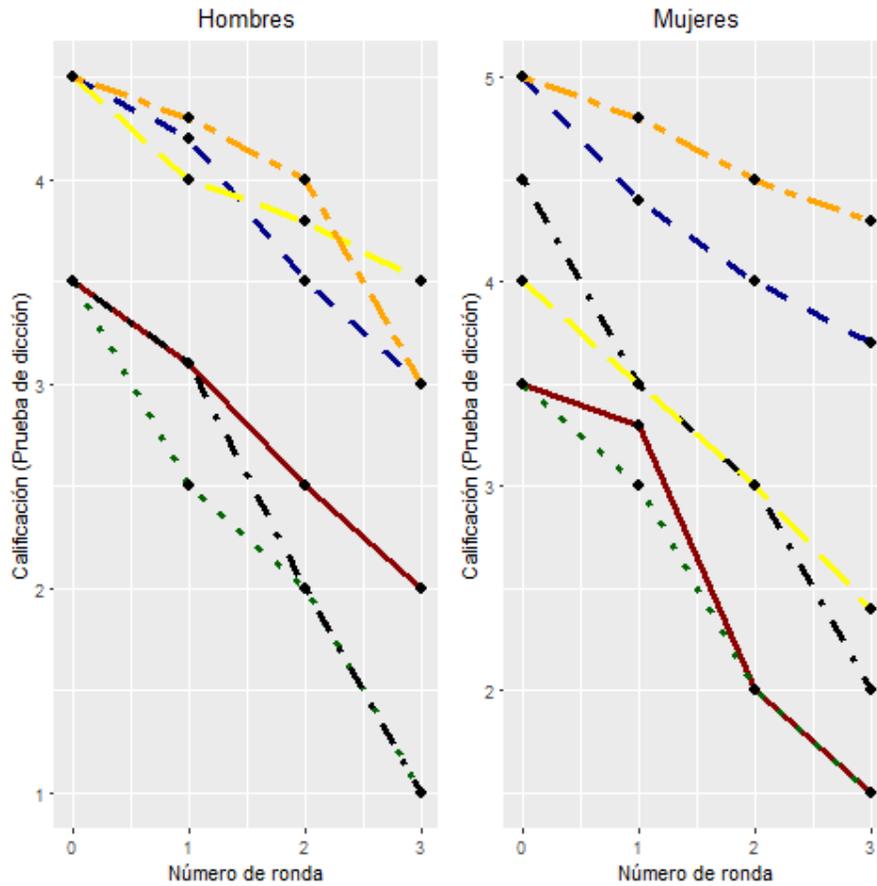
A continuación en la figura 5 se presentan las gráficas de perfiles que se obtuvieron para la prueba de dicción, agrupando a través del tipo de vino. Se puede apreciar una similitud entre los grupos correspondientes al vino de membrillo y el de granada, mientras que el vino de perón asemeja empeorar más rápido la dicción de los individuos.

Figura 5. Gráfica de perfiles para el tipo de vino.



En la figura 6 se presenta la gráfica de perfiles para la prueba de dicción, ahora utilizando el género como criterio de agrupamiento. No se puede apreciar ninguna diferencia significativa en el efecto que tiene el género sobre la variable de respuesta.

Figura 6. Gráfica de perfiles para el género



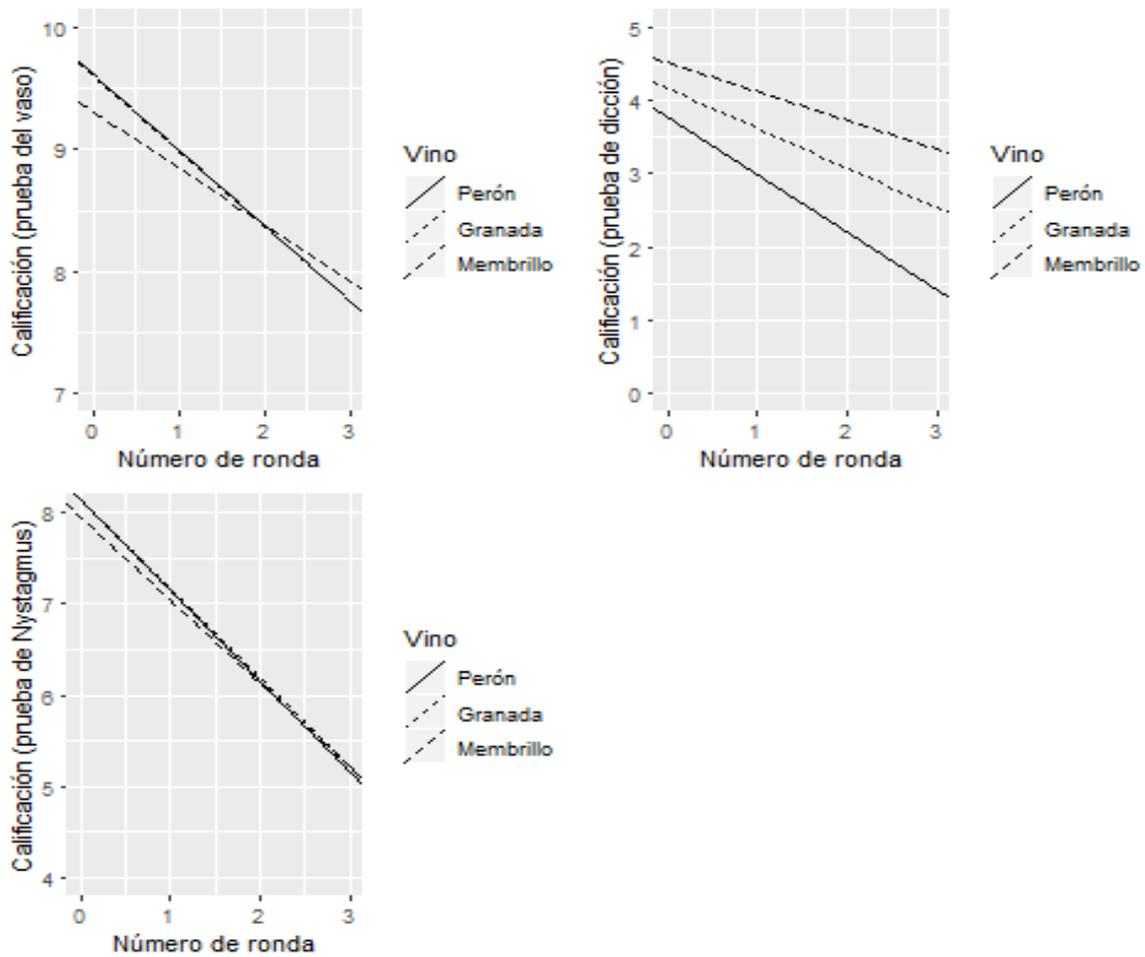
Para hacer contraste a lo ya mencionado, se muestra a continuación en la tabla 5 la tabla ANOVA correspondiente al diseño para la prueba de dicción. De los valores p respectivos, puede apreciarse que efectivamente el tipo de vino tiene efecto significativo ($p = 0.0155$) sobre la calificación de este tipo de prueba.

Tabla 6. Tabla ANOVA de la prueba de dicción

Ordenada a la abscisa	GL	SCT	SCM	Valor F	p-value
Vino	2	1.1185	0.5592	1.475	0.301
Género	1	0.1323	0.1323	0.349	0.576
Vino:Género	2	0.1091	0.0545	0.144	0.869
Residuales	6	2.2747	0.3791		
Pendiente	GL	SCT	SCM	Valor F	p-value
Vino	2	0.3211	0.16056	9.029	0.0155 *
Género	1	0.0003	0.00030	0.017	0.9009
Vino:Género	2	0.0105	0.00527	0.297	0.7536
Residuales	6	0.1067	0.01778		

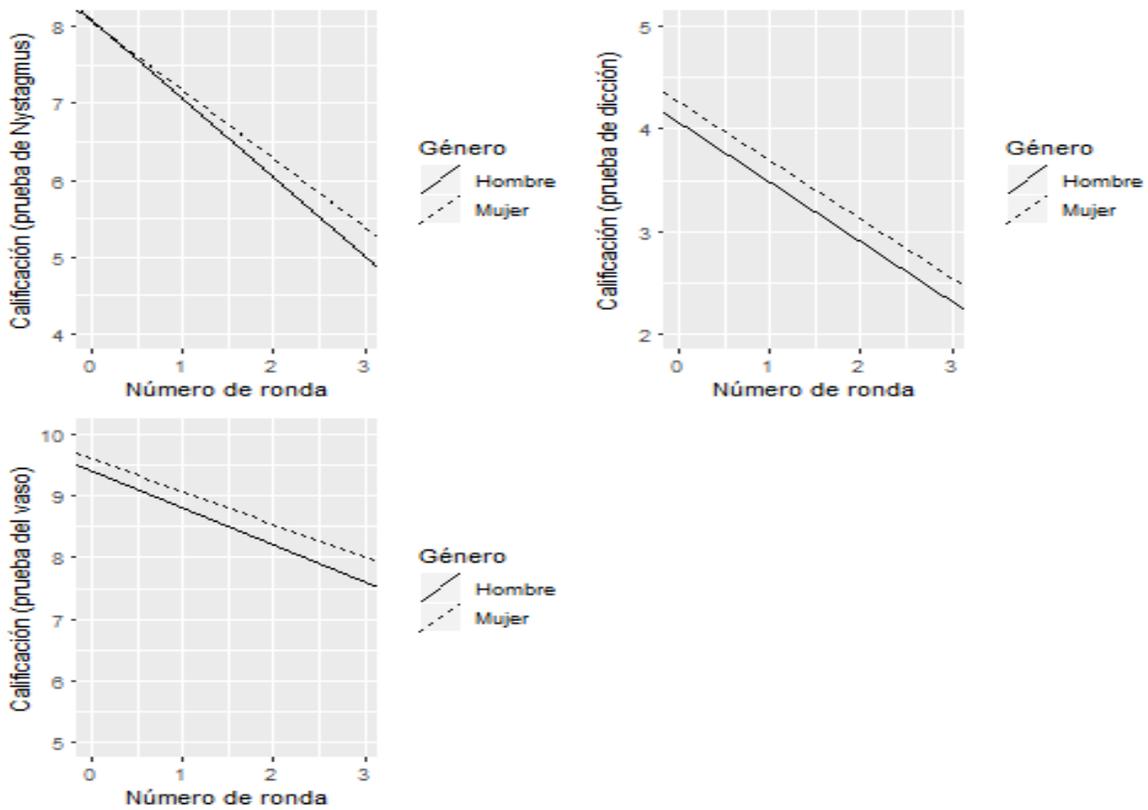
En la figura 7 se muestran las rectas promedios ajustadas para las distintas variables de respuesta cuando esta se agrupa mediante el tipo de vino. Se puede apreciar que en la prueba de dicción hay diferencia significativa entre el vino de perón y el de membrillo.

Figura 7. Gráfica de rectas promedio ajustadas para el tipo de vino



De manera completamente análoga, se muestra en la figura 8 las rectas promedio ajustadas, pero ahora usando como criterio de agrupamiento el género de los individuos. Se puede ver claramente la ausencia de algún efecto significativo.

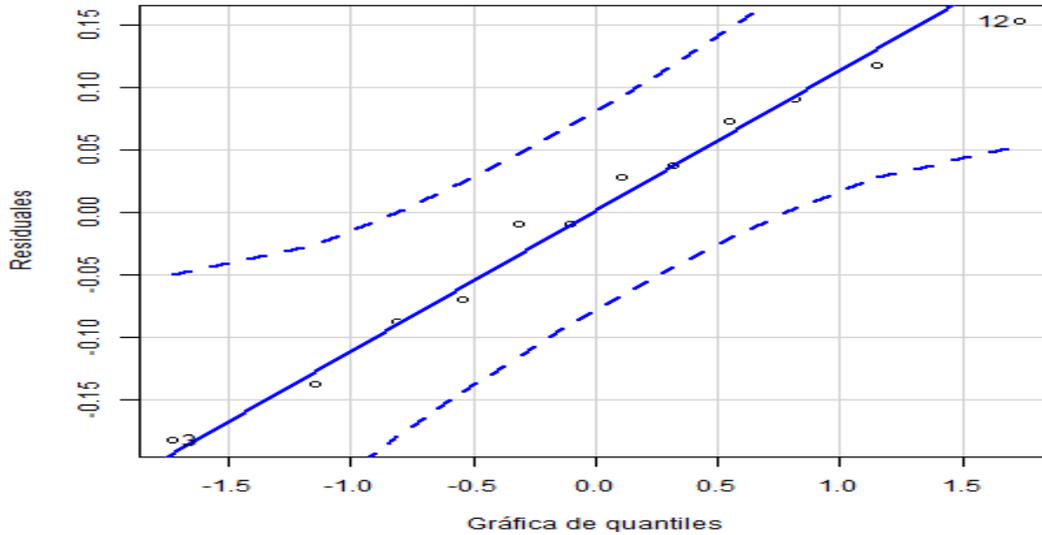
Figura 8. Gráfica de rectas promedio ajustadas para el género



Puesto a que solamente se detectaron diferencias significativas en la prueba de dicción, se procede a un análisis de residuales para ver qué tan confiables son las afirmaciones que se proporcionaron.

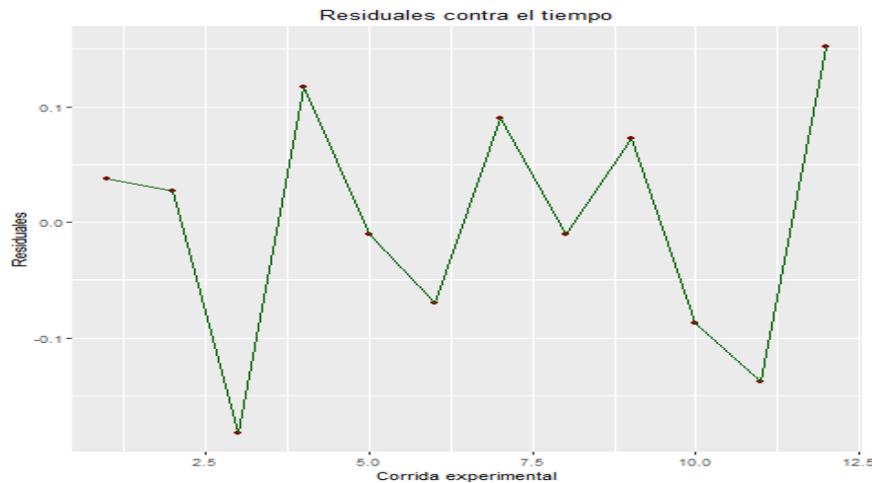
En la figura 9 se presenta una gráfica QQ de los residuales, misma que sugiere la normalidad de estos.

Figura 9. Gráfica para la prueba de normalidad



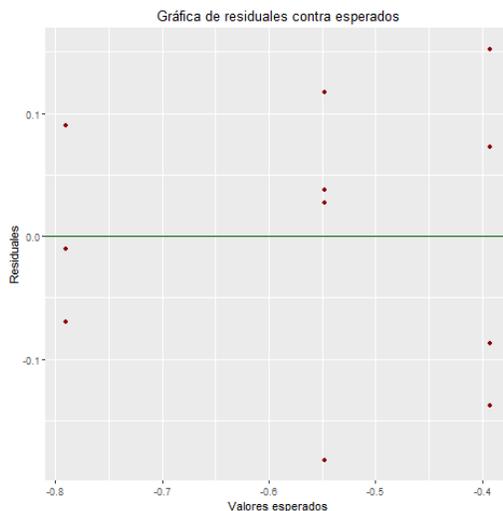
En la figura 10 se puede apreciar la independencia de los residuales a través del tiempo, al no presentarse ningún patrón evidente..

Figura 10. Gráfica para la prueba de independencia



Para la homocedasticidad, en la figura 11 se puede apreciar una distribución aproximadamente simétrica sobre el eje horizontal. Se usó una prueba de Levene para probar la homocedasticidad de los residuales a través del tipo de vino y se obtuvo un valor F de 1.14 con 2 grados de libertad, al cual le corresponde un valor p de 0.36, suficiente para no rechazar la hipótesis de que las varianzas son constantes a través de los grupos.

Figura 11. Gráfica para la prueba de homocedasticidad



De lo mostrado anteriormente, se sigue que los resultados del análisis efectuado son confiables.

Conclusiones

Del análisis de datos se obtienen las siguientes conclusiones:

- Al menos uno de los vinos tuvo efecto sobre la calificación que se obtuvo en la prueba de dicción. Después de una prueba ad-hoc se identificó al de perón como el de mayor efecto frente al amembrillado. No se pudieron contrastar diferencias entre el vino de perón y el de granada.
- Le media de la variable de repuesta es igual en tanto hombres como mujeres.
- En todas las pruebas se tiene que el género no afecta, por lo que no hay contradicciones.
- No existe interacción entre género y tipo de vino al momento de realizar las pruebas.

El experimento se puede mejorar, utilizando más tipos de vinos o distintos tipos de licor, una muestra más grande o más pruebas. Sin embargo, esto puede generar más costos.

Referencias

- Brennan P. (2018). *Assessment of alcohol consumption in adults*. Bethesda, Maryland, U.S: Department of Health and Human Services National Institutes of Health
- Taylor B. (2009). *Alcohol and hypertension: gender differences in dose-response relationships determined through systematic review and meta-analysis*. Toronto, Ontario, Canadá: Center for Addiction and Mental Health.
- Whitfield J. (2013). *Metabolic and biochemical effects of low-to-moderate alcohol consumption*. Canberra, Australia: Queensland Institute of Medical Research.
- Di Minno M. (2011). *Alcohol dosing and the heart: updating clinical evidence*. Sofía, Bulgaria: National Center of Public Health and Analysis.

Gutiérrez Pulido, H., & de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*. Ciudad de México: McGrawHill.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 1

CERCANÍA Y CONTINUIDAD

Jafed Alejandro Martínez Sánchez. Asesor: Dr. Armando Mata Romero
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango.

jafsed@hotmail.com

Topología

INTUICIÓN

Realmente ¿Qué tan cerca o lejos estamos de las cosas?, siendo algo tan subjetivo surge una necesidad inconcebible de medir las distancias entre números, cuerpos y otro tipo de objetos, pero ¿Cómo determinamos que tan cerca estamos de algo? ¿Qué nos gustaría que cumpliera la distancia entre 2 objetos?

Si enumeráramos los puntos serian principal mente que cualquier distancia fuera positiva sin importar dirección u otros factores, la distancia debería ser la misma sea medida de la manera que sea “de ida y de regreso”, la distancia siempre debe ser la más corta entre ambos objetos, así pues obtenemos de una manera matemática.

Definición: Sea X un conjunto. Se dice que $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ define una distancia o un espacio métrico.

(o métrica) en X si se cumplen las propiedades

- $d(x, y) \geq 0$ con igualdad si y sólo si $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdad triangular)

Veamos un ejemplo de cómo se presenta la necesidad de encontrar la distancia entre dos objetos.

Sea X el conjunto de casillas de un tablero de ajedrez que nombraremos con la notación algebraica usada habitualmente por los ajedrecistas, según se muestra en el dibujo. La torre, el caballo, la dama y el rey definen sendas distancias en X que denotaremos por d_t , d_c , d_D y d_R respectivamente. Estas vendrán definidas por el número mínimo de movimientos que debe emplear la pieza seleccionada para trasladarse entre dos casillas dadas.

La torre y la dama son piezas de acción a larga distancia

$$d_t(a1; f8) = d_D(a1; f8) = 2:$$

El caballo bastante ágil al esquivar obstáculos, pero secansa en trayectos largos

$$d_c(a1; f8) = 4:$$

Y el rey es demasiado viejo

$$d_R(a1; f8) = 7:$$

El alfil no define una distancia en X porque sólo puede acceder a la mitad de las casillas ($d_A(a1; a2) = ?$) pero si la define en X_1 =cuadros blancos o en X_2 =cuadros negros. En X_2 se tendría

$$d_A(a; f8) = 2:$$

Aun así, usando algún tipo de distancia o norma este concepto tan básico puede seguir presentada controversia entre diferentes puntos de vista, pues para unos algo cercano a sí mismo tiene distancia mayor a uno, pero para otros algo cercano puede ser algo tan pegado a sí mismo que casi sea el objeto en sí.

Llegando a la pregunta ¿Cómo representamos que algo está “suficientemente cerca”? Esto motivo el desarrollo de la matemática en el sentido de pertenencia, concepto que determinaría de manera formal este hecho.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

En particular nos enfocaremos a la continuidad de funciones, por esto inducimos el concepto de límite de una función, para esto vagamente podríamos dar una definición provisional de límite.

La función f tiende hacia el límite l cerca de “ a ”, si se puede hacer que $f(x)$ este tan cerca como queramos de l haciendo que x este suficientemente cerca de “ a ”, pero siendo distinto de “ a ”

Esto claramente empieza a responder nuestras preguntas, tenemos una noción de “cercanía” ahora, pero siendo ambiciosos esto no resulta suficiente para nosotros después de todos somos matemáticos y tenemos la necesidad de “matematizar” este concepto de límite y cercanía de aquí entonces teniendo una idea podemos formalizar así la definición de límite.

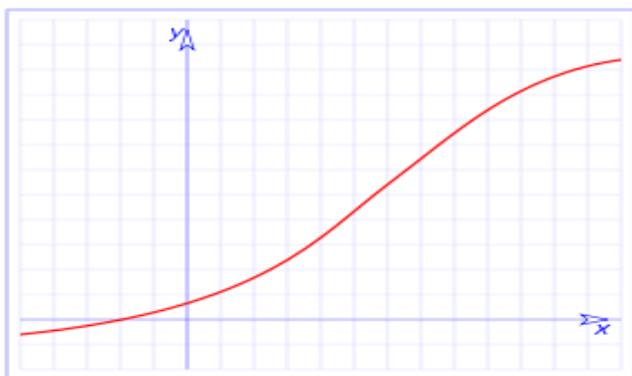
Decimos que una función tiende hacia un límite l en “ a ”, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$

Esto nos permite llegar al tema principal las funciones continuas o funciones bien pegadas.

Decimos que una función es continua si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

1. f es continua en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
2. tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ entonces $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
3. Si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
4. Si la distancia $(x - x_0) < \delta$ entonces la distancia $(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$

Un ejemplo de función continua puede ser:



Pero esto aún no resuelve nuestro problema pues ¿Qué sucede con las funciones en varias variables? Y ¿Qué pasa cuando no podemos usar distancias por medio de segmentos de recta?

Todas estas definiciones anteriores han sido elaboradas cuidadosamente para funciones “sencillas” por lo que debemos de adentrarnos en una matemática más compleja y elaborada que nos permita trabajar con cualquier tipo de funciones siendo esta área los conjuntos y al usar estos no podemos eludir la idea de “topologizar métricamente” la noción de distancia, siendo la manera más fácil recuperando la información de los espacios métricos.

DE LA MÉTRICA A LA TOPOLOGÍA

Retomando el centro del tema podemos utilizar la definición 4) de continuidad podemos elaborar una para los espacios métricos pues ya teniendo una manera de medir distancia no es más que un trabajo de traducción obteniendo el resultado de:

Sean $(x, d_x), (y, d_y)$ espacios métricos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es continua en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

1. si $d_x(x, x_0) < \delta$ entonces $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
2. si $x \in B_x(x_0, \delta)$ entonces $f(x) \in B_y(f(x_0), \varepsilon)$
3. si $f(B_x(x_0, \delta)) \subset B_y(f(x_0), \varepsilon)$

si observamos el inciso 3) vemos que ahora la cercanía depende de pertenencia o no a un conjunto. Claro que este concepto no es cualquiera, en este caso corresponde a bolas abiertas alrededor de puntos bajo un radio definido.

En este sentido hablamos de una manera intuitiva de la vecindad de un punto

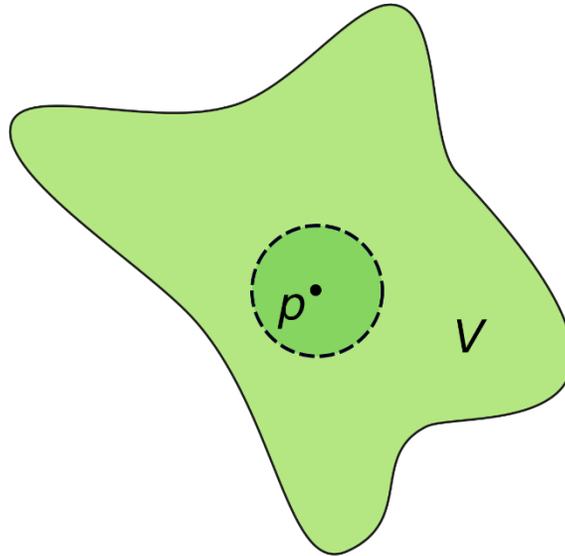


Esto nos permite extender la noción de cercanía a una noción de pertenencia. Es importante tener en cuenta cómo necesitamos tomar a dichos conjuntos los cuales proponemos como:

U un conjunto abierto o mejor dicho una “bola de bolas” tal que $\forall x \in U \exists r > 0$ tal que $B_x(x_0, r) \subseteq U$ y $\bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$

- \emptyset es abierto y X es abierto
- Sean U y V abiertos en X entonces $U \cap V$ es abierta
- Si $\{U_\alpha\}$ es abierto entonces $\bigcup U_\alpha$ es abierto

Surgiendo en este punto la definición de espacios topológicos como colección de subconjuntos o vecindades que miden la cercanía



Se define un espacio topológico como un subconjunto S , conjuntamente con una colección \mathfrak{T} de subconjuntos de S , llamados conjuntos abiertos que verifican los cuatro axiomas siguientes:

1. El conjunto vacío $\emptyset \in \mathfrak{T}$
2. $S \in \mathfrak{T}$
3. La unión de cualquier número de elementos de \mathfrak{T} es también un elemento de \mathfrak{T}
4. La intersección de cualquier número finito de elementos de \mathfrak{T} es también un elemento de \mathfrak{T}

La colección \mathfrak{T} de subconjuntos es una topología en S .

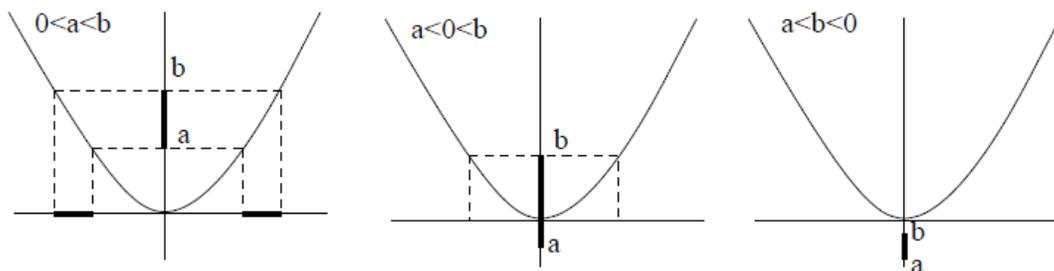
Finalmente, el concepto de pertenencia bien definido al igual que espacio topológico podemos pensar en el concepto de continuidad de funciones pues este ha sido nuestra herramienta principal para saber que las cosas están bien pegadas. En espacios métricos se podía caracterizar diciendo que la imagen inversa de un abierto es un abierto y de este modo nos podíamos liberar de la tiranía de ε y δ . En espacios topológicos generales, como no tenemos una distancia, no podemos ni siquiera enunciar la definición de ε y δ así que solo nos queda una posibilidad.

Definición. Sean $(X; \mathfrak{T}_X)$ e $(Y; \mathfrak{T}_Y)$ espacios topológicos. Dada $f : X \rightarrow Y$ se dice que es continua si para cada $U \in \mathfrak{T}_Y$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X$. Esto es, si la imagen inversa de un abierto es siempre un abierto.

Ejemplo.

Vamos a demostrar la continuidad de $f(x) = x^2$ sin usar ε ni δ . Desde luego que suponemos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y la topología usual.

Según la proposición basta demostrar que $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : a < f(x) < b\}$, con $a < b$, es abierto. Hay tres casos:



1. $f^{-1}((a, b)) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$
2. $f^{-1}((a, b)) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{b})$
3. $f^{-1}((a, b)) = \emptyset$

En cualquier caso $f^{-1}((a, b))$ es abierto.

Es maravillosa la idea de que un concepto tan simple, tan arraigado a nuestra identidad como humanos tenga un trasfondo tan importante sin mencionar toda la utilidad y funciones que le podemos dar a la distancia, muchos la mencionan, pero pocos la comprenden.

BIBLIOGRAFÍA

- Frechet M, Fan K. (2003), Invitation to Combinatorial Topology, USA, Ed. Dover, p. 124.
 Spivak M. (2000), Calculus, España, Ed. Reverté, p. 682.
 McCleary J., A First Course in Topology, USA, AMS, p. 212.
 Courant R., Robbins H. (2002), ¿Qué son las matemáticas? México, Fondo de Cultura Económica, p. 622

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 2

ENCONTRANDO NÚMEROS PRIMOS

Martha Patricia Galindo Solís. Asesora: M.C. Adriana Escobedo Bustamante
 Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas
patriciagaso@hotmail.com
 Álgebra

Los números primos han sido un tema relevante a lo largo de los años, muchos matemáticos dedicaron y dedican tiempo en estudiarlos, estos números gozan de gran popularidad en las matemáticas desde el tiempo de los griegos clásicos. Tanto el estudio de su distribución y como sus propiedades. Los números primos forman una de las partes más bellas y profundas de las matemáticas: la teoría de los números.

Euclides demostró la existencia de infinitos números primos y Eratóstenes ideó un método para identificar los números primos menores que un número natural dado, este método es llamado la criba de Eratóstenes, ver tabla 1. **Tabla 11. Criba de Eratóstenes**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 11. Criba de Eratóstenes

Varios matemáticos han tratado de encontrar algún patrón o fórmula para conocer números primos grandes, ya que estos números tienen una gran variedad de aplicaciones, por ejemplo, en la criptografía al codificar mensajes o cifrarlos, en el cifrado de páginas de internet donde se necesita seguridad al realizar transacciones monetarias o intercambio de información, un ejemplo cercano a la mayoría de nosotros es el manejo de la página web de nuestro banco o las compras electrónicas usando varios de estos algoritmos de, por ejemplo, el cifrado el RSA.

Algunos de los matemáticos que han aportado a este tema tan extenso son:

Pierre de Fermat quien conjeturó que todos los números de la forma $2^{2^n} + 1$ eran primos, a estos números se les conoce como números de Fermat.

En 1859, Riemann enuncia la conjetura que lleva su nombre y es conocida como uno de los problemas del milenio. Consideramos la función $\zeta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1)$$

La Hipótesis de Riemann afirma que todos los ceros de la función ζ tiene parte real igual a un medio, es decir, si $\zeta(z) = 0$ entonces $z = \frac{1}{2} + bi$ con $b \in \mathbb{R}$.

La función ζ es conocida como la función Zeta de Riemann y cumple que:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (2)$$

con P el conjunto de los números primos. La ecuación (2) es consecuencia del teorema fundamental de la aritmética, el cual se enuncia a continuación:

Teorema. *Todo número entero $n > 1$ se puede escribir como producto de potencias de números primos.*

Es decir, existen p_1, p_2, \dots, p_r números primos tales que $n = p_1 p_2 \dots p_r$ con $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$. Esta descomposición es única, es decir, si $n = q_1 q_2 \dots q_s$ con $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_r$ primos, se tiene que $r = s$ y $p_i = q_i$, para todo i .

La ecuación (2) muestra que la función Zeta está íntimamente relacionada con los números primos.

En el año 2018, el matemático Michael Atiyah fue noticia por la presentación de una posible demostración de la hipótesis de Riemann, habían ya transcurrido 160 años desde que el problema fue planteado.

Atiyah afirmó que encontró una prueba muy simple de la hipótesis de Riemann, y que se le ocurrió al analizar los problemas asociados con la constante de la estructura fina y utilizó la función Todd como instrumento. Para revisar la prueba, los matemáticos necesitarán tiempo, pero muchos ya afirman que es incorrecta.

El monje francés Marin Mersenne investigó los números primos de la forma $2^p - 1$, con p primo. En su honor, se los conoce como números de Mersenne.

En este trabajo se desarrolla un método sencillo para la búsqueda de números primos el cual parte de conocer los primeros n primos $2, 3, \dots, p_{n-1}, p_n$.

Para analizar este procedimiento es necesario recordar algunas definiciones y teoremas básicos en teoría de números.

Definición. Un número entero positivo p es primo si $p \neq 1$ y sus únicos divisores positivos son 1 y p .

El estudio de los números primos está enmarcado dentro del álgebra y se conoce como Teoría de números. Uno de los teoremas más importantes relacionado con los primos es el teorema fundamental de la aritmética, que se enunció anteriormente.

Definición. Dos enteros positivos son primos relativos si no tienen divisores en común distintos de la unidad.

Si p es primo entonces p es primo relativo con cualquier entero no múltiplo de p .

A continuación se describe el procedimiento para la obtención de números primos, primero se toma el conjunto de los $n - 1$ primeros primos consecutivos, y se subdivide este conjunto en dos subconjuntos ajenos cualesquiera A y B , ambos distintos del vacío. Supongamos que $A = \{p_1, \dots, p_k\}$ y $B = \{q_1, \dots, q_r\}$. A continuación puntaremos el procedimiento:

- Multiplicaremos todos los elementos del subconjunto A habiendo previamente elevado cada uno de ellos a una potencia arbitraria entera positiva, llamaremos a este producto N .

$$N = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \dots p_k^{z_k} \quad (3)$$

- Apliquemos el procedimiento anterior a los elementos de B , para así obtener otro número que llamaremos M .

$$M = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_k^{s_k} \quad (4)$$

- Finalmente sumaremos o restaremos (opción también arbitraria) los primos relativos N y M pero cuidando que el resultado sea positivo. Llamemos P a este resultado.

Teorema. *El número P obtenido en el procedimiento anterior cumple que, si P es distinto de cero y menor que p_n^2 entonces P es la unidad o es primo.*

Demostración

El número P no es divisible entre ninguno de los $n - 1$ primos $2, 3, \dots, p_{n-1}$, debido a que cada uno de estos está, por construcción, contenido como factor en N o en M pero no en ambos, y si divide a uno de ellos no lo hará con el otro, porque N y M son primos relativos.

Ahora supongamos que P tiene un factor primo p_a mayor que el primo p_{n-1} , este factor es menor que P ; debe de existir otro factor primo p_b que también es factor de P , de lo contrario P sería un número primo.

Por hipótesis $p_a < P$; pero este otro factor p_b no puede ser ninguno de los $n - 1$ primeros primos por razonamiento anterior; luego p_b tiene que ser el primo p_n o alguno mayor que él, lo cual está en contradicción con las restricción impuesta de que $P < p_n^2$. Luego P no contiene ningún factor que no sea sí mismo o la unidad. Entonces hemos demostrado que P es un primo o es la unidad. ■

Por ejemplo, consideremos el conjunto de los primero cuatro primos, es decir 2, 3, 5, 7. Al separarlos en dos conjuntos ajenos no vacíos podemos obtener los siguientes números primos

$$2 \times 3 - 5 = 1$$

$$2 \times 5 - 3 = 7$$

$$2 \times 3 + 5 = 11$$

$$2 \times 3^2 - 5 = 13$$

$$3 \times 5 + 2^2 = 19$$

Como todos los números anteriores menores que 7^2 son distintos de cero y el teorema garantiza que son números primos.

Referencias

Avella D., Mendoza O., Edith C., Souto M.(2014). *Grupos I*. México, Distrito Federal: phapiros.

Peña, J. (Séptima reimpresión 2012). *Álgebra en todas partes*. México, Distrito Federal : Fondo de Cultura Económica .

De la Peña Cesáres, G. (1972). *Sencillo método para obtener números primos*. Recuperado el 15 de febrero del 2019, Revista de divulgación de la Sociedad Matemática Mexicana, Miscelánea matemática: <http://www.miscelaneamatematica.org/index.php?numero=1>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 3

LA LÓGICA EN LAS ÁLGEBRAS BOOLEANAS

Alondra Valdez Hernández. Asesor: Dr. Ricardo Isaac Bello Aguirre

Universidad Juárez del Estado de Durango

Facultad de Ciencias Exactas

alondra.valdez96@outlook.com

Lógica

Sección 1. Introducción y ejemplos

La lógica es en sí nuestro objeto de estudio, es una rama de las matemáticas muy importante en la solución de problemas, más que nada la relacionamos con cuestiones filosóficas mediante el estudio de proposiciones. Nos enfocaremos en las álgebras Booleanas, su definición, axiomas, propiedades, ejemplos como el álgebra de conjuntos y lógica proposicional. Observaremos que la lógica está muy relacionada con el álgebra Booleana ya que en nuestro día a día podemos encontrarnos con sistemas matemáticos abstractos que son dignos de estudiar, y que son usados en aspectos que comúnmente tenemos cerca y sin embargo no notamos lo que hay en ellos, por ejemplo, enfocándonos en la lógica múltiple en conjunto con las álgebras de Boole o álgebras Booleanas, vemos que tienen modelos concretos, como el álgebra de conjuntos, circuitos eléctricos y el álgebra de la lógica. Algunas de sus aplicaciones están en la Sociedad Digital Moderna, todo lo relacionado con computadoras y circuitos digitales. En la programación como en C++, es común reservar espacio en memoria para una variable, para posteriormente realizar una serie de operaciones o toma de decisiones en base a su valor actual. Simplemente desde el pulso de una tecla y el movimiento del ratón hasta la visualización de imágenes y video en alta definición, las matemáticas fundamentales subyacentes siguen al álgebra de Boole.

Comencemos a abordar este tema de manera más formal, comenzando con algunos ejemplos que tienen una estructura similar y que después veremos que son álgebras booleanas.

1.-Álgebra de conjuntos

Enfocándonos en el álgebra de conjuntos decimos que:

Sea X un conjunto no vacío finito, y $P(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos X . Para cualquier par A, B en $P(X)$ hacemos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

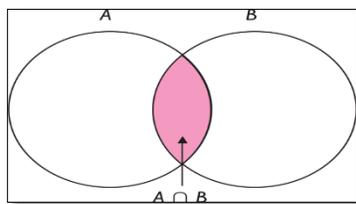


Figura 1: Intersección de A y B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

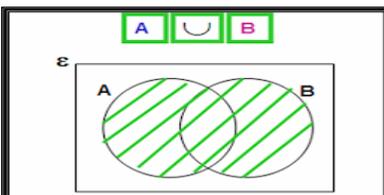


Figura 2: Unión de A y B

$$A' = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

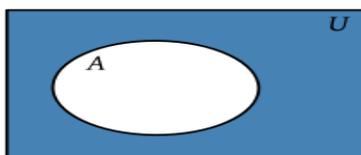


Figura 3: Complemento de A

Las operaciones \cap y \cup son conmutativas, asociativas y distributivas una sobre la otra, en esta ocasión no se demostrarán estas propiedades, pero las enunciamos a continuación;

$$A \cup B = B \cup A \text{ y } A \cap B = B \cap A = B \cap A;$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \text{ y } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C;$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ y } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

Para cualquier A en $P(X)$ tenemos:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap X = A$$

$$A \cup A' = X,$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

Recordando estas propiedades sobre el álgebra de conjuntos, pasaremos a ver el álgebra en funciones traspuestas.

2.-Álgebra de funciones traspuestas

Tenemos que para un entero positivo n , una función del producto Cartesiano de n copias de $\{0,1\}$ a $\{0,1\}$ es llamada una FUNCIÓN TRASPUESTA.

Si f y g son funciones traspuestas en n variables, entonces también lo son las funciones definidas por:

$$(f + g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ y}$$

$$(f * g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Si tenemos alguna función traspuesta f , podemos definir una nueva función traspuesta f' de la siguiente manera:

$$f'(x) = 1 \text{ si } f(x) = 0 \quad \text{y}$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } f(x) = 1$$

En las funciones traspuestas se cumple la asociatividad, conmutatividad y distributividad de la suma y multiplicación. Notamos también las siguientes propiedades de las funciones constantes

$$z = 0 \text{ y } u = 1;$$

$$z + f = f, u * f = f \quad \text{y}$$

$$f + f' = u, f * f' = z$$

Vale la pena hacer notar las similitudes con respecto a las propiedades mencionadas del álgebra de conjuntos

3.-Divisores de 105

Considere el conjunto S de todos los divisores positivos de 105.

$$S = \{1,3,5,7,15,21,35,105\}$$

Para algún par a, b en S , definamos $a \vee b = mcm(a, b)$, el mínimo común múltiplo y $a \wedge b = mcd(a, b)$, el máximo común divisor.

Finalmente para algún a en S , sea $a' = \frac{105}{a}$.

Entonces las operaciones \vee y \wedge son conmutativas, asociativas y distributivas. Para algún a en S , $a \vee 1 = a$, $a \wedge 105 = a$ y $a \vee a' = 105$, $a \wedge 1 = 105$.

Sección 2. Álgebra Booleana

En esta sección usamos la notación del texto [Gallian, 86].

Definición 1.

Un álgebra booleana es un conjunto B con dos operaciones binarias \vee y \wedge y una operación unaria (se lee "complemento") que satisface las siguientes axiomas para todo a, b, c en B .

1.- Conmutatividad

$$a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a;$$

2.- Asociatividad

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c;$$

3.- Distributividad

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

4.- Existencia de cero y unidad; es decir hay elementos 0 y 1 en B , para todos los a en B ,

$$a \vee a' = 1, a \wedge a' = 0;$$

5.- Complementación

$$a \vee a' = 1, a \wedge a' = 0;$$

1.-Propiedades

Sea B un álgebra Booleana y sean a, b elementos de B . Entonces

1.- $a \wedge 0 = 0$

2.- $a \vee 1 = 1$

3.- Leyes de absorción

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a$$

4.- Leyes idempotentes

$$a \wedge a = a, a \vee a = a$$

5.- Si $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$, entonces $b = a'$

6.- Leyes de Morgan

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

7.- Involución

$$(a')' = a$$

8.- El cero y la unidad son elementos únicos.

2.-Álgebra de la lógica

El conjunto de todas las clases de equivalencia de proposiciones forman un álgebra Booleana. Para nuestros objetivos veamos que una proposición es un enunciado declarativo del que se puede decidir si algo es verdadero o falso. Por ejemplo: la proposición “John F. Kennedy fue asesinado” es verdad, mientras la proposición “Franklin D. Roosevelt fue asesinado es falso”.

Las proposiciones pueden combinarse para formar nuevas proposiciones usando las conectivas lógicas como “y” y “o” o sea \wedge y \vee . En general, si A y B son proposiciones escribimos:

$A \wedge B$ denotando la proposición “ A ” y “ B ” ;

$A \vee B$ denotando la proposición “ A o B ”

Definamos $A \wedge B$ verdadera si y solo si A y B son verdaderas y $A \vee B$ es verdadera si y solo si A o B , o ambos son verdaderos.

Si usamos A y B ($A \wedge B$) usando las proposiciones del ejemplo del párrafo anterior tendríamos:

“John F. Kennedy fue asesinado” y “Franklin D. Roosevelt fue asesinado”, lo cual es falso ya que solo “John Kennedy fue asesinado” y no ambos.

Otra operación es llamada el “o exclusivo”, o “disyunción exclusiva”. El exclusivo “o” que conecta dos proposiciones significa que una de las proposiciones es verdadera y una es falsa. Para cualquier proposición A , hay otra proposición que afirma que la proposición A es falsa. En general la proposición A' es verdadera solo cuando la proposición A es falsa y viceversa.

Si A y B son proposiciones formadas combinando las proposiciones $P1$ y $P2$ con los conectores \wedge y \vee decimos que A es equivalente a B , y escribimos $A = B$ si, para cada asignación de verdad o falsedad de las proposiciones $P1$ y $P2$, A es verdadero si y solo si B es verdadero.

Con esta definición de equivalencia, el conjunto de todas las clases de equivalencia de proposiciones es un Álgebra de Boole.

El elemento cero es la clase de equivalencia que contiene a la proposición $P \wedge P'$ donde P es cualquier proposición. A estos elementos se les conoce como *contradicción*. Mientras que el elemento unidad es la clase de equivalencia que contiene $P \vee P'$, la equivalencia a la que se conoce como Tautología.

Podemos decidir mecánicamente si una proposición compuesta combinando otras proposiciones es verdadera o falsa, si sabemos la verdad o falsedad de las proposiciones involucradas, así que:

Denotemos con la letra T las proposiciones que son verdaderas y con la letra

F las proposiciones falsas, entonces usamos las operaciones:

$$F \wedge F = F,$$

$$F \vee F = F,$$

$$F \wedge T = F,$$

$$F \vee T = T,$$

$$T \wedge T = T,$$

$$T \vee T = T.$$

Los axiomas para un álgebra Booleana en el conjunto $\{T, F\}$ nos reduce la expresión del resultado a una T o una F . Podemos ver estos resultados en una tabla de verdad como la siguiente:

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee [(P \vee R) \wedge Q]$	$(P \vee Q') \wedge R'$
F	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	F	F

T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	F

Tabla 1: Tabla de verdad de algunas proposiciones

Teorema 1

$$|B| = 2^n$$

Un álgebra Booleana finita tiene 2^n elementos para algún entero n .

Prueba:

Sea B una álgebra Booleana finita con más de un elemento. Para algún par de elementos a y b en B , definimos

$$a + b = (a \vee b) \wedge (a \wedge b)'$$

notamos que esta operación simétrica con respecto de a y b .

Podemos verificar tediosamente que B es un grupo Abeliano bajo la suma $+$.

Además, tenemos que $a + a = 0$ para todo a , de donde vemos que para todo elemento no cero de B tiene orden 2.

Sabemos que siguiendo el teorema de Lagrange que nos dice; si el grupo G tiene orden n , el orden de todos los subgrupos de H de G es un divisor de n , para lo cual tenemos que el único divisor primo de $|B|$ es 2.

Por lo tanto $|B| = 2^n$ para algún entero positivo n . ■

Aunque parece que hay muchos modelos diversos para las álgebras Booleanas, se puede probar que cada álgebra de Boole finita es isomorfa a un álgebra de conjuntos. Esto es análogo al hecho de que cada grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.

Sección 3. Comentarios finales

El objetivo de abordar este tema es la lógica, se preguntarán por qué hablamos de conjuntos, funciones traspuestas y los ejemplos vistos, lo que sucede es que vimos la lógica en distintas presentaciones que tienen en común su estructura.

En una primera aproximación a un curso de Lógica vemos la lógica clásica proposicional en la que tenemos dos valores de verdad: verdadero y falso, 0 y 1. Y como operaciones mínimo “conjunción” y máximo “disyunción”. Notemos que obtenemos así una álgebra booleana de dos elementos, esto nos puede llevar a pensar que es posible tener como valores de verdad un álgebra booleana con más de dos elementos y en efecto así obtenemos modelos formales para lógicas no clásicas como la intuicionista, para consistentes y multivaluadas.

Referencias:

Gallian.J.A. (1986). *Contemporary Abstract Algebra*. Lexington, Massachusetts: D.C. Heath and Company.

Hernández Hernández, F.(2003). *Teoría de conjuntos. Una introducción*. México, Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana.

McCoy, N.H.(1971). *Introduction to modern algebra*. Boston, Allyn and Bacon, Inc.

Suppes, P, Hill, S.(1981). *Introducción a la lógica matemática*. México, Editorial Reverté Mexicana S.A.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 4

FUTURAMA Y LAS MATEMÁTICAS.

Edgar Hernández Moreno. Asesor: L.M.A. Jesús Eduardo Mata Cano

Facultad de Ciencias Exactas UJED

chegarp27b@gmail.com

Área: Álgebra, teoría de grupos

Sabemos que “Los Simpson” es una de las series más populares de la televisión, donde Homero y su familia nos deleitan con su manera de sobrellevar las distintas situaciones que en esta se presentan. Pero muchos ignoran el hecho de que en ella aparece ocasionalmente contenido matemático escondido entre las escenas de cada capítulo. No es para menos ya que sus guionistas son amantes de esta área de las ciencias. En numerosos capítulos se puede apreciar el contenido que J. Stewart Burns y S. Cohen –entre otros – introducen discretamente.

Un capítulo en el que es notable la interacción de la serie con las matemáticas es “Homer³”, donde Homero viaja a una dimensión desconocida y pasea por una trama cartesiana tridimensional con figuras poliédricas. En este mismo capítulo aparecen algunos mensajes y ecuaciones ocultas en el fondo de la pantalla mientras homero pasea en su nuevo mundo.

Una de las travesuras de los guionistas es el mensaje que se presenta a continuación: 46 72 69 6E 6B 20 72 75 60 65 73 21, un mensaje escrito en números hexadecimales y que al traducirse nos dice “Frink rules!” o “¡Frink manda!”. Frink es inventor que en la serie constantemente contribuye en los avances tecnológicos de Springfield. Otra anomalía presentada en este capítulo es la expresión $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$ que contradice el teorema de Fermat, el cual se puede enunciar como sigue:

Teorema de Fermat. Considere n un entero mayor a dos, entonces no existen enteros x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$ a excepción de las soluciones triviales $x = 0, y = 0, z = 0$.

El ejemplo contradictorio al teorema seguro hizo revolcarse a Fermat en la tumba.

Si se utilizan las calculadoras capaces de hacer cálculos con muchas cifras para resolver este dilema, se puede encontrar que efectivamente, la igualdad se cumple. Sin embargo, hay un factor que influye bastante para obtener este resultado; el redondeo, que los autores utilizaron muy bien para hacer que las cifras parecieran correctas con un rango de error muy pequeño y provocando que el teorema se tambaleara.

En esa misma escena aparece la identidad $e^{i\pi} + 1 = 0$ de Euler, conocida como la ecuación más bonita de las matemáticas.

Como podemos ver, los escritores de esta divertida e interesante serie, son unos genios en esto de las matemáticas, y es que aún no hemos mencionado el doctorado en Harvard con el que cuentan. Los guionistas de Los Simpson, son también autores de la serie Futurama.

En ella el profesor Humbert J. Farnsworth es uno de los personajes que causa más interés, y se caracteriza por sus “travesuras” en el ámbito científico. Uno de los inventos más influyentes del profesor es el colosómetro, que sirve para medir que tan colosal es una persona. Desde el punto de vista matemático, el invento más interesante de Farnsworth es el intercambiador de mentes, que aparece en el capítulo “El prisionero de Benda” (que tiene como productor ejecutivo al matemático Ken Keeler). Este nombre es tomado –como broma- de la novela “El prisionero de Zenda”^{*1}.

El intercambio de mentes comienza cuando el profesor y Amy entran al intercambiador para cumplir el deseo de Farnsworth de sentirse joven nuevamente, esto sin mencionar que Amy se siente ansiosa por vivir la experiencia de comer todo lo que pudiera sin temor a engordar, ya que el esbelto cuerpo del profesor puede aceptar algunos kilos de más sin ningún problema.

Cuando el profesor y Amy se dan cuenta de que el cambio no era lo que esperaban exactamente, vuelven al intercambiador de mentes para regresar a la normalidad, sin embargo, se encuentran con un problema; el intercambiador no aceptaba que dos cuerpos interactúen más de una vez en el proceso del cambio. Por lo tanto, las mentes permanecerían en cuerpos ajenos. Pero al profesor se le ocurre que esto se puede remediar introduciendo más cuerpos, y aprovechándose de la situación, Bender intercambia su cuerpo con el de Amy para llevar a cabo el malévolo plan de robar la corona real del Emperador Nikolai. Farnsworth se da cuenta de que este cambio no es suficiente para la resolución del problema. Al final de esto, la mente del profesor queda en el cuerpo de Bender, la mente de Amy queda en el cuerpo del profesor y la mente de Bender queda en el cuerpo de Amy.

Después de un largo trabajo para encontrar la solución, el profesor se resigna diciendo que no quiere regresar a su viejo y decrepito cuerpo, así que ingresa a un circo para hacer útil su invencible cuerpo de robot.

Se llevan diversos intercambios de mente conforme la trama del capítulo avanza. En la siguiente lista se muestran todos los cambios en orden. Hay que tomar en cuenta que los nombres que aparecen son los de los cuerpos implicados y no necesariamente de las mentes:

- 1) Profesor Farnsworth --- Amy
- 2) Amy --- Bender
- 3) Profesor Farnsworth --- Leela
- 4) Amy --- Cubo de Fregar
- 5) Fry – Zoidberg
- 6) Leela --- Hermes
- 7) Cubo de fregar --- Emperador Nikolai

Ken Keeler introdujo intencionalmente el defecto del intercambiador de mentes para hacer más interesante el problema. Y después de indagar sobre la solución, encuentra que es

suficiente agregar solamente 2 personas para desenmarañar cualquier caos causado por cualquier cantidad de cambios, esto siempre y cuando se utilicen a las personas de la manera correcta.

**1 El rey Rodolfo de Ruritania (un país ficticio) es drogado y secuestrado por su hermano. Aprovechándose de la situación el primo inglés de Rodolfo explota su parecido con el rey y adopta su identidad. Es por este cambio de identidades que el capítulo de la serie Futurama tiene dicho nombre, ya que se presentan casos similares.*

A continuación se representan los cambios con un diagrama de Seeley, tomado del libro “Los Simpson y las Matemáticas” donde cada círculo representa la mente de una persona y cada rectángulo representa un cuerpo, los cuales están etiquetados con la inicial del nombre a quienes pertenece. Los cambios realizados se enumeran en la parte superior del diagrama y se indica con una línea punteada el “cruce” entre las líneas de los cuerpos involucrados.

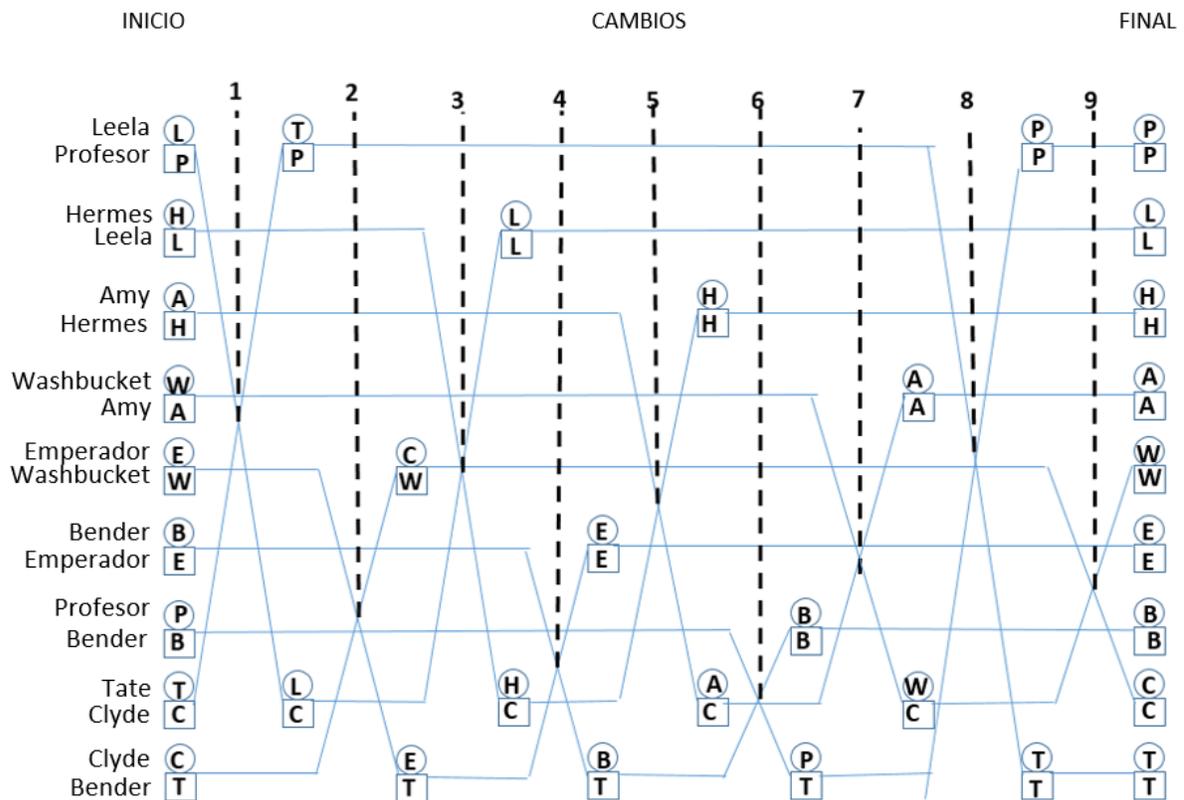


Figura 24. Diagrama de Seeley (Singh, 2010)

Lo primero que hace Keeler para el desenredo es colocar a las personas involucradas en grupos, los cuales son fáciles de identificar, y en este caso son 2 grupos, el primero conformado por Fry y Zoidberg, y sabemos que es un grupo porque para cada mente hay un cuerpo correspondiente. El otro grupo está conformado por los personajes restantes que utilizaron el intercambiador de mentes, porque para cada mente hay un cuerpo que corresponde a tal. A esta prueba se le ha llamado “Teorema de Futurama”, que incluso es demostrado en el episodio por los jugadores de baloncesto “Bubblegum” Tate y “Sweet”

Clyde en una pizarra color verde, donde explican un poco de lo anteriormente mencionado. Para llevar a cabo el desenredo, Keeler utiliza una serie de permutaciones dentro de cada grupo entre los cuerpos y las mentes para conseguir al final llegar a la normalidad de las personas involucradas. Las personas que sirvieron como voluntarios para resolver el problema fueron los mismos que demostraron que esto era posible: Clyde y Tate.

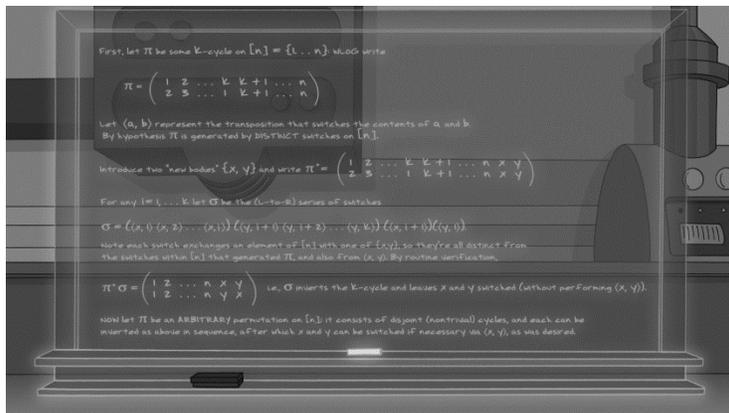


Figura 2. Demostración Teorema de Keeler (Futurama, 2010)

A continuación se muestran los procesos de desenredo de los dos grupos formados por las personas que utilizaron el intercambiador de mentes. En el diagrama de Seeley de la página anterior observamos como quedaron asignados los cuerpos (mente de Zoidberg en cuerpo de Fry, mente de Fry en el cuerpo de Zoidberg, mente de Leela en el cuerpo del profesor, mente de Hermes en el cuerpo de Leela, mente de Amy en el cuerpo de Hermes, mente de cubeta de fregar en el cuerpo de Amy, mente de Emperador Nikolai en el cuerpo de cubeta de fregar, mente de Bender en cuerpo del Emperador, mente de profesor en el cuerpo de Bender)

Este es el desenredo del grupo formado por los cuerpos y mentes de Fry y Zoidberg, donde se introduce a Tate y Clyde:

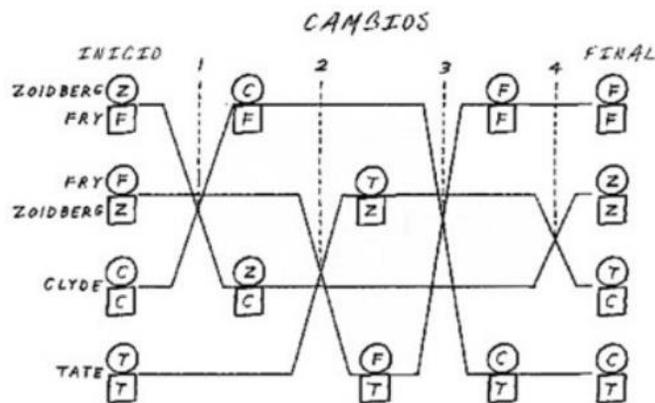


Figura 3. Desenredo del primer grupo (Singh, 2010)

Observamos que las personas introducidas aún están intercambiadas, pero no han interactuado entre ellos, por lo que pueden introducirse para resolver el siguiente desenredo.

El resultado anterior no solo quedó en el capítulo y se publicó como un resultado particular, cuya demostración (Figura 2) es anexada al final del libro “Los Simpson y las Matemáticas”, debido a que utiliza herramientas de Algebra moderna.

BIBLIOGRAFÍA

- S. Singh (2010), El teorema de Futurama, recuperado el 7 de febrero de 2019 de Los Simpson y las matemáticas, pp. 245-256, Ariel.
- D. Avella, O. Mendoza, E.C. Sáenz, M.J. Souto, (2014), Permutaciones, recuperado el 10 de febrero de 2019, de Grupos I, pp. 45-64, Papirhos.
- D. Avella, O. Mendoza, E.C. Sáenz, M.J. Souto, (2014), Grupos, recuperado el 12 de febrero de 2019, de Grupos I, pp. 65-76, Papirhos.
- Evans, R. & Huang, L & Nguyen, T.. (2012). Keeler's theorem and product of distinct transpositions. arxiv, 1, 12. 12 febrero 2019, De arxiv.org Base de datos.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 5

CURVAS DE WHATSAPP

Brayam Antonio Moreno González. Asesor: Dr. Jorge René Martínez González
Facultad de Ciencias Exactas
Brayam02@gmail.com
Criptografía

Criptografía: Arte de escribir con clave secreta o de un modo enigmático.

Aportando una visión más específica, la criptografía es la creación de técnicas para el cifrado de datos, teniendo como objetivo conseguir la confidencialidad de los mensajes. Una vez que nuestros datos han pasado un proceso criptográfico decimos que la información se encuentra cifrada. Si la criptografía es la creación de mecanismos para cifrar datos, el criptoanálisis son los métodos para “romper” estos mecanismos y obtener la información.

Cabe destacar el uso incorrecto del término encriptar, que proviene de una mala traducción del inglés *encrypt*. La palabra encriptar no está reconocida por la RAE y el término correcto es cifrar. La interpretación del término encriptar sería introducir cuerpos en una cripta.

Los primeros sistemas de cifrado estuvieron ligados a campañas militares dada la necesidad de evitar que el enemigo obtuviese los movimientos de las tropas al interceptar mensajes.

El primer sistema criptográfico del que se tiene constancia es la Escítala. Este sistema data del siglo V a.c. y era usado en Esparta. es un sistema de criptografía utilizado por los éforos espartanos para el envío de mensajes secretos. Está formada por dos varas de grosor variable (pero ambas de grosor similar) y una tira de cuero o papiro, El sistema consistía en dos varas del mismo grosor que se entregaban a los participantes de la comunicación. Para

enviar un mensaje se enrollaba una cinta de forma espiral a uno de los bastones y se escribía el mensaje longitudinalmente, de forma que en cada vuelta de cinta apareciese una letra de cada vez. Una vez escrito el mensaje, se desenrollaba la cinta y se enviaba al receptor, que sólo tenía que enrollarla a la vara gemela para leer el mensaje original.

Otro método de cifrado clásico es el conocido cifrado de César. Su nombre viene de la supuesta utilización por parte de Julio César. Es un cifrado de sustitución mono-alfabética. Este sistema consiste en desplazar el alfabeto una cantidad determinada de posiciones y alinearlos con el alfabeto sin desplazar. De esta forma se obtiene una relación entre las letras de este alfabeto mencionado (Figura 1).

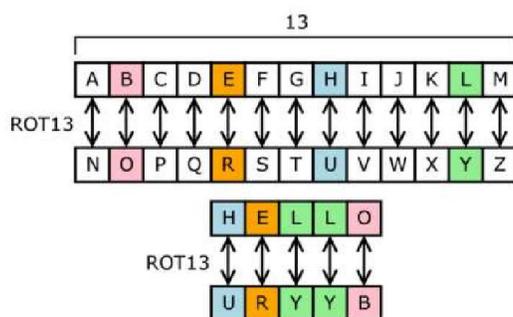


Figura 11. Ejemplo del cifrado de César

En el siglo XX, a consecuencia de las dos guerras mundiales, la criptografía sufre un gran avance. En el año 1920 comenzó a usarse la máquina Enigma. Su fama se debe a su uso por parte del ejército alemán. Enigma hacía uso de partes mecánicas y eléctricas, era un mecanismo de cifrado rotatorio. La facilidad para cifrar, descifrar mensajes y la supuesta seguridad de este cifrado convierten a la máquina Enigma en una pieza clave de la Segunda Guerra Mundial.

Los esfuerzos por romper Enigma impulsaron la criptografía y el criptoanálisis de una forma inimaginable. Durante la segunda guerra mundial los aliados finalmente consiguen descifrar Enigma, aunque este hecho se mantiene oculto hasta finales de los años 60.

La criptografía siempre había estado vinculada al ámbito militar. ¿Por qué se hizo necesaria para el resto de la gente?

Aparte de las empresas, se hace necesario otorgar al ciudadano privacidad y seguridad. Con el nacimiento de internet y la progresiva oferta de servicios telemáticos como acceso al banco, citas médicas y un sinnúmero de posibilidades se tiene que ofrecer confidencialidad y seguridad a estos servicios.

Por estas razones es necesaria la criptografía. Para otorgar privacidad, confidencialidad y seguridad a nuestras transacciones telemáticas.

La criptografía cuenta con 3 usos: Cifrar, autenticar y firmar.

Cifrar: Como ya hemos dicho, siempre hay cierta información que no deseamos que sea conocida más que por las personas que nosotros queramos. En esto nos ayuda el cifrado. Cifrando un mensaje hacemos que este no pueda ser leído por terceras personas consiguiendo así la tan deseada privacidad.

Autenticación: Otra de las necesidades que surgen con la aparición de internet es la necesidad de demostrar que somos nosotros y que el emisor es quien dice ser. Un método de autenticación puede ser el propio cifrado. Si ciframos un mensaje con una clave sólo conocida por nosotros, demostrando que somos quien decimos ser, el receptor podrá constatar nuestra identidad descifrándolo.

Firmar: Dados los trámites que podemos realizar hoy en día a través de internet se hace necesaria la aparición de la firma digital. Igual que firmamos un documento, la firma digital nos ofrece la posibilidad de asociar una identidad a un mensaje.

La firma digital tiene un problema. ¿Cómo sabe el receptor que la clave corresponde realmente con la persona o entidad que dice poseerla? De este modo surgen las entidades de certificación. Organismos de confianza que actúan como notarios.

Es importante que la clave sea difícil de adivinar y el método de cifrado empleado el adecuado. Hoy en día, con la capacidad computacional disponible, si se emplean los algoritmos adecuados, dependiendo del método de cifrado empleado se puede obtener una clave en cuestión de minutos/horas.

Actualmente se ha intentado mejorar la seguridad de los sistemas de encriptado, algunos de estos métodos son:

DES: El algoritmo DES (Data Encryption Standard) es un algoritmo de cifrado desarrollado por la NSA (National Security Agency) a petición del gobierno de EEUU bajo la presión de las empresas por la necesidad de un método para proteger sus comunicaciones. DES fue escogido como FIPS (Federal Information Processing Standard) en el año 1976 y su uso se extendió por todo el mundo. Hoy en día DES es considerado inseguro dada su clave de 56 bits, insuficiente frente al poder computacional actual. En su variante Triple DES el algoritmo se cree seguro ya que éste método de cifrado es inmune al ataque por encuentro a medio camino, doblando la longitud efectiva de la clave (112 bits), pero en cambio es preciso triplicar el número de operaciones de cifrado, haciendo este método de cifrado muchísimo más seguro que el DES.

AES: El algoritmo AES (Advanced Encryption Standard) también conocido como Rijndael fue el ganador del concurso convocado en el año 1997 por el NIST (Instituto Nacional de Normas y Tecnología) con objetivo de escoger un nuevo algoritmo de cifrado. En 2001 fue tomado como FIPS y en 2002 se transformó en un estándar efectivo. Desde el año 2006 es el algoritmo más popular empleado en criptografía simétrica.

AES opera sobre una matriz de 4x4 bytes. Mediante un algoritmo se reordenan los distintos bytes de la matriz. El cifrado es de clave simétrica, por lo que la misma clave aplicada en el cifrado se aplica para el descifrado.

La criptografía simétrica (también conocida como de clave pública) es un sistema que emplea una pareja de claves. Esta pareja de claves pertenece a la misma persona, una es de dominio público y cualquiera puede tenerla y la otra es privada. El funcionamiento de este sistema es el siguiente:

El remitente usa la clave pública del destinatario y sólo con la clave privada se podrá descifrar el mensaje. De esta forma se consigue que sólo el destinatario pueda acceder a la información.

De la misma forma, si el propietario usa su clave privada para cifrar un mensaje sólo se podrá descifrar con la clave pública. Pero, si todo el mundo puede tener acceso a la clave pública ¿Qué utilidad tiene esto? Precisamente por esto es interesante el sistema. Usando tu clave privada estás demostrando tu identidad, pues, en teoría, sólo tú eres poseedor de esa clave privada

Sin embargo, este sistema tiene varias desventajas:

- Mayor tiempo de proceso en mismas condiciones respecto las claves simétricas.
- Claves más grandes que en los sistemas simétricos.
- El mensaje cifrado es más grande que el original.

Hablaremos del algoritmo: Diffie-Hellman

El protocolo de cifrado Diffie-Hellman (recibe el nombre de sus creadores) es un sistema de intercambio de claves entre partes, que no han contactado previamente, a través de un canal inseguro y sin autenticación. Este protocolo se utiliza principalmente para intercambiar claves simétricas de forma segura para posteriormente pasar a utilizar un cifrado simétrico, menos costoso que el asimétrico. Se parte de la idea de que dos interlocutores pueden generar de forma conjunta una clave sin que esta sea comprometida.

1. Se escoge un número primo p y un generador g que será coprimo de p . Estos 2 números son públicos.
2. Escogemos un número a menor que p y calculamos $A = g^a \text{ mod } p$. Enviamos A , p y g al otro interlocutor.
3. El otro interlocutor escoge un número b menor que p y calcula $B = g^b \text{ mod } p$. Nos envía B .

Ahora, ambos podemos calcular $K = g^{(a-b)} \text{ mod } p$. Para nosotros $B^a \text{ mod } p = K$ y para nuestro interlocutor $A^b \text{ mod } p = K$. Usamos K como clave.

Al ser p y g públicos cualquier atacante puede conocerlos. Esto no supone una vulnerabilidad. Aunque el atacante conociera estos dos números y capturase A y B , le resultaría computacionalmente imposible obtener a y/o b y consecuentemente K .

Tomamos $p = 23$ y $g = 5$. Elegimos $a = 6$ y $b = 15$. $A = 8$ y $B = 19$.

$$(g^a \text{ mod } p) = 8 \rightarrow (5^a \text{ mod } 23) = 8$$

$$(g^b \text{ mod } p) = 19 \rightarrow (5^b \text{ mod } 23) = 19$$

Partiendo de estas ecuaciones obtener a y b es un problema conocido como logaritmo discreto.

$$a = \log_{\text{disc } g} (g^a \text{ mod } p) = \log_{\text{disc } 5} (8)$$

$$b = \log_{\text{disc } g} (g^b \text{ mod } p) = \log_{\text{disc } 5} (19)$$

En este caso si podríamos obtenerlos, pues sabiendo que $p = 23$ y que a y b son menores que p sólo tendríamos que probar 22 números diferentes. En la realidad se utilizan números primos del orden de 10^{200} haciendo computacionalmente imposible la resolución.

Curva elíptica

En matemáticas, las curvas elípticas se definen mediante ecuaciones cúbicas (de tercer grado) Figura 12. Han sido utilizadas para probar el último teorema de Fermat y en factorización de enteros. Se emplean también en criptografía de curvas elípticas.

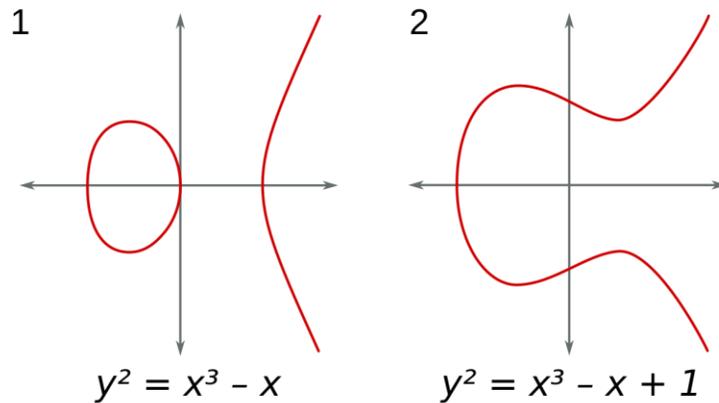


Figura 12. Ejemplos de Curvas Elípticas

En las últimas décadas, la criptografía con curvas elípticas ha adquirido una creciente importancia, llegando a formar parte de los estándares industriales. Su principal logro se ha conseguido en los criptosistemas basados en el problema del logaritmo discreto. Estos criptosistemas planteados en el grupo algebraico de puntos de una curva elíptica garantizan la misma seguridad que los construidos sobre el grupo multiplicativo de un cuerpo finito dentro del grupo algebraico, pero con longitudes de clave mucho menores.

Sobre el conjunto de puntos de una curva elíptica se puede definir una operación interna mediante el llamado método de la cuerda y la tangente (Figura 3). Este método consiste en considerar la recta r que pasa por los dos puntos P y Q (en el caso que coincidan se toma la tangente a la curva en el punto) y calcular el tercer punto de intersección R de la recta r con la curva. El punto $P + Q$ (o el punto $2 \cdot P = P + P$) es el punto de intersección de la curva con la recta que pasa por R y el punto al infinito, es decir, la recta que pasa por R y es paralela al eje de ordenadas. Esta operación, denominada suma elíptica (Figura 4), dota al conjunto de la estructura de grupo abeliano donde el neutro es el punto al infinito de la curva.

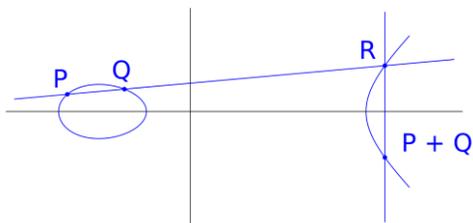


Figura 13 Método de cuerda y tangente

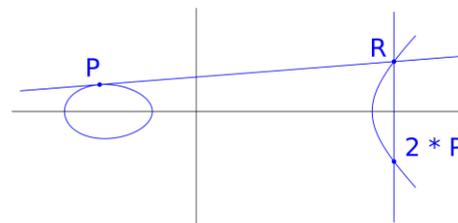


Figura 14. Suma elíptica

Curve25519

En criptografía, Curve25519 es una curva elíptica que ofrece 128 bits de seguridad y está diseñada para ser utilizada con el esquema de acuerdo de clave de curva elíptica Diffie-Hellman. Es una de las curvas ECC más rápidas y no está cubierta por ninguna patente conocida. La implementación de referencia es un software de dominio público.

La curva utilizada es $y^2 = x^3 + 486662x^2 + x$, una curva de Montgomery, sobre la extensión cuadrática del cuerpo primo definido por el número primo $2^{555} - 19$, y usa el punto base $x = 9$.

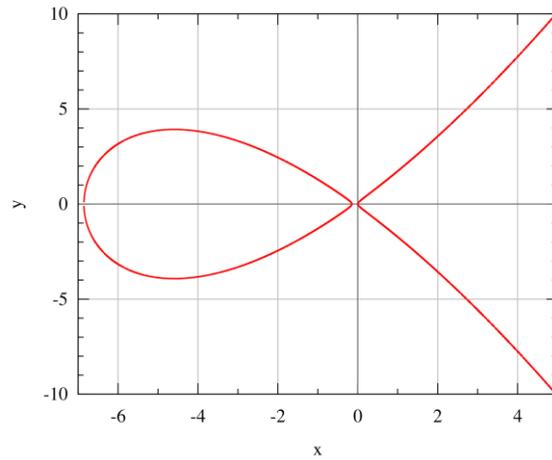


Figura 15. Ejemplo de Curva de Montgomery.

Aplicaciones de esta curva

- Facebook
- Messenger
- Google Allo
- iOS
- Viber
- WhatsApp

WhatsApp

¿Cómo funciona el cifrado extremo a extremo?

Una de las dudas más frecuentes de los usuarios es cómo pueden dos terminales descifrar los mensajes pero que no se pierda la "llave" por el camino. Si antes se podían robar mensajes si se cogían en el aire, ¿las claves de seguridad de WhatsApp, Telegram u otras aplicaciones pueden cogerse también al vuelo con programas que capturan la señal? La respuesta de los expertos es tajante: no.

El ejemplo que suele poner a sus alumnos Pablo Garaizar, profesor de telecomunicaciones de la Universidad de Deusto, es el de un candado —el mensaje— con dos llaves. "Imagínate que tienes una llave roja y una llave verde. Cuando cierras el candado con la llave verde, solo lo puedes abrir con la llave roja". Y propone una situación para entenderlo.

1. Si Ana se instala WhatsApp, su teléfono móvil crea dos claves de cifrado: '*Ana pública*' y '*Ana privada*'.
2. Bea también se instala WhatsApp y su teléfono móvil crea dos claves de cifrado: '*Bea pública*' y '*Bea privada*'.
3. *Ana le quiere mandar un mensaje a Bea*, así que su cliente de WhatsApp pide la clave '*Bea pública*' al cliente de WhatsApp de Bea.
4. *Ana escribe su mensaje* y cuando le da a enviar, su cliente de WhatsApp cifra ese mensaje usando la clave '*Bea pública*'.
5. *El mensaje cruza Internet y llega hasta el terminal de Bea*. "Aquí lo han podido capturar desde criminales a gobiernos, Snowden o los reptilianos", bromea el profesor. El "problema" para ellos es que la criptografía asimétrica nos asegura que *todo lo que esté cifrado con 'Bea pública' solamente podrá descifrarse con la clave 'Bea privada'*, que en ningún momento ha salido del terminal de Bea.
6. *Bea recibe el mensaje de Ana*, lo descifra con su clave '*Bea privada*' y lo lee sin problemas.

Es prácticamente imposible descifrar por la fuerza bruta cualquiera de estos mensajes, y más si cada uno requiere una clave completamente distinta. En estos casos, conviene recordar que mediante fuerza bruta era como se calculaban las claves para 'hackear' redes wifi, solo que estas eran de muy poca seguridad. 64 o 128 bits se pueden sacar con facilidad, pero una clave de más de 512 bits se tardaría años en calcular, es decir, tardaríamos alrededor de un lustro en desentrañar cada mensaje de WhatsApp.

¿Es necesario confirmar la seguridad escaneando el código de otro móvil?

No, no es necesario. La verificación que WhatsApp ha introducido y que aparece cuando pinchamos el mensaje es sólo eso, un método de verificación para que comprobemos que la clave de cifrado es única. No es, en ningún caso, el método para activar el cifrado extremo a extremo en las conversaciones, que ya se activa automáticamente si las dos personas tienen la última versión de WhatsApp.

Referencias

Seroussi, G., Smart, N. & Blake, I. (2006). *Elliptic Curves in Cryptography*. London: Cambridge University Press

- Hankerson, D., Menezes, A. & Vanstone S.. (2006). *Guide to Elliptic Curve Cryptography (Springer Professional Computing)*. U.S. National Institute for Standards and Technology: Springer.
- Sánchez, H., Rodríguez, C., & Notario, A.. (2014). *Criptografía y Métodos de Cifrado*. Enero 15, 2019, de Universidad de Alcalá (UAH) Sitio web: <http://www3.uah.es/libretics/concurso2014/files2014/Trabajos/Criptografia%20y%20Metodos%20de%20Cifrado.pdf>
- Josep M., Valera J., & Valls M.. (2015). *Criptografía con curvas elípticas*. Enero 10, 2019, de Universidad Politécnica de Madrid Sitio web: <http://www.criptored.upm.es/crypt4you/temas/ECC/leccion1/leccion1.html>
- Sastre I.. (2016). *Cifrado de extremo a extremo de WhatsApp: las 7 claves para entenderlo*. Enero 20, 2019., de SER Sitio web: https://cadenaser.com/ser/2016/04/06/ciencia/1459937458_387400.html

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 6

TEOREMA DE HOLDITCH

Jessica Lizeth Carmona Ortega. Asesor: Dr. Armando Mata Romero
 Facultad de Ciencias Exactas UJED
laice030@hotmail.com
 Área: Geometría

ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

Hamnet Holditch nació en 1800 en Lynn, Norfolk . En 1818, comenzó sus estudios de matemáticas en la Universidad de Cambridge (Caius College), después de haber obtenido su licenciatura (BA) en 1822 y su maestría (MA) en 1825. Fue Wrangler Senior en Tripos y recibió el premio Premio Smith de 1822. Fue miembro del Colegio Caius, y su Presidente desde 1835 hasta 1867, cuando murió.

En 1858, introdujo el resultado en la geometría ahora conocida como el teorema de Holditch.

Este teorema es uno de esos resultados geométricos que fascinan. Bajo algunas condiciones, el teorema relaciona el área que encierra una curva cerrada cualquiera con otra generada a partir de ella con el área de una cierta elipse.

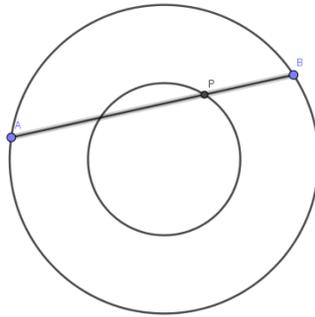
TEOREMA DE HOLDITCH.

El Teorema que el matemático inglés Rev. Hamnet Holditch propuso en 1858, dice así:

“Supongamos una curva cerrada, convexa vista desde su exterior, es decir, sin concavidades exteriores ni puntos singulares, en la que se inscribe una cuerda AB. Un

punto P de ésta divide la cuerda en dos segmentos $PA = a$ y $PB = b$. La cuerda se desplaza con sus extremos AB siempre apoyados en la curva de partida de manera que llegue a dar una vuelta completa en torno de ella. Así, el punto P dibujará otra curva cerrada interior a la primera (el lugar geométrico de P en la maniobra) de tal manera que entre las dos curvas se constituye una corona cuya área vale πab . Es decir, la misma área que tiene una elipse de semiejes a, b .”

Para un mejor análisis de este teorema, tomaremos primero como referencia, el caso particular de la circunferencia.

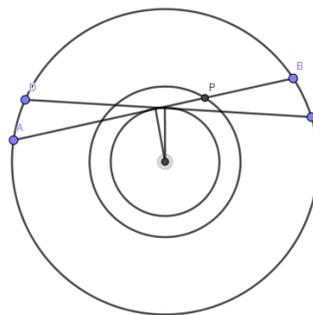


En la imagen observamos dos circunferencias: la grande de radio R que es la curva de partida conteniendo a la cuerda AB y la pequeña, de radio r que es el lugar geométrico de P .

La potencia de P respecto de la circunferencia grande se puede expresar como el producto ab o como el producto $(R - r)(R + r) = R^2 - r^2$. Es decir $ab = R^2 - r^2$. Multiplicando ambos miembros por π , será: $\pi ab = \pi (R^2 - r^2)$ Es decir πab es igual al área de la corona circular.

Obsérvese que en este caso particular para ir asentando AB sobre su circunferencia no ha hecho falta someter AB a ninguna traslación: ha bastado con girar el segmento.

Otra cosa a notar, es que la intersección de AB en una determinada situación, con la misma cuerda AB en la posición sucesiva tiende a situarse en el punto medio de AB cuanto menor sea el ángulo girado. Esto será muy importante a la hora de aplicar el cálculo integral en la demostración del teorema.



En esta segunda imagen, se ha reducido mucho el valor de θ (el ángulo de giro de AB a su siguiente posición) precisamente para aparentar su tendencia a cero, y se ha añadido la circunferencia que pasa por el punto medio de AB y es concéntrica con las otras dos (la más pequeña de las tres).

Observemos los dos triángulos casi horizontales que tienen su vértice más agudo en el punto medio de AB : Cuando θ tiende a cero, son iguales y además isósceles (de acuerdo

con el cálculo infinitesimal). El triángulo de la izquierda (en el que A es un vértice) tiene un área igual a 1/2 de su base por su altura. La base es el lado pequeño de longitud “ángulo × radio”, siendo el ángulo diferencial de θ , y el radio $(a + b) / 2$; este valor del radio es también el de la altura del triángulo (nos hemos situado en el terreno del cálculo infinitesimal).

El área de ese triángulo, integrada a toda la circunferencia resulta ser el área de la corona que determinan las circunferencias más grande y más pequeña. Si llamamos [A] al área del círculo más grande y [Q] a la del más pequeño, será:

$$[A] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 d\theta$$

Llamando [P] al área del círculo intermedio (ése cuya circunferencia es el lugar geométrico de P) y mirando al triángulo de la derecha (no el grande que tiene B como vértice, sino el más pequeño con vértice P), tendremos:

$$[P] - [Q] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 d\theta$$

Restando de la primera ecuación, la última, queda:

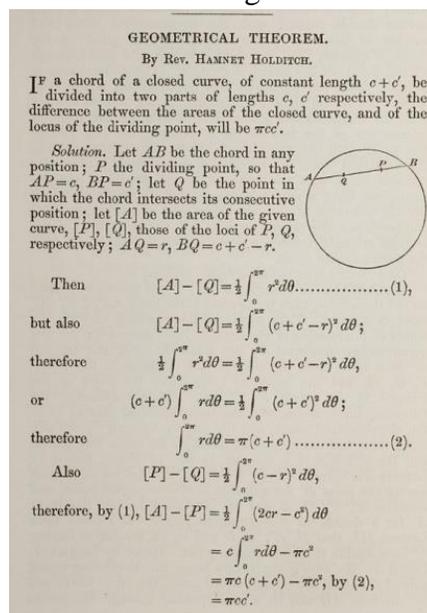
$$[A] - [P] = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi$$

Es decir, el área de la corona determinada por las circunferencias mayor e intermedia (la de partida y la del lugar geométrico de P) vale πab , como se quería demostrar.

La demostración, que resulta cómoda a partir de una circunferencia, es válida para cualquier otra curva de partida que reúna las condiciones del enunciado del teorema, puesto que el resultado no depende de la forma de la curva, sino solamente de a y de b.

El que el límite superior de la integral sea 2π no evoca a una circunferencia, sino al hecho de que por ser cerrada la curva de partida (que puede ser oblonga) ha de ser recorrida en una vuelta completa, de 2π radianes.

La siguiente figura muestra la demostración original del Teorema de Holditch.



GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA.

Una generalización del teorema de Holditch A lo largo de los años se han desarrollado distintas generalizaciones del teorema de Holditch En este capítulo analizaremos una extensión del mismo debida a Arne Broman (matemático sueco, 1913-1995) en la que aparecen segmentos con extremos en curvas distintas. El resultado expresa el área encerrada por la curva de Holditch en términos de las áreas encerradas por las curvas dadas y las longitudes c y c' en que se dividen los segmentos.

Teorema 5. Sean α , β y δ definidas como anteriormente, con c y c' números reales positivos y n un número entero positivo. Entonces

$$I_\delta = \frac{1}{c + c'}(c'I_\alpha + cI_\beta) - n\pi cc',$$

donde I_γ es el área encerrada por una curva cerrada cualquiera γ .

Recordemos que si γ es una curva cerrada con parametrización $x_\gamma = x_\gamma(t)$ e $y_\gamma = y_\gamma(t)$, con $0 \leq t \leq 1$, recorrida en sentido positivo (antihorario) el área encerrada por ella viene dada por

$$I_\gamma = \int_\gamma x_\gamma dy_\gamma = \int_0^1 x_\gamma(t)y'_\gamma(t) dt.$$

APLICACIONES.

El triángulo de Reuleaux fue introducido por el ingeniero alemán Franz Reuleaux (1829-1905). Tiene la peculiaridad de ser una curva de anchura constante: la distancia entre dos rectas tangentes paralelas cualesquiera es la misma. Esa distancia constante la denominaremos anchura del triángulo de Reuleaux.

Trazar un triángulo de Reuleaux es bastante sencillo. Partiendo de un triángulo equilátero y haciendo centro en uno de los vértices, se traza un arco de circunferencia que una los otros dos vértices. La operación se repite con cada vértice y así, eliminando el triángulo inicial se obtiene el triángulo de Reuleaux.

El área del triángulo de Reuleaux es

$$\frac{\omega^2}{2} (\pi - \sqrt{3}),$$

donde ω es la anchura constante (notar que podemos descomponer el triángulo de Reuleaux en un triángulo equilátero de lado ω y tres segmentos circulares abarcando un ángulo de $\pi/2$)

- Regularización de trazados.
- Circulación en una curva de un vehículo guiado.
- Revestimiento de una excavación irregular.
- División de un recinto en partes iguales o proporcionales a cantidades dadas.

BIBLIOGRAFÍA

De la Peña Hernández J. (2018), *Holditch*, caprichos-ingenieros.com

Pickover, C.A. (2011), *El libro de las Matemáticas*, España, Ed. Librero, p. 528.
Hacar Benitez M.A. (1980), *Numerosas aplicaciones de un teorema olvidado de geometría*,
Revista de Obras Públicas, No. 3180 p. 415-428

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 7

USO DE GEOGEBRA EN EL CÁLCULO, COMPRESION Y APLICACIÓN DE AREAS ENTRE CURVAS

Edgar Rafael Marin Gómez. Asesora: M.C. Mirka Maily Acevedo Romero
Instituto Tecnológico del Valle del Guadiana
edgarmarin604@gmail.com
Calculo integral: área entre curvas

A lo largo de la vida estudiantil se aprende a utilizar el cálculo integral para la obtención de valores aproximados de áreas y volúmenes de regiones o bien de sólidos de revolución. El cálculo integral, desde un punto de vista práctico, a lo largo de la historia ha mostrado ser indispensable en cualquier ámbito de la vida cotidiana, y un pilar en la solución de problemas de las diferentes ramas de la ingeniería.

En este caso la carrera de ingeniería en agronomía no se limita al uso de las herramientas matemáticas, pues el estudiante y/o egresado debe interactuar con el agroecosistema para proponer alternativas para la producción es por ello que para la carrera de Agronomía hace utilización de cálculo integral, cálculo diferencial y modelos lineales como lo menciona (Batista Dièguez, Garcia Reina, & Server Garcia, 2010).

Un objetivo implícito de este trabajo es facilitar la comprensión del cálculo integral mediante el uso de herramientas que hagan más ilustrativo el trabajo, pues de no ser de esta manera la comprensión es más compleja (Boigues, Linares , & Estruch, 2010), como experiencia se tiene un análisis de realizado después de un examen de cálculo en el cual solo 23% de los 198 alumnos que lo realizaron estuvo correcto (Llorens Fuster & Santoja Gòmez, 1997).

El trabajo que a continuación se presenta, muestra la experiencia de aprendizaje de estudiantes de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Agronomía concerniente a la aplicación de los conocimientos de varios temas y habilidades computacionales en el cálculo de áreas entre curvas.

Se trabajó con Sumas de Riemann, que como se sabe, consiste en la estimación y suma del área de n rectángulos, bajo una curva determinada y el teorema fundamental del cálculo. Finalmente, se integraron los conocimientos adquiridos en el cálculo de área entre curvas, tema que en la Ingeniería en Agronomía tiene gran utilidad. Se utilizaron además herramientas digitales y TIC's como los software Excel y Geogebra, que facilitaron el desarrollo y comprensión de los temas y permitieron observar de manera clara la relación entre los conocimientos nuevos y los previamente adquiridos.

La aplicación de los conceptos anteriores se enfocó al cálculo de áreas de imágenes sencillas, sirvieron para demostrar que todo en la naturaleza contempla aspectos matemáticos que pueden ser representados con un modelo para su posterior análisis e interpretación.

El proceso se llevó a cabo en tres partes. Realizando el cálculo del área entre dos curvas primero por el método de Sumas de Riemann, luego utilizando la integral definida y finalmente a mano para comparar los resultados obtenidos entre sí.

Se eligió la imagen sencilla de una ballena, como puede observarse en la Figura 1, en la cual se calculó el área de la panza sin incluir aletas u otros elementos incluidos en el dibujo.

Para el cálculo por medio de las Sumas de Riemann se utilizó la siguiente metodología

Se plasmó la imagen en una hoja blanca de tamaño carta, con un área total de 612.58cm^2 , al conocer este dato se puede tener un rango de aproximación del resultado esperado.

Se dividió la imagen de la ballena en una curva superior a la que se llamó *Función S* y una curva correspondiente a la parte inferior de la figura que se denominó *Función I*.

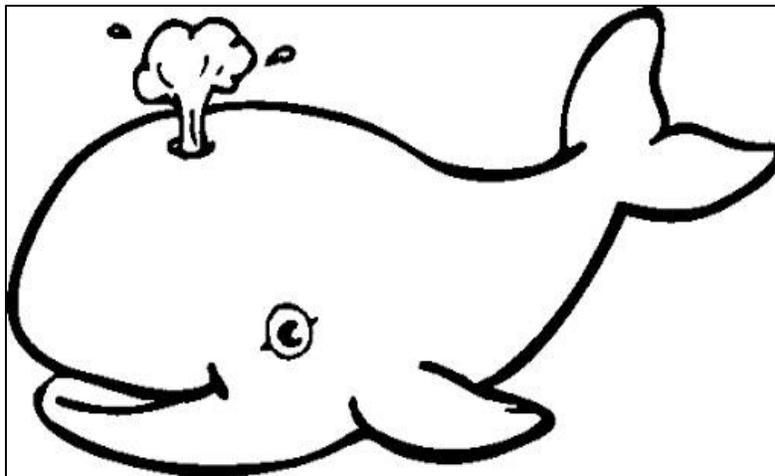


Figura 1. Imagen de la ballena para obtención de área entre curvas

Se trazó un plano cartesiano con ejes X y Y sobre la imagen para obtener los puntos coordenados y obtener las funciones de cada curva de manera similar a como se muestra en la Figura 2.

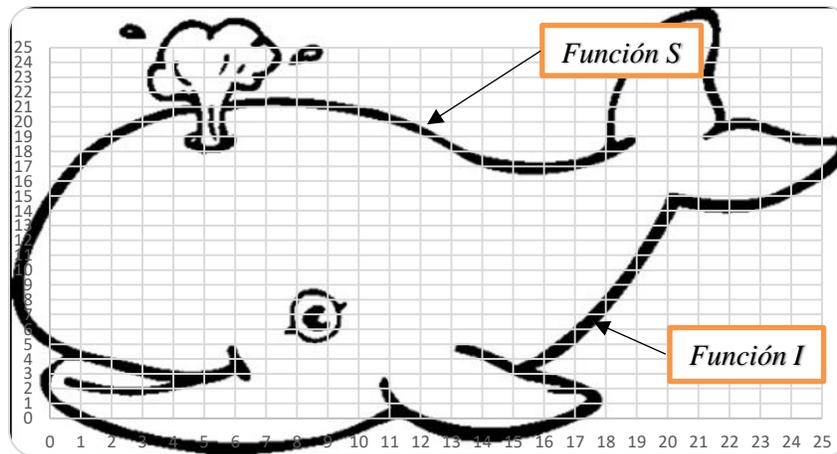


Figura 2. Trazo del plano cartesiano sobre la figura de estudio

Una vez obtenidos los puntos, se usó el software Excel para la obtención de las ecuaciones de cada curva, así como sus respectivos valores de R^2 . Ver Figura 3.

Para la *Función S* se obtuvo:

$$y = 0.006x^3 - 0.2144x^2 + 2.218x + 5.5544$$

$$R^2 = 0.9609$$

Para la *Función I* se obtuvo:

$$y = 0.0408x^2 - 0.6371x + 4.5637$$

$$R^2 = 0.9834$$

Los valores de R^2 indican una certeza bastante aceptable en la aproximación de las curvas lo que permite seguir adelante con los cálculos sabiendo que las funciones obtenidas reflejan lo graficado con los puntos coordenados de la imagen.

En la Figura 3 se observa además que el área de la Función I es parte del área de la Función S, por lo que al realizar una resta entre ellas se puede obtener el área del cuerpo de la ballena.

Una vez obtenidas las funciones, se utilizó la herramienta matemática Geogebra para obtener el área bajo ambas curvas por el método de Sumas de Riemann, esto se realizó por separado para cada función y posteriormente se muestran ambas en el mismo plano y la resta de la *Función S* menos la *Función I* para obtener el área entre ellas.

Para obtener un resultado que permita comparar los obtenidos con los siguientes métodos de cálculo, se decidió usar 70 rectángulos.

(González & Caraballo, 2013) nos define a la Suma de Riemann como la diferencia entre la suma de las áreas de una n división de rectángulos sobre el eje x , de la curva a estimar su área.

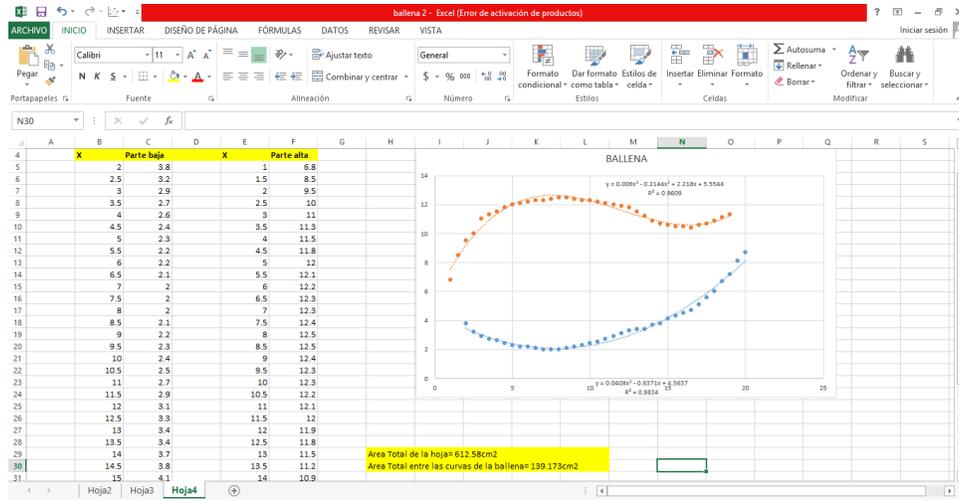


Figura 3. Graficación y obtención de funciones en Excel.

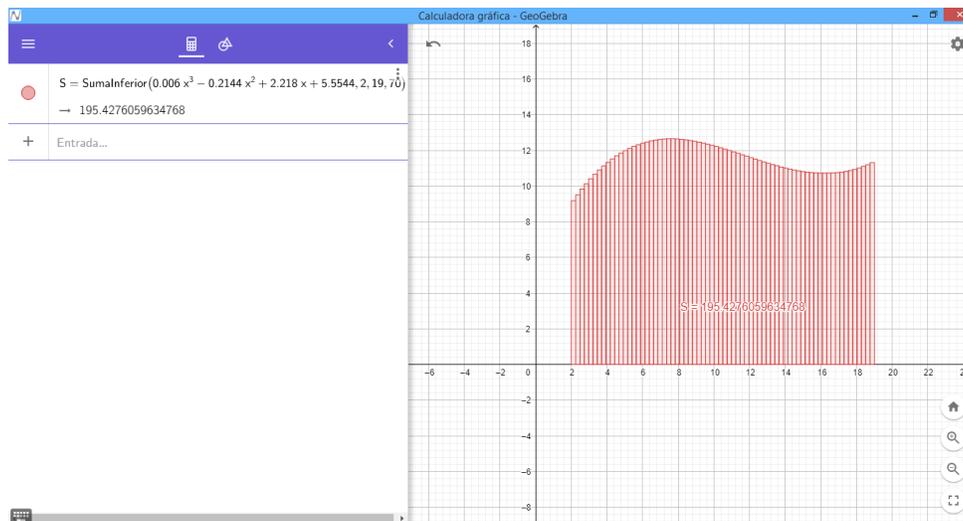


Figura 4. Área bajo la curva por Sumas de Riemann, *Función S*.

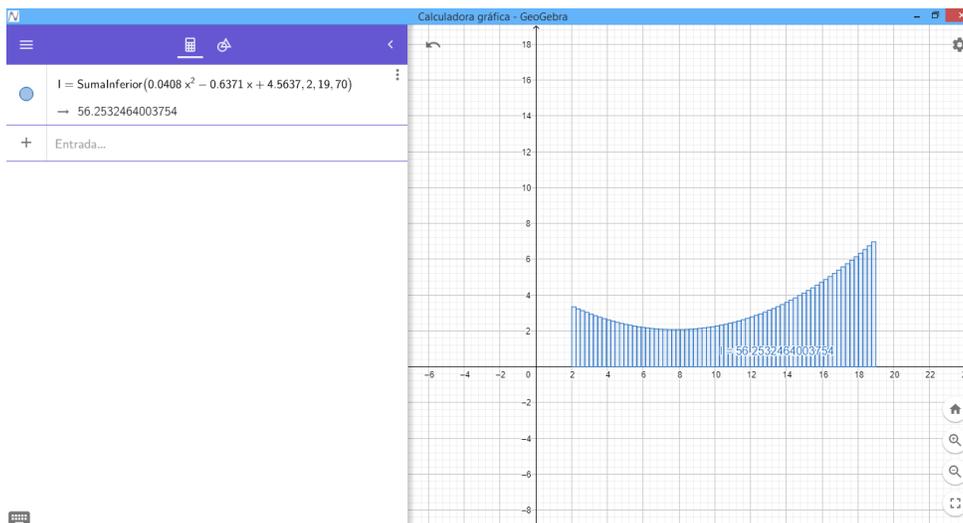


Figura 5. Área bajo la curva por Sumas de Riemann, *Función I*.

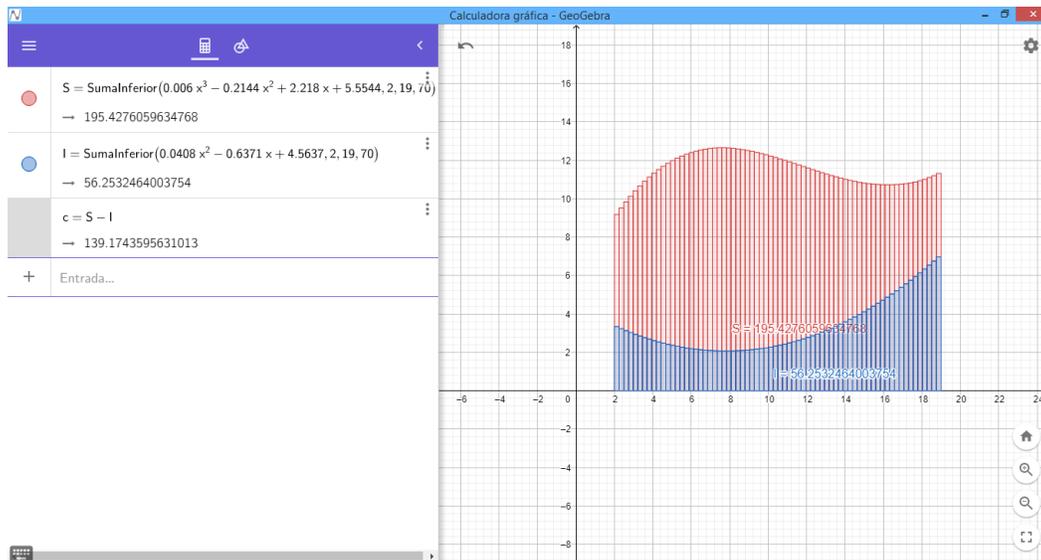


Figura 6. Área entre las curvas por Sumas de Riemann, *Función S - Función I*.

Finalmente se estimó un área total entre las curvas que fue de 139.17cm^2

Se llevó a cabo el cálculo enseguida usando la integral definida en Geogebra, de igual manera se calculó primero el área de cada una de las funciones y posteriormente la resta entre ellas.

En las Figuras 7, 8 y 9 se muestran las áreas obtenidas.

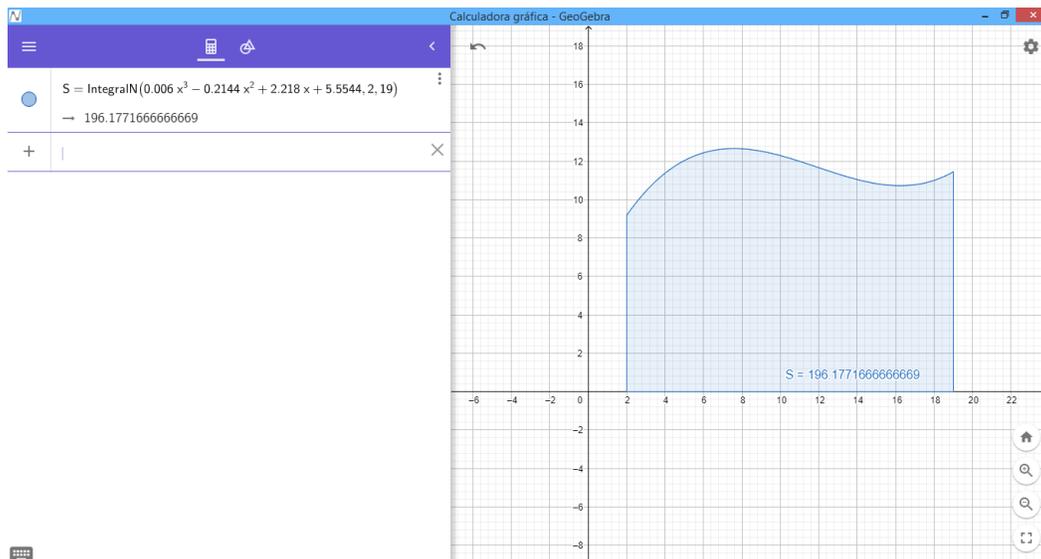


Figura 7. Área bajo la curva por integral definida, *Función S*.

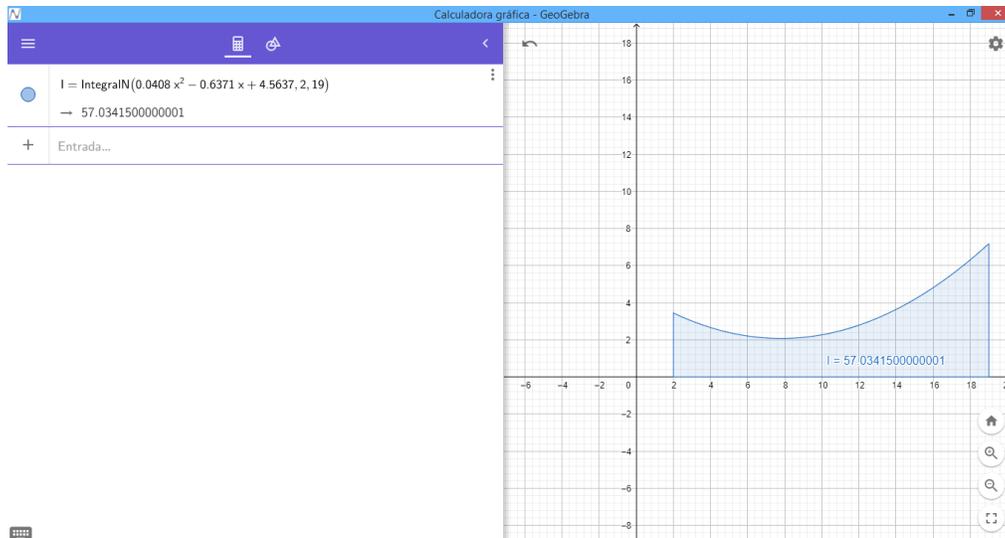


Figura 8. Área bajo la curva por integral definida, *Función I*

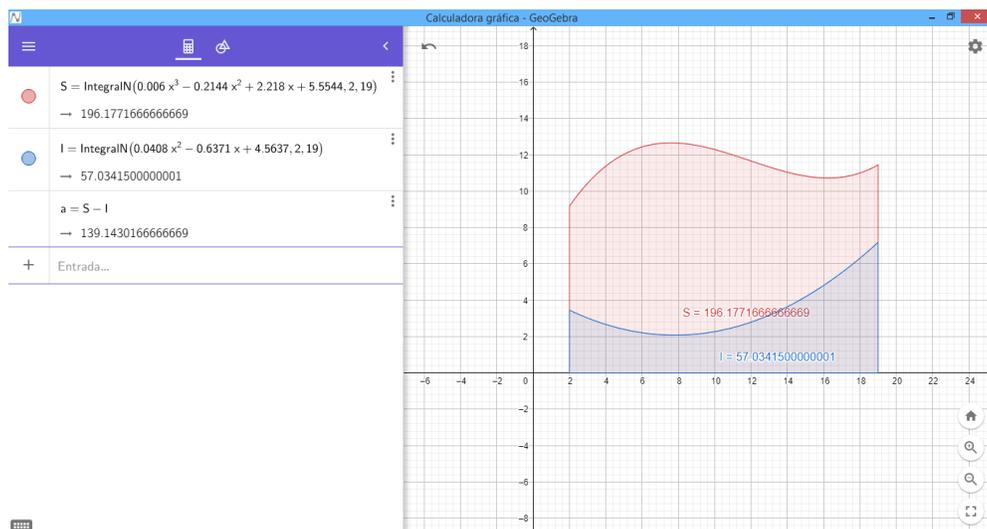


Figura 9. Área entre las curvas por integral definida, *Función S - Función I*.

El Teorema fundamental del cálculo integral según (González & Caraballo, 2013) es la sustitución de cada límite en nuestra función dada y posterior a ello la resta de los resultados, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El procedimiento del cálculo a mano se presenta a continuación:

Función S:

$$\int_2^{19} 0.006x^3 - 0.2144x^2 + 2.218x + 5.5544$$

$$\begin{aligned}
 &.0015x^4 - 0.0715x^3 + 1.109x^2 + 5.5544x \Big|_2^{19} [= .0015(19)^4 - 0.0715(19)^3 \\
 &\quad + 1.109(19)^2 + 5.5544(19)] \\
 &\quad - [= .0015(2)^4 - 0.0715(2)^3 + 1.109(2)^2 + 5.5544(2)] = 196.17
 \end{aligned}$$

Función I:

$$\begin{aligned}
 &\int_2^{19} 0.0408x^2 - 0.6371x + 4.5637 \\
 &\quad 0.0136x^3 - 0.3185x^2 + 4.5637x \Big|_2^{19} \\
 &\quad = [0.0136(19)^3 - 0.3185(19)^2 + 4.5637(19)] \\
 &\quad - [0.0136(2)^3 - 0.3185(2)^2 + 4.5637(2)] = 57.03
 \end{aligned}$$

Se concluye que los resultados con Sumas de Riemann varían debido a que, aun cuando se use un número grande de rectángulos, el valor de ΔX siempre podrá seguir creciendo, por otra parte la integral definida presenta un resultado más exacto. Usar ambos métodos permite realizar una comparación y relacionar los temas de manera efectiva para su comprensión.

La resolución del problema por el método de Sumas de Riemann a diferencia de la Integral definida y el teorema fundamental nos arroja resultados con menos exactitud, pues el número de rectángulos siempre va a variar y por lo general excluirá ciertos espacios que no serán considerados por lo que el resultado final será menos acertado.

La integral definida y el Teorema fundamental por lo contrario, al contar con límites bien definidos, estar considerando directamente el espacio ya entre las curvas y conjuntamente coincidiendo engloba a un resultado más demostrativo de la figura

El uso de las tecnologías facilita el trabajo y la investigación promoviendo una cultura de interés en las materias de las ciencias básicas, con una mayor comprensión, se puede pensar más en las diferentes formas de aplicación e innovación.

Referencias

- Batista Dièguez, R., Garcia Reina, F., & Server Garcia, P. (2010). Aplicacion del enfoque holístico al estudio del proceso de solución de problemas matemáticos contextualizados en la matemática básica para la carrera de agronomía. *Aplicacion del enfoque holístico al estudio del proceso de solución de problemas matemáticos contextualizados en la matemática básica para la carrera de agronomía*, 3.
- Boigues, F. J., Linares, S., & Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas a las ciencias de la naturaleza. *Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas a las ciencias de la naturaleza*, 256.
- González, C. Z., & Caraballo, H. A. (2013). Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal. En C. Z. González, & H. A. Caraballo, *Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal* (pág. 206).

Llorens Fuster, J. L., & Santoja Gómez, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Departamento de matemática aplicada*, 63.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 8

CUADRADOS MÁGICOS Y ÁLGEBRA LINEAL

Francisco Gerardo Véliz Romero. Asesor: Dr. Armando Mata Romero

Facultad de Ciencias Exactas UJED

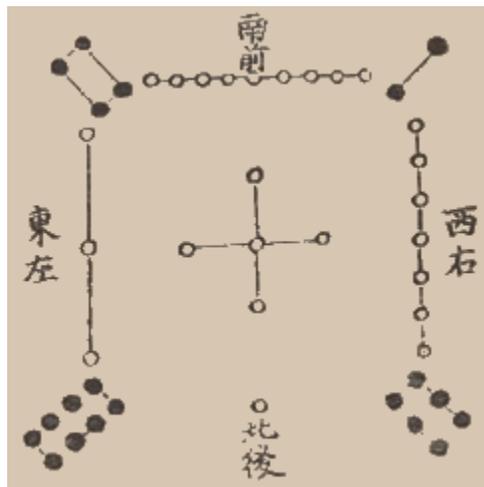
frankgerardo048@gmail.com

Álgebra

INTRODUCCIÓN

Los cuadrados mágicos y su construcción han estado presente hace varios siglos en la historia, manteniendo a las personas ocupadas con estos, más a los matemáticos, ya que se han descubierto algunas propiedades matemáticas interesantes de estos.

Se sabe que el primer cuadrado mágico apareció en la Antigua China, cerca del año 2200 A.C., cuando el emperador Yu intentaba apaciguar un río acaudalado dando ofrendas a los dioses, pero un chico que estaba cerca del emperador vio a una tortuga con unos símbolos en su caparazón, el cual era:



Estos símbolos cambiados a números daban un número en específico al sumar los números de las columnas, las filas y las diagonales, el cual era el número 15, por lo que el emperador ofreció esa cantidad como ofrenda a los dioses, haciendo que el río volviera a su cauce.

Se sabe que varias civilizaciones antiguas conocieron estos cuadrados y también distintas combinaciones de estos.

Se sabe que el primer registro de un cuadrado mágico de orden 4 fue datado al año 587 D.C. en la India.

Los persas y los árabes ya conocían los cuadrados mágicos antes de los tiempos pre-islámicos, que fue cerca del año 600 D.C.

Otros tipos de cuadrados mágicos de orden 3 al 9 fueron encontrados en una enciclopedia de Bagdad, cerca del año 983 D.C.

Para finales del siglo 12, los métodos generales para la construcción de cuadrados mágicos ya estaban escritos en la *Enciclopedia de los hermanos de la Pureza* en Arabia.

Al principio, los cuadrados mágicos aparecieron en Europa en el *Libro sobre la influencia de los planetas*, escrito por el árabe Ibn Zarkali de Toledo y Al-Andalus, como cuadrados planetarios (asociados a planetas) en el siglo 11.

A inicios del siglo 12, el cuadrado mágico de orden 3 fue discutido de manera numerológica por el erudito Abraham Ibn Ezra Toledo.

El libro de Ibn Zarkali fue traducido como el *Libro de Astromagia* en 1280 por Alfonso 10 de Castilla, en el cual los cuadrados de orden mayor o igual a 3 son asignados a los planetas del sistema solar.

Se sabe que el griego Emanuel Moshopoulos escribió un tratado en 1350 acerca de los cuadrados mágicos, el cual tiene las maneras de crear cuadrados mágicos de orden ya sea par o impar, y aparte, este, al contrario que los persas, los árabes, los chinos o los indios, omite las supuestas propiedades mágicas que tienen estos, ya que antes eran usados por sus supuestas propiedades místicas para adivinar el futuro o hacer magia.

En el siglo 14, Florencia, Italia, los cuadrados mágicos son descritos en el manuscrito de *El tratado de Abaco*, escrito por Paolo Dagomari, el cual dice que los cuadrados mágicos de 6×6 (orden 6) y 9×9 (orden 9) pueden ser útiles en la creación de preguntas y juegos matemáticos y no menciona ningún supuesto uso mágico de estos, llevando a un nuevo uso de estos y dando inicio a que los matemáticos empezaran a buscar propiedades de estos.

Se sabe que la llegada de estos a América fue alrededor del siglo 14, con un manuscrito de Emanuel Moshopoulos. El cual indicaba el cómo crearlos.

Dato curioso: Emanuel Moshopoulos no fue muy conocido en Europa hasta el siglo 17, cuando Philippe de la Hire redescubrió su tratado en la Librería Real de París, reescribiéndolo y llevándolo a luz nuevamente.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN MENOR A 4

Un *cuadrado mágico* es una matriz de orden n , el cual está lleno con los números del $p+1$ al $p+n^2$, donde p es un número real y la suma de los dígitos en las columnas, filas o diagonales debe dar el mismo número, al cual llamaremos *constante mágica*.

EJEMPLOS.

1. Cuadrados de orden 1

Toda matriz $M = [a]$ es un cuadrado mágico, por lo que se tiene que su constante mágica es $a \in \mathbb{R}$.

2. Cuadrados de orden 2

Sea una matriz de 2×2 , $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y sea N el número mágico del cuadrado se tiene que para que M sea un cuadrado mágico tiene que cumplir lo que $(a + b) = N$, $(a + c) = N$, por lo que queda que $c = b$, pero tenemos que también $(a + d) = N$, por lo que $c = b = d$, por lo que si tenemos que $(a + c) = N$ y $(b + d) = N$ entonces tenemos que $a = b = c = d$, por lo que si M es de orden 2, entonces $M = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$ y su constante mágico es $2a$.

3. Cuadrados de orden mayor o igual a 3.

Una propiedad de los cuadrados de orden $n \geq 3$ es la siguiente:

Teorema 1: *El elemento central de un cuadrado mágico de orden 3 es un tercio de la constante mágica.*

Demostración.

Sea el cuadrado mágico $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; entonces sea S la constante mágica, se tiene que sumando las 2 diagonales y la fila o columna central: $(a_{31} + a_{22} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) + (a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 3S$ vemos que al acomodar queda $3a_{22} + [(a_{11} + a_{21} + a_{31})] + [(a_{13} + a_{23} + a_{33})] = 3S$, por lo que $3a_{22} + S + S = 3S$, entonces $a_{22} = \frac{S}{3}$.

ESPACIOS VECTORIALES DE CUADRADOS MÁGICOS

Un hecho importante es que el conjunto de los cuadrados mágicos de orden n pueden verse como un espacio vectorial sobre los reales.

Teorema 2: *El conjunto de los cuadrados mágicos es un subespacio vectorial de dimensión 3 del conjunto de las matrices de 3×3 .*

Demostración.

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ y sean S y J los números mágicos de los cuadrados mágicos respectivamente, se sabe que sea la matriz A ,

entonces si $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow S = \lambda S$ y lo

mismo pasa con el cuadrado mágico S , y también se cumple que $B + \lambda = \begin{pmatrix} b_{11} + \lambda & b_{12} + \lambda & b_{13} + \lambda \\ b_{21} + \lambda & b_{22} + \lambda & b_{23} + \lambda \\ b_{31} + \lambda & b_{32} + \lambda & b_{33} + \lambda \end{pmatrix} \rightarrow S = S + \lambda$

Por lo que también se cumple que siendo K el número mágico del cuadrado mágico $A + B$, entonces

$$(A + B) = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{13} + b_{31} & a_{23} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \rightarrow K = S + J, \text{ por lo tanto como un}$$

subespacio tiene la cerradura de la suma y la multiplicación por escalar, por lo que como los cuadrados mágicos de orden 3 están contenidos en el espacio vectorial de las matrices de 3×3 , entonces este es un subespacio de las matrices de 3×3 , llamado J_3 .

De lo anterior, J_3 tiene una base. Así el conjunto $B = \{M_1, M_2, M_3\}$ es una base para J_3 , donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

De lo anterior se sigue como consecuencia que

el cuadrado mágico $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ tiene coordenadas (a_{11}, a_{12}, a_{22})

respecto de la base canónica $\{M_1, M_2, M_3\}$, ya que el cuadrado mágico M está determinado únicamente por $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a - b + 3c \\ -2a + b + 4c & c & 2a + b + 2c \\ a + b - c & -b + 2c & -a + 2c \end{pmatrix}$$

Un *cuadrado mágico simétrico* de orden n es un cuadrado mágico tal que su matriz es simétrica, es decir es igual a su transpuesta.

Para que M sea una matriz simétrica deberá tener la forma

$$M = \begin{pmatrix} a & -a + 2c & b \\ -a + 2c & c & a \\ b & a & -a + 2c \end{pmatrix}$$

Otra consecuencia es el siguiente teorema

Teorema 3: *Los cuadrados simétricos de orden 3 constituyen un subespacio vectorial de dimensión 2 del espacio vectorial J_3 .*

Una base para este subespacio es la siguiente:

Tomando $a = 1, c = 0$ una base es: $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Tomando } a = 0, c = 1 \text{ la otra base es } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte un cuadrado mágico se puede descomponer de modo único en la suma de un cuadro mágico con diagonal principal nula y otro cuadro mágico simétrico, viéndose de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a - b + 3c \\ -2a + b + 4c & c & 2a + b + 2c \\ a + b - c & -b + 2c & -a + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a + b - 2c & -a - b + 2c \\ -a - b + 2c & 0 & a + b - 2c \\ a + b - 2c & -a - b + 2c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -a + 2c & b \\ -a + 2c & c & a \\ b & a & -a + 2c \end{pmatrix}$$

En el caso de los cuadrados mágicos de orden n , donde n es mayor o igual a 3, tenemos que constituyen un espacio vectorial. Su prueba es similar a lo hecho para los de grado 3. Aquí tenemos un Teorema Fundamental:

Teorema fundamental: Sea $n \geq 3$. Consideremos el espacio vectorial J_n de los cuadrados mágicos de orden n . Entonces $\dim J_n = n^2 - 2n$.

EJEMPLO:

Para $n=4$, la dimensión de J_n es de $4^2 - 2(4) = 8$, y la base canónica es

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El cuadrado mágico llamado *Melancolía*, es de orden 4 y está escrito en función de la base anterior como: $16A + 3B + 2C + 5D + 10E + 11F + 6G + 7H$.

Existe también una transformación lineal generada en este contexto

Definimos

$$\begin{aligned} f: J_n &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\rightarrow f(M) = S, \end{aligned}$$

Esta aplicación hace corresponder a cada cuadrado mágico a su constante mágica.

Veamos que es lineal:

$$a) f(M_1 + M_2) = \text{constante mágica de } (M_1 + M_2) = S_1 + S_2$$

Y ya que tenemos que $f(M_1) = S_1$ y $f(M_2) = S_2$

Tenemos que $f(M_1 + M_2) = f(M_1) + f(M_2)$

$$b) f(\lambda M) = \text{constante mágica de } (\lambda M) = \lambda S, \text{ por lo que } \lambda f(M) = \lambda S, \text{ por lo que}$$

$$\text{tenemos que } f(\lambda M) = \lambda f(M)$$

El núcleo de esta transformación lineal es:

$$\text{Ker } f = \{M \in J_n \mid f(M) = 0\},$$

esto es, el conjunto de cuadrados mágicos con constante mágica 0. De aquí tenemos una consecuencia.

Corolario. *El conjunto de los cuadrados mágicos de orden n y constante mágica 0 es un subespacio vectorial de J_n de dimensión $n^2 - 2n - 1$.*

Demostración.

Sea

$$f: J_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \rightarrow f(M) = S$$

Como f es una aplicación lineal, entonces $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(J_n)$,

pero eso también puede escribirse como $\dim(\text{Ker } f) = \dim(J_n) - \dim(\text{Im } f)$

y ya que f es suprayectiva, entonces $\text{Im } f = \mathbb{R}$, por lo que $\dim(\text{Ker } f) = (n^2 - 2n) - 1$.

BIBLIOGRAFÍA

T. J. Fletcher (1972), *L'Algebre Lineaire par ses applications*, France, CEDIC.

M. Glaymann y otros (1975), Les Carrés Magiques, *Bulletin APMEP* n.º 905..

J. Pineaud et al (1977), *Base magique*, *Bulletin APMEP* n.º 308.

M. F., Willerding (1989), *Conceptos matemáticos: Un enfoque histórico*, CECSA.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 9

GRUPO FUNDAMENTAL

Raúl Vargas Antuna. Asesor: Dr. Enrique Vargas Betancourt

Facultad de Ciencias Exactas - UJED

raul.vargas@cimat.mx

Topología

Aunque el espacio euclidiano de dimensión uno es obviamente diferente al de dimensión dos, o el de dimensión dos es distinto al de dimensión tres y así sucesivamente, se requiere de herramientas especiales que permitan demostrar formalmente estas diferencias, es aquí donde surge la necesidad de estudiar conjuntos en los cuales hay una noción de “cercanía”, y para ello es necesario definir lo siguiente.

Definición. Una **topología** para un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

1. \emptyset y X están en τ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Definición. Un **espacio topológico** es un par ordenado (X, τ) , formado por un conjunto X y una topología τ sobre X , a menudo omitiremos hacer mención específica de τ si no existe confusión. Los conjuntos que son elementos de τ serán llamados conjuntos abiertos.

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ llamamos **bola abierta** de centro a y radio r al conjunto,

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$$

donde $d(x, a)$ representa la distancia euclídea.

Ejemplo. La topología usual de \mathbb{R}^n es aquella en la que un conjunto es abierto en (o está en la topología de) \mathbb{R}^n si y sólo si es unión de cierto número de bolas abiertas.

Ejemplo. Si X es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina **topología discreta**. La colección compuesta únicamente por X y \emptyset es también una topología sobre X .

Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es **continua** si para cada subconjunto abierto $U \in Y$, el conjunto $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X .

A partir de ahora denotaremos por I al intervalo $[0,1]$, visto con la topología que le herede el espacio topológico de los números reales con su topología usual (definida anteriormente).

Definición. Sea X un espacio topológico y sean $a, b \in X$. Un camino o trayectoria de a hacia b es una función continua $\alpha: I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

Ejemplo. El ejemplo más sencillo de camino es la función constante $\epsilon_a: I \rightarrow X$ definido por $\epsilon_a(t) = a$ para todo $t \in I$.

Con la definición que tenemos de camino siempre es posible formar nuevos caminos a partir de algunos ya existentes. Por ejemplo, dado un camino α , podemos construir el camino $\underline{\alpha}$, que esencialmente recorre a α en sentido contrario (ver Lema siguiente). Dados dos caminos tales que el punto final del primero coincide con el punto inicial del segundo, nos da un nuevo camino que consiste en unir los caminos dados como en la Figura 1.

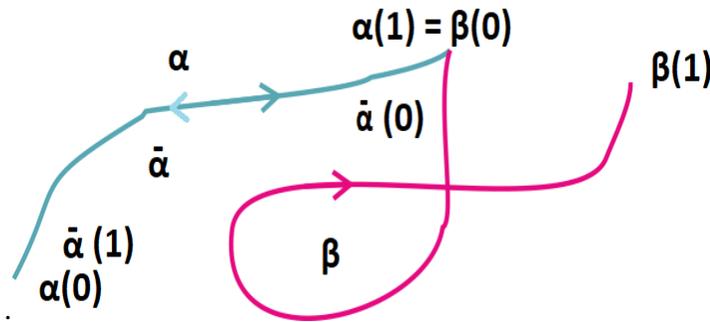


Figura 1: Producto de caminos.

Lema. Sean α y β caminos en X . Entonces:

1. La función $\bar{\alpha}$ definida por $\bar{\alpha} = \alpha(1 - t)$ es también una camino en X
2. Si $\alpha(1) = \beta(0)$, es decir, el punto final de α coincide con el punto inicial de β , la función $(\alpha * \beta): I \rightarrow X$ definida por:

$$(\alpha * \beta)(t) \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino.

Un concepto central en este trabajo es el de homotopía, a continuación lo presentamos y describimos sus principales resultados

Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que dos funciones continuas de X a Y , $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una aplicación continua

$$F: X \times I \rightarrow Y$$

tal que

$$F(x, 0) = f_0(x)$$

$$F(x, 1) = f_1(x)$$

La función F se llama una **homotopía** entre f_0 y f_1 y la denotaremos por $f_0 \simeq f_1$ (Véase figura 2).

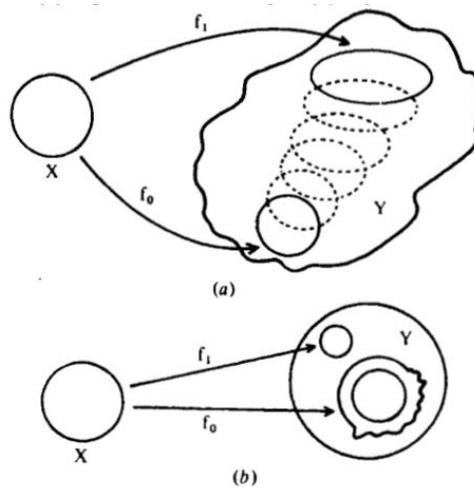


Figura 2: Funciones homotópicas y no homotópicas (Munkres).

Definición. Dos funciones continuas $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homotópicas relativamente** a un subconjunto A de X si y sólo si existe una homotopía

$$F: X \times I \rightarrow Y$$

entre f_0 y f_1 tal que

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a), \forall a \in A, \forall t \in I.$$

Denotaremos esto por $f_0 \simeq f_1 \text{ (rel } A)$ (Véase figuras 3 y 4).

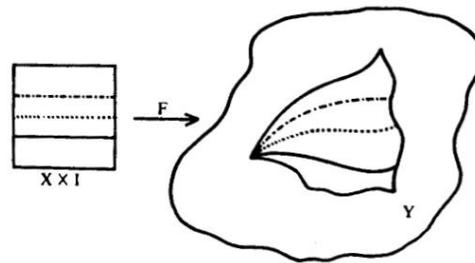


Figura 3: Caminos homotópicos relativamente al $\{0\}$ (Munkres).

El siguiente lema muestra que en el conjunto de funciones continuas de X en Y la homotopía relativa es una relación de equivalencia.

Lema. La relación $\simeq \text{ (rel } A)$ definida en el conjunto de funciones continuas de X a Y es una relación de equivalencia.

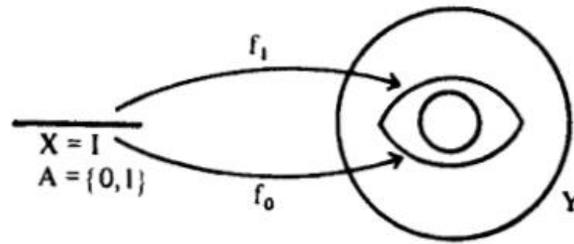


Figura 4: Caminos no homotópicos relativamente al $\{0,1\}$ (Munkres).

Las definiciones anteriores permiten construir una partición en el conjunto de caminos en un espacio X cuyas clases de equivalencia serán precisamente los elementos que nos interesa estudiar en un espacio topológico.

Definición. Se dice que dos caminos α y β en X son equivalentes si α y β son homotópicos relativamente a $\{0,1\}$. En este caso escribiremos $\alpha \sim \beta$ (Véase figura 5).

Por lo tanto, los caminos $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F : I \times I \rightarrow X$$

tal que

$$F(t, 0) = \alpha(t), \quad F(t, 1) = \beta(t), \quad \text{para todo } t \in I$$

$$F(0, s) = \alpha(0) = \beta(0), \quad F(1, s) = \alpha(1) = \beta(1), \quad \text{para todo } s \in I$$

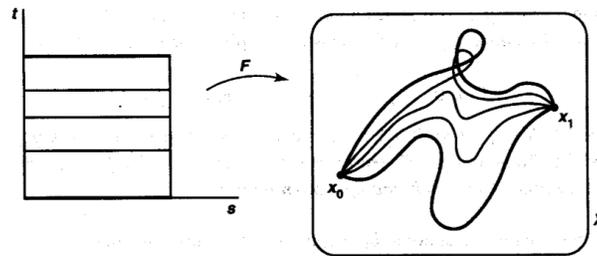


Figura 5: Caminos equivalentes (Munkres).

Por el Lema 3.1 tenemos que \sim es una relación de equivalencia. Denotemos por $[\alpha]$ la clase de equivalencia del camino α . Definimos ahora un producto de clases de equivalencia de caminos por

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

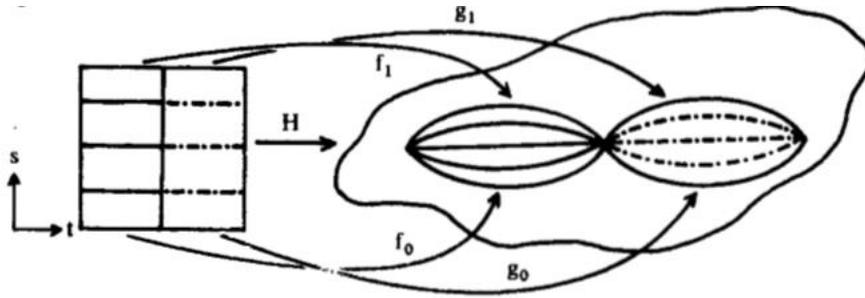


Figura 6: El producto de clases de equivalencia está bien definido.

El producto de caminos definido anteriormente tiene propiedades algebraicas que lo hacen un conjunto especial, a saber, las principales propiedades son:

Proposición. Sean α , β y γ caminos en X . Entonces:

1. El producto de sus clases de equivalencia es asociativo, es decir

$$([\alpha][\beta)][\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma]),$$

siempre y cuando este producto tenga sentido, es decir, si $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$.

2. Si $x \in X$, la clase de equivalencia del camino constante ϵ_x , se comporta como un elemento identidad (por la izquierda o por la derecha), esto es,

$$[\epsilon_a][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][\epsilon_b],$$

si α es un camino de a a b en X .

3. La clase del camino $\bar{\alpha}$ definido en el lema 2.1 actúa como inverso de la clase de equivalencia de α , es decir

$$[\alpha][\bar{\alpha}] = [\epsilon_a]$$

$$[\bar{\alpha}][\alpha] = [\epsilon_b]$$

para todo camino α de a a b en X .

Hemos visto que el conjunto de clases de equivalencia de caminos de X satisface los axiomas de grupo. Pero tenemos dos problemas que impiden que sea un grupo:

1. La multiplicación no siempre está definida para cualesquiera dos clases.
2. La identidad no es única.

Para evitar estos problemas usamos el concepto de camino cerrado.

Definición. Se dice que un camino α es **cerrado** o que es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(1)$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ decimos que α es un camino cerrado con **punto base** x .

Si tomamos un punto $x \in X$ y consideramos ahora el conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base x podemos ver que el producto de dos de esos caminos está siempre definido y tiene una única identidad, el camino constante ϵ_x .

Denotemos por $\pi_1(X, x)$ al conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base $x \in X$.

Teorema 5.1 El conjunto $\pi_1(X, x)$ es un grupo bajo el producto de clases de equivalencia de lazos con punto base $x \in X$.

A $\pi_1(X, x)$ se le llama el **grupo fundamental** de x con punto base X .

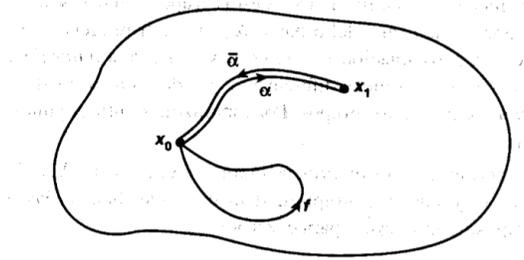


Figura 7: Teorema 5.2 (Munkres).

El grupo fundamental es precisamente una de esas herramientas que se mencionó al principio del trabajo, que en ocasiones nos permiten distinguir entre espacios topológicos distintos, pues si tenemos grupos fundamentales diferentes garantizamos que los respectivos espacios topológicos no pueden ser el mismo (topológicamente).

Ejemplo. Para \mathbb{R}^n , o cualquier subconjunto convexo de este tienen como grupo fundamental al grupo trivial, es decir, el grupo con únicamente el elemento identidad.

Ejemplo. En la circunferencia su grupo fundamental es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros \mathbb{Z} . El número entero asociado a cada lazo de S^1 es el número de vueltas que ese lazo da en torno a ella.

Ejemplo. Si X e Y son dos espacios topológicos arcoconexos, el grupo fundamental del producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es isomorfo al producto de los grupos de ambos espacios. El toro algebraico $S^1 \times S^1$ entonces tendría grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAFÍA

- Antonyan, S. A. (2009). *Curso de Topología*. Notas de clase, México: UNAM.
- Cisneros Molina, J. L. (2001). *Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes*. Notas de clase, México: UNAM.
- Munkres, J. R. (2002). *Topología*. 2da edición. Estados Unidos de América: Prentice-Hall Editorial.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 10

Y... ¿DÓNDE SE APLICAN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS?

Carlos Michelle Díaz Leyva, Asesor(a): Dra. María del Carmen Olvera Martínez

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas

cdiazleyva@gmail.com

Matemática Educativa

Investigaciones recientes sobre el uso de tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han reportado que la incorporación de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), en específico GeoGebra, promueve en los estudiantes la comprensión de conceptos matemáticos como el de función. Para el caso de la enseñanza en el nivel medio superior, se ha mostrado que GeoGebra permite a los estudiantes interactuar, construir y generalizar conceptos matemáticos por lo que se ha convertido en “una herramienta útil en la construcción de representaciones “exactas” de entidades geométricas (puntos, segmentos, rectas, círculos, polígonos, medianas, etc.) y que permite visualizar de manera precisa el comportamiento de partes de cierta configuración o representación del problema” (Santos-Trigo & Espinosa-Pérez, 2010, citado por Santos-Trigo, 2011: pág. 38).

De acuerdo con la Dirección General de Bachillerato (DGB, 2018), durante el cuarto semestre se espera que los estudiantes analicen el concepto de función, las diferentes familias de funciones y sus representaciones gráficas y, por último, algunas de sus aplicaciones. Dentro de las diferentes familias de funciones que se deben estudiar, se encuentran las funciones trigonométricas. La enseñanza de las funciones trigonométricas en este nivel, en algunas ocasiones tiende a ser tradicional y mecanizada, ya que a los estudiantes se les da a conocer una definición, la expresión algebraica y se les pide construir la gráfica correspondiente, a través de la tabulación, dejando de lado un análisis de las propiedades de estas funciones y algunas de sus aplicaciones más comunes. Además, Martínez-Sierra (2012) menciona que en el análisis de varios libros de texto del bachillerato mexicano se puede identificar la presencia de un patrón común en la construcción de las funciones trigonométricas, el cual consiste en seguir las transiciones de grados a radianes y después, a números reales en el dominio de las funciones trigonométricas, sin proponer problemas en donde los estudiantes puedan aplicarlas y darle significado a los conceptos adquiridos.

En este trabajo se muestra el diseño de una tarea matemática que tiene como objetivo proponer una manera de abordar el estudio de ideas fundamentales sobre el concepto de función trigonométrica a través de la resolución de problemas dentro de contextos reales y con el uso de GeoGebra, específicamente la función seno. Además, se proporciona una breve explicación de los que se espera que el estudiante realice para cumplir con el objetivo de la tarea.

La tarea tiene como nombre “Horas de luz solar” y tiene como objetivo el análisis de los parámetros de la función seno. Una de las estrategias que se considera importante en esta tarea es involucrar al estudiante en situaciones de contexto real con la finalidad de que pueda observar cómo y dónde se aplica esta función, pues un aspecto fundamental en el aprendizaje de las matemáticas se relaciona con la necesidad de que los estudiantes puedan utilizar eficientemente el conocimiento aprendido para desarrollar diferentes acercamientos

en la búsqueda de la solución (o soluciones) a problemas en diversos contextos (Santos-Trigo, 2007). Otra estrategia es el cuestionamiento constante dentro de la hoja de trabajo, la cual es una actividad importante dentro de la resolución de problemas, ya que permite al estudiante una reflexión constante de cómo puede relacionar los datos proporcionados, así como los encontrados a lo largo de la tarea, con la finalidad de dar respuesta a dichas preguntas. Cada una de las preguntas está pensada y planteada de manera que represente un reto para los estudiantes y genere la necesidad de contar con nuevos recursos para desarrollar nuevas estrategias de solución.

La estructura de la tarea está basada en el marco conceptual de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) el cual menciona que cuando un estudiante resuelve un problema con el uso de tecnologías digitales transita por cuatro episodios: *comprensión del problema, exploración del problema, búsqueda de múltiples acercamientos hacia la solución del problema e integración*. Estos episodios se retoman para presentar el diseño de la tarea y lo que se espera que se realice dentro de cada actividad.

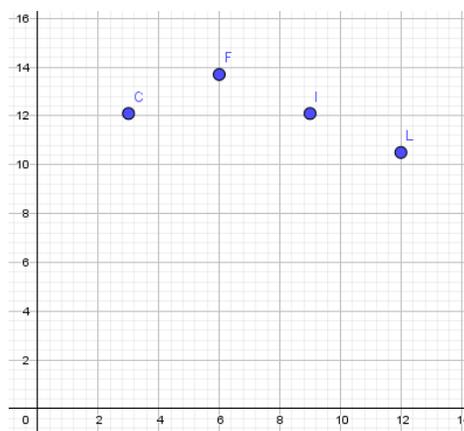
Comprensión del problema

En este primer episodio los estudiantes deben identificar cuál es la situación a la que se enfrentan, en este caso, la hoja de trabajo menciona que en la ciudad de Monterrey, México en el año 2015 se realizaron registros de la cantidad de horas de luz solar en el día, estos registros se llevaban a cabo los días 21 de cada mes y se obtuvo que el día con más horas de luz fue el 21 de junio con trece horas con cuarenta y dos minutos y, el día con la menor cantidad de horas de luz registrado en este año fue el 21 de diciembre con diez horas treinta minutos. Además, se registraron dos equinoccios (día en el cual la noche y el día tienen aproximadamente el mismo número de horas). Esta información se muestra en una tabla (ver Tabla 1) y se pide que respondan a la pregunta principal ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? y ¿Por qué?

Este episodio es un espacio para la discusión sobre la identificación de las variables dependiente e independiente, esto es, al momento de graficar se esperaría que en el eje de las abscisas ubiquen a los meses y en el eje de las ordenadas, a las horas de luz registradas en cada mes en una notación decimal (ver Figura 1).

Tabla 12. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Monterrey, México. Figura 16. Datos de la Tabla 1 Graficados en GeoGebra.

Mes	Horas de luz solar
Enero	
Febrero	
Marzo	12.10
Abril	
Mayo	
Junio	13.77
Julio	
Agosto	
Septiembre	12.10
Octubre	
Noviembre	
Diciembre	10.5



Como la pregunta principal demanda encontrar la función que representa estos datos, se pretende que los alumnos sientan la necesidad de conocer más datos, por lo que, se les

proporciona una página web de donde pueden obtener los datos faltantes y completar la tabla (ver Tabla 2).

Tabla 17. Horas de luz solar registradas los días 21 de cada mes en el 2015 en la ciudad de Monterrey

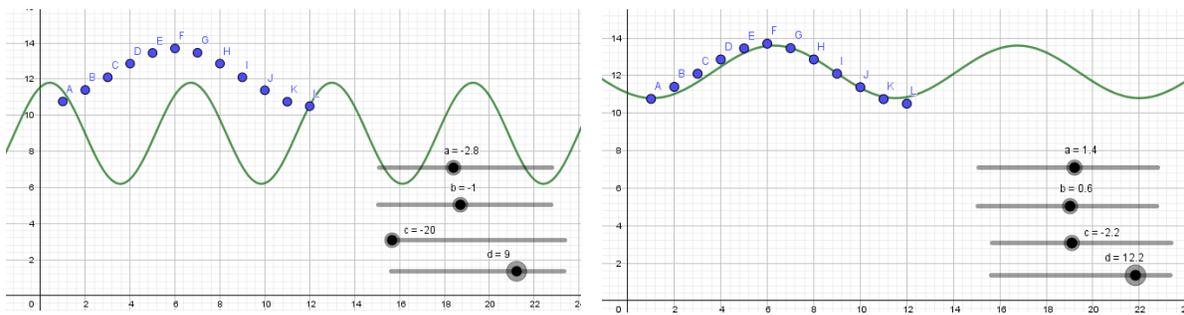
Mes	Horas de luz solar
Enero	10.76
Febrero	11.4
Marzo	12.10
Abril	12.86
Mayo	13.45
Junio	13.77
Julio	13.46
Agosto	12.86
Septiembre	12.10
Octubre	11.38
Noviembre	10.75
Diciembre	10.5

Con la intención de que los alumnos puedan reconocer que se trata de una función con un comportamiento cíclico, se les plantea la pregunta, ¿cuál crees que sea el comportamiento de los días 21 de cada mes del año 2016? Se espera que los estudiantes analicen los datos registrados en la ciudad de Monterrey, México en el año 2015 y 2016 e identifiquen que se tienen un comportamiento periódico, es decir, este fenómeno se repetirá dentro futuros años, es por eso que la gráfica de la función que pudiera ajustarse a los datos anteriores puede ser la función seno, ya que, una de sus características es que es cíclica. Sin embargo, no se debe descartar que existen otras opciones como la función coseno.

Exploración del problema

Para este episodio se propone la exploración de la función seno e identificar el comportamiento que tiene la gráfica al variar el valor de sus parámetros. Por lo que se espera que en GeoGebra, se creen deslizadores para cada parámetro de la función $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx + c) + d$ y los manipulen hasta que la gráfica se ajuste a los puntos que tienen graficados (ver Figura 2). Una función que se puede obtener y que “mejor” se ajusta a los puntos es $f(x) = 1.53 \cdot \text{sen}(0.53x - 1.57) + 12$.

Figura 2. Manipulación de los parámetros en GeoGebra.



Otra de las preguntas que se plantean en la hoja de trabajo está relacionada con la descripción de lo que observan que sucede en la gráfica de la función seno cuando se mueven los deslizadores de los parámetros a , b , c y d , de manera que los estudiantes identifiquen que: el parámetro a es la amplitud de onda, el parámetro b es la frecuencia de onda, el parámetro c es el desplazamiento por el eje horizontal y el parámetro d es el desplazamiento por el eje vertical.

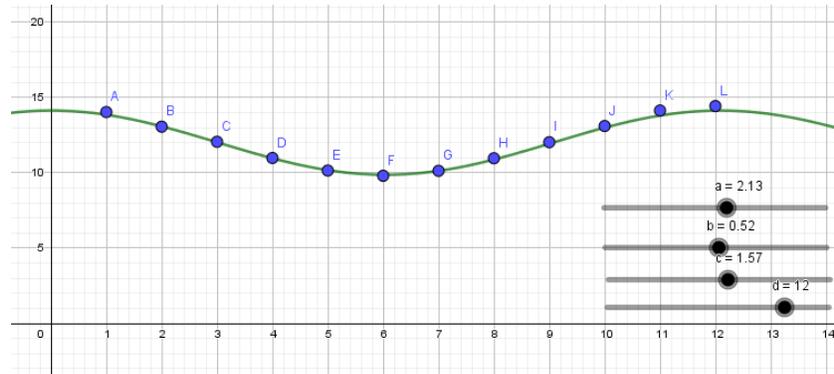
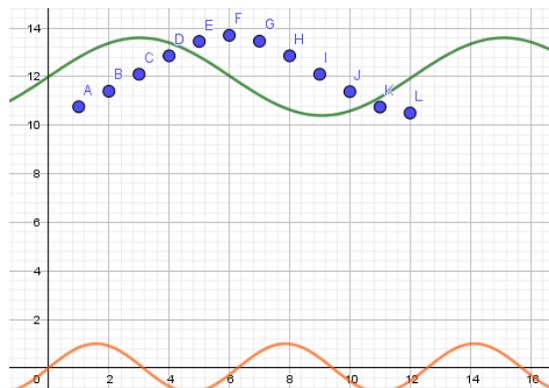
Búsqueda de múltiples acercamientos

Después de analizar el funcionamiento de cada uno de los parámetros de la función seno, se les presenta una nueva situación en donde la información se obtiene de la ciudad de Buenos Aires, Argentina en el año 2015 (ver Tabla 3). Ahora, los estudiantes deben encontrar la gráfica de la función seno que modela estos datos pero sin el uso de GeoGebra.

Tabla 3. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Mes	Horas de luz solar
Enero	14.03
Febrero	13.06
Marzo	12.06
Abril	10.98
Mayo	10.15
Junio	9.8
Julio	10.13
Agosto	10.96
Septiembre	12.03
Octubre	13.1
Noviembre	14.03
Diciembre	14.43

Los estudiantes pueden buscar en Internet y en libros de matemáticas algunas fórmulas que les permitan encontrar los parámetros de la función seno. Las fórmulas que pueden encontrar son las siguientes: $amplitud(a) = \frac{valor\ máximo - valor\ mínimo}{2}$ y $periodo = \frac{2\pi}{b}$, $b = \frac{2\pi}{periodo}$. Como para los parámetros c y d no encuentras fórmulas especiales, se espera que grafiquen en GeoGebra para: (1) encontrar valores aproximados de los parámetros (ver Figura 3); (2) realicen una comparación con la gráfica $f(x) = \text{sen}(x)$ y la gráfica que modelaba los datos en la ciudad de Monterrey (ver Figura 4). Se espera que puedan observar que la función seno tiene intersección en el punto $(0,0)$ y al poner el deslizador c en cero se observa que la función tiene una intersección en el punto $(0,12)$, por lo que $d = 12$. También, se espera que observen que el valor máximo de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ coincide con el mes de marzo y, por lo tanto, los estudiantes concluyan que la función está desplazada 3 meses, de tal manera que si $12\text{ meses} = 2\pi$, donde 2π es el periodo de la función seno, entonces $3\text{ meses} = c = \frac{\pi}{2}$.

Figura 3. Grafica de la ciudad de Buenos Aires, Argentina realizada por los estudiantes.**Figura 4. Comparación de las gráficas de la función seno y la encontrada para la ciudad de Monterrey.**

Los estudiantes deben considerar que cuando el desplazamiento es a la derecha el signo es negativo y cuando el desplazamiento es a la izquierda el signo que acompaña al valor de c es positivo. En el caso de la ciudad de Buenos Aires el desplazamiento horizontal era hacia la izquierda, por lo tanto el desplazamiento es positivo. Al tener calculado los cuatro parámetros, los estudiantes deben concluir que la función que modela los datos de la ciudad de Buenos Aires es: $f(x) = 2.13 * \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right) + 12$.

Integración de los acercamientos hacia la solución del problema

En el cuarto episodio los estudiantes deben aplicar los conocimientos que obtuvieron al pasar por los tres episodios anteriores. En este episodio se les pide en la hoja de trabajo que, con base en lo observado, encuentren cuántas horas de luz habrá el día 21 de diciembre del 2018 en la ciudad de Monterrey y que justifiquen su respuesta.

Se espera que algunos estudiantes mencionen que la función seno pertenece a la familia de funciones periódicas y que, por lo tanto, habrá la misma cantidad de horas de luz que en el 2015, o bien, una cantidad muy aproximada. Sin embargo, se promueve que utilicen la función que modela el comportamiento de los datos.

Durante el análisis del comportamiento de las dos ciudades se debe enfatizar en el hecho de que mientras en Monterrey el día con mayor cantidad de horas de luz solar es en junio, en Buenos Aires es en diciembre. Para investigar por qué sucede esto, se pide en la hoja de trabajo que vean un video de la página de Youtube y lo relacionen con lo trabajado en la hoja. Los estudiantes deben identificar que el ángulo de inclinación del planeta es el que provoca que mientras en Monterrey es verano (temporada en la que se tiene mayor número

de horas de luz solar al día) en Buenos Aires es invierno (temporada en la que hay menos horas de luz solar al día).

Esta hoja de trabajo promueve la interdisciplinariedad, ya que, combina elementos de matemáticas con elementos de física y geografía. Lo anterior, puede ayudar a que el estudiante se sienta motivado e interesado por el tema que va a estudiar y le pueda dar significado a cada uno de los conceptos matemáticos involucrados en este problema de aplicación. Además, el uso de GeoGebra permite que los estudiantes puedan analizar y formular conjeturas con base en las exploraciones que difícilmente se harían a papel y lápiz y, posteriormente, lleguen a justificarlas a través de argumentos matemáticos.

Referencias

- Dirección General de Bachillerato (2018). *Matemáticas IV. Programa de estudios. Cuarto semestre*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(1), 35-62.
- Santos-Trigo, M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos*. Fundamentos Cognitivos. México D. F., México: Trillas.
- Santos-Trigo, M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(8). 35-54
- Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

[Programa general](#)

DIRECTORIO DE PARTICIPANTES

[A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [F](#) [G](#) [H](#) [I](#) [J](#) [K](#) [L](#) [M](#) [N](#) [O](#) [P](#) [Q](#) [R](#) [S](#) [T](#) [U](#) [V](#) [W](#) [X](#) [Y](#) [Z](#)

[Programa general](#)

A

Acevedo Romero Mirka Maily

Alvarado Monroy Angelina

aalvarado@ujed.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)

B

Barraza Barraza Diana

diana.barraza@ujed.mx

Bello Aguirre Ricardo Isaac

ricardo.bello.aguirre@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

C

Candia Vargas Juan

lma.candia@gmail.com

Cano Rodríguez Florita Iliana

knoiliana@gmail.com

Carmona Ortega Jessica Lizeth

laice030@hotmail.com

Carrasco Gámez Sergio

cags9607@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

D

Díaz Leyva Carlos Michelle

cdiazleyva@gmail.com

Dozal Alcantar Omar

VI_blackblood_IX@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

E

Escobedo Bustamante Adriana

adriana.escobedo@ujed.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)

F

[Directorio](#)

[Programa general](#)

G

Galindo Solís Martha Patricia

patriciagaso@hotmail.com

Gómez Meza Marisela

emgm77@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

H

Hernández Moreno Edgar

chegarp27b@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

I

[Directorio](#)

[Programa general](#)

J

[Directorio](#)

[Programa general](#)

K

[Directorio](#)

[Programa general](#)

L

López Betancourt Alicia

ablopez@ujed.mx

López Castro David Emmanuel

davidlopez586493@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

M

Marín Gómez Edgar Rafael
edgarmarin604@gmail.com

Martínez Sánchez Jafed Alejandro
jafsed@hotmail.com

Mata Cano Jesús Eduardo
matac77@hotmail.com

Mata Romero Armando
armandomr@ujed.mx

Mercado Favela Eybette
eybette_mercado@hotmail.com

Moreno González Brayam Antonio
brayam02@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

N

Nevárez Nieto Saul
saul_2n@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

O

[Directorio](#)

[Programa general](#)

P

Pacheco Juárez Yaziel

yazi28@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Q

[Directorio](#)

[Programa general](#)

R

Rodríguez Estala Yaremi Elizabeth

yare-rm@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

S

Salcedo Talamantes Elisa

elisa_st_1995@hotmail.com

Solís Beltrán Silvia Janeth

janeth_kltz_89@hotmail.com

Soria Pérez Alejandra

alegodel@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

T

[Directorio](#)

[Programa general](#)

U

[Directorio](#)

[Programa general](#)

V

Valdez Hernández Alondra
alondra.valdez96@outlook.com

Vargas Antuna Raúl
raul.vargas@cimat.mx

Vargas Betancourt Enrique
quique_vab@ujed.mx

Vázquez Arroyo Rodolfo
rudicops@hotmail.com

Véliz Romero Francisco Gerardo
frankgerardo048@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

W

[Directorio](#)

[Programa general](#)

X

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Y

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Z

Zamora Ríos Rosa Angélica
rzamora@ujed.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)