Universidad Juárez del Estado de Durango
Facultad de Ciencias Exactas

DE PROFESORES PARA PROFESORES:
Funciones con GeoGebra

PROYECTO:

La incorporación de las herramientas digitales en la enseñanza de funciones en el nivel medio superior

Con el financiamiento del Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP)

RESPONSABLE DEL PROYECTO:
DRA. MARÍA DEL CARMEN OLVERA MARTÍNEZ

Universidad Juárez del Estado de Durango

Facultad de Ciencias Exactas

De profesores para profesores: Funciones con GeoGebra

ISBN: En trámite

Proyecto:

La incorporación de las herramientas digitales en la enseñanza de funciones en el nivel medio superior

Con el financiamiento del Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP) dentro de la convocatoria de Apoyo a la Incorporación de NPTC 2017 con clave UJED-PTC-122.

Responsable del proyecto:

Dra. María del Carmen Olvera Martínez

Colaboradores:

Carlos Michelle Díaz Leyva

Dulce María Reyes Rojas

Dyada Villarreal Soto

Jorge Armando Ríos Escobedo

Karla Rocío Campos Martínez

Liliana Aurora Tabares Sánchez

María Elena Irigoyen Carrillo

Mario Alberto Alvarado Quiñones

Durango, Durango, México, diciembre de 2018

Índice

Presentación

Este libro es uno de los productos del trabajo realizado dentro de las actividades del proyecto de investigación denominado "La incorporación de las herramientas digitales en la enseñanza de funciones en el nivel medio superior" que se llevó a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas con el apoyo del Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP) dentro de la convocatoria de Apoyo a la Incorporación de NPTC 2017 con clave UJED-PTC-122.

Como parte de este proyecto, se llevó a cabo un diplomado que tuvo como objetivo promover en profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato, de manera inicial, el análisis de las características y propiedades del concepto de función para que, posteriormente, desarrollaran conocimientos sobre funciones a través del trabajo con actividades que propiciaran el uso coordinado de herramientas digitales como la hoja electrónica de cálculo, sistemas de geometría dinámica e Internet (enciclopedias en línea, sitios de información de acceso público, videos). También, se promovió el análisis y la reflexión sobre el proceso de elaboración y características de secuencias didácticas que involucren la incorporación de herramientas digitales para favorecer la comprensión y construcción del conocimiento matemático en los estudiantes. En este sentido, se promovió que los profesores, además de profundizar en su conocimiento sobre funciones, ampliaran sus recursos para fomentar el uso de tecnologías digitales dentro del aula de matemáticas.

En este diplomado participaron diez profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato de la ciudad de Durango, México, los cuales en la última parte del curso se involucraron en el diseño de tareas matemáticas que promovieran la construcción de conocimiento sobre funciones en sus estudiantes, apoyados del uso de tecnologías digitales. Como resultado de este proceso, se tuvo el diseño de 14 actividades en las que se abordan algunas ideas fundamentales sobre función lineal, función cuadrática, función racional, función exponencial, función logarítmica, funciones trigonométricas (función seno), funciones monótonas y se incorporó el uso del Sistema de Geometría Dinámica (SGD), GeoGebra, la hoja electrónica de cálculo e Internet.

Previo al diseño de cada una de las secuencias didácticas se analizaron cuatro aspectos relevantes que deben ser considerados: (1) el objetivo de aprendizaje; (2)

las actividades de aprendizaje, (3) el pensamiento de los estudiantes, y (4) los conocimientos previos de los estudiantes, tanto matemáticos como tecnológicos.

Como parte del objetivo de aprendizaje, de maneral general, en las actividades se pretende analizar y reflexionar sobre las principales ideas que giran en torno al estudio del concepto de función. Se consideraron las cinco grandes ideas sobre funciones propuestas por Cooney, Beckmann, & Lloyd (2010): el concepto de función, covariación y tasa de cambio, familias de funciones, combinación y transformación de funciones y múltiples representaciones de funciones (Figura 1).

Figura 1. Cinco Grandes Ideas sobre Funciones (Cooney et al., 2010).

¿Qué es una función? ¿Cuáles son las principales características que definen a una función? ¿Qué tipos de funciones existen? ¿Cómo se caracterizan los diferentes tipos de funciones? ¿Qué condiciones se deben cumplir para que dos funciones puedan combinarse? ¿De qué manera se representa una función? Son algunas de las preguntas en las que se basa el conjunto de actividades diseñadas. De manera específica, en cada una de las actividades, se enfatiza y profundiza en algunas ideas fundamentales que seleccionaron los profesores participantes, las cuales se comentan en la descripción del objetivo de cada actividad.

Las actividades de aprendizaje están inmersas dentro de un ambiente de resolución de problemas. Se consideró que los problemas involucrados, realmente sean un problema para las personas que se espera que lo resuelvan, es decir, que sean una tarea que implique un reto para ellos. En este sentido, en este libro, un problema es considerado como una tarea en la cual aparecen los siguientes componentes:

» La existencia de un interés; es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.

- La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.
- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo. (Santos-Trigo, 2007, p. 51)

En las actividades se promueve el desarrollo del pensamiento matemático el cual involucra la formulación de preguntas, conjeturas, relaciones y el uso de distintos tipos de argumentos (Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2005). Además, se pone especial atención a que el tipo de problemas permitan no solo buscar respuestas o explicaciones, sino también pensar en torno al significado y formas de razonamiento asociadas con la solución de los problemas. También, se fomenta que el resolutor constantemente refine y transforme sus ideas y formas de pensar por medio de la comprensión o desarrollo de ideas matemáticas que conlleven procesos de reflexión dentro de un ambiente activo y participativo en una comunidad de aprendizaje (Santos-Trigo, 2008).

Dick y Hollebrands (2011) enfatizan en la importancia de que los estudiantes usen la tecnología como medio para fomentar hábitos de resolución de problemas y señalan que las fases del proceso de solución adquieren otro significado cuando se incorpora el uso sistemático de herramientas digitales. Dichas fases involucran:

> Analizar el problema: identificar cuáles herramientas tecnológicas son apropiadas para usar y cuándo usarlas.
>
> Implementar una estrategia: hacer un uso útil de las herramientas tecnológicas y monitorear el progreso hacia la solución.
>
> Búsqueda y uso de conexiones: especialmente mirando a través de diferentes representaciones.
>
> Reflexionar sobre la solución del problema: considerar la racionalidad de los resultados obtenidos en las herramientas tecnológicas, reconocer las limitaciones de estas, conciliar los diferentes enfoques (con y sin tecnología) e interpretar los resultados en el contexto del problema. (p. xiii)

Para la estructura de las actividades se consideraron las fases anteriores y las propuestas por Polya (1945) como un camino para resolver problemas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Estas fases van acompañadas de cuestionamientos constantes por parte del profesor o del mismo resolutor, para evitar el desvío en el camino de la solución. Para Polya, la tarea principal del profesor dentro de la resolución de problemas es orientar al estudiante de manera discreta, sin imposiciones, tratar de comprender qué pasa por su mente y plantear alguna pregunta que pueda dar pistas de algún camino de solución. El propósito central de una enseñanza basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiantes con un bagaje de estrategias y habilidades, sino permitirles pensar por ellos mismos (Santos-Trigo, 2007).

Las fases propuestas por Polya (1945) han sido repensadas en términos de la incorporación de herramientas digitales en la resolución de problema. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) proponen cuatro episodios que pueden ayudar a estructurar y analizar las maneras de usar las herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático cuando se resuelven problemas: comprensión del problema, exploración del problema, diferentes acercamientos hacia la solución del problema, e integración de los acercamientos.

Estos cuatro episodios fueron retomados para el diseño de las actividades que aquí se presentan.

1) El episodio de *comprensión del problema* es considerado crucial para pensar en las posibles maneras de resolverlo; aquí se identifican los elementos relevantes en el enunciado del problema y se piensa en cómo relacionarlo para explorar matemáticamente el problema.
2) En la *exploración del problema*, se utiliza la información que se identificó en la fase de comprensión y se elige la manera de representar y explorar el problema, con la finalidad de observar e identificar patrones y relaciones entre objetos matemáticos, por ejemplo, el uso de un DGS como GeoGebra es un medio para construir modelos dinámicos del problema que posibilita la visualización de invariantes y patrones.
3) En el episodio *diferentes aproximaciones hacia la solución del problema*, se promueve la búsqueda de múltiples estrategias de solución con la finalidad de que se tenga la oportunidad de usar diferentes conceptos y recursos para

representar, explorar y resolver problemas; por ejemplo, se pueden considerar acercamientos dinámicos, algebraicos y geométricos.

4) En el episodio de *integración,* se analizan los diferentes acercamientos, los argumentos que apoyan las estrategias usadas y las justificaciones de las conjeturas generadas durante las exploraciones.

Este marco permitió estructurar y guiar el diseño de las actividades de manera que promovieran el desarrollo del pensamiento matemático, haciendo énfasis en la construcción de modelos dinámicos que permitieran un acercamiento inicial de tipo visual o empírico hacia la solución del problema.

El uso de tecnologías digitales ofrece oportunidades únicas para el análisis de problemas, la aplicación de estrategias, la búsqueda y uso de conexiones, así como la reflexión sobre las soluciones. "El uso de diferentes herramientas digitales ofrece la posibilidad de examinar tareas matemáticas desde distintas perspectivas que incluyen aproximaciones visuales, gráficas, numéricas y algebraicas" (Santos-Trigo, 2010, p. 310). Además, la interacción con tecnologías digitales permite la utilización de imágenes visuales de las ideas matemáticas y la observación de comportamiento o relaciones trascendentes en un problema; organizar y analizar los datos del problema; representar datos en distintos sistemas como el tabular, gráfico y numérico (Santos-Trigo, 2007). De esta manera, el estudiante también puede establecer conexiones entre diversas áreas de las matemáticas como, por ejemplo: aritmética, álgebra, geometría y cálculo.

La razón por la cual se eligió el uso del sistema de geometría dinámica, GeoGebra, es porque en este ambiente, los estudiantes o profesores pueden crear un modelo dinámico en el cual se representen las características y condiciones que le dan sentido al enunciado del problema, mediante objetos geométricos como: líneas, segmentos, puntos, circunferencias, ángulos, entre otros. Además, los estudiantes o profesores tienen la oportunidad de examinar el modelo creado desde diferentes perspectivas con el objetivo de identificar un conjunto de relaciones y conjeturas, y justificarlas con argumentos matemáticos (Santos-Trigo & Reyes- Rodríguez, 2011).

El movimiento es una de las principales características de un DGS. Usar la herramienta de Arrastre, a través del mouse, permite que los objetos que se visualizan en la pantalla puedan ser movidos. El arrastre favorece el uso o aplicación de algunas heurísticas como la de considerar casos particulares del problema, pues al construir el modelo dinámico y modificarlo mediante el arrastre se obtiene una familia de ejemplos que satisfacen el conjunto de condiciones o relaciones que ayudan a identificar posibles caminos conducentes a la solución del problema; así como la formulación de conjeturas y generalización de resultados matemáticos (Reyes-Rodríguez, 2009). Lagrange y Psycharis (2014) comentan que las exploraciones mediante arrastre en un DGS ayudan al estudiante a conceptualizar la covariación, pues ciertos objetos geométricos se mueven de manera continua y es posible observar cómo la construcción geométrica dependiente responde a ese movimiento. También, el uso de los deslizadores en GeoGebra ofrece la oportunidad de variar los valores de parámetros y efectuar exploraciones que lleven a la generación y prueba de conjeturas, así como a posibles generalizaciones de casos particulares (Cullen, Hertel, & John, 2013).

Es así como, con base en estas ideas, en las 12 actividades diseñadas por los profesores participantes en el diplomado se encontrará, de manera inicial, el objetivo general de la actividad y, posteriormente, después de cada pregunta o tarea se tiene una breve explicación de lo que se espera que el estudiante realice para que el profesor lo tenga de referencia de cuál debe ser su participación y hasta dónde los debe llevar.

De igual manera, en cada actividad se tiene un enlace a los archivos en GeoGebra que se espera que los estudiantes construyan, o bien, aquellos a los que se hace referencia dentro de las actividades. También, al inicio de cada actividad se muestra el nombre del profesor que participó en el diseño, y su correo electrónico, con la intención de en caso de que existiera alguna duda de la actividad sea posible ponerse en contacto con el autor. En la última parte del libro, se encuentran las 12 actividades acomodadas de manera que el profesor pueda imprimirlas de manera directa para su aplicación.

De esta manera, esta colección de actividades pretende ser una propuesta para la incorporación de tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Asimismo, es una invitación para que profesores de matemáticas se involucren tanto en la implementación de estas actividades y nos compartan sus resultados y experiencias, como en el diseño de más actividades que aborden otras ideas fundamentales sobre funciones, o bien, otros conceptos matemáticos. Esperamos que este material de apoyo diseñado *por profesores para profesores* de matemáticas sea de utilidad y promueva la incorporación de tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Actividades

Función lineal

Las siguientes actividades pretenden lograr una aproximación a la función lineal a través de la resolución de problemas y el uso de GeoGebra. Por medio de las secuencias de preguntas y el tratamiento que se realiza utilizando la herramienta tecnológica se busca que los estudiantes establezcan relaciones entre cantidades variables y puedan reconocer diferentes representaciones de estas, así como de las implicaciones de su variación. También, se espera que los estudiantes logren dar sentido a conceptos y objetos matemáticos involucrados en la resolución de problemas.

1.1) Actividad: Llaves

Autor: Mtra. Dyada Villarreal Soto

Correo: dyadavillareal@gmail.com

En la actividad se analiza el llenado de un estanque usando dos llaves con diferentes caudales. Lo que podría verse como un problema clásico de variación proporcional, intenta ser una oportunidad para analizar la razón de cambio, la pendiente de una recta y la modelización de un fenómeno utilizando un ambiente de geometría dinámica.

Llaves

Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo? Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuántos litros de agua aporta la llave 1 en una hora?
2. ¿Qué parte del estanque se llena con la primera llave en una hora?
3. ¿Qué parte del estanque se ha llenado después de abrir la llave 1 durante una hora y media?

La intención de las primeras tres preguntas es dirigir la atención de los estudiantes al análisis del llenado del estanque. Primero, se pretende que los alumnos reconozcan que, usando la primera llave después de una hora se habrá llenado una cuarta parte del estanque. Después, con la pregunta tres, se busca que los estudiantes desarrollen una estrategia para calcular la fracción del estanque que se llena para una cantidad cualquiera de tiempo.

4. ¿Cuántos litros de agua aporta la llave 2 en una hora?
5. ¿Qué parte del estanque se llena con la segunda llave en una hora?
6. ¿Cuánta agua habrá en el estanque si se abre solamente la llave 2 por cuatro horas?

Como se pensó al inicio de la hoja de trabajo, las preguntas 4, 5 y 6 tienen la intención de que los alumnos reflexionen sobre el llenado del estanque, esta vez con la segunda llave.
Se espera que logren concluir que, en cada hora se llena un sexto de la capacidad del estanque.

7. ¿Cómo será el llenado del estanque utilizando las dos llaves de forma simultánea?

Esta pregunta plantea el problema en el que se centra la atención durante esta actividad. Se pretende que los alumnos adviertan que el estanque se llenará más rápido si se usan las dos llaves de manera simultánea, por lo tanto, el tiempo de llenado debe ser menor a cuatro horas.

8. ¿Qué pasaría si se abrieran las dos llaves durante tres horas?

Los estudiantes pueden hacer una predicción o estimación para contestar la pregunta. Si han logrado comprender que el tiempo de llenado debe ser menor a cuatro horas, con esta pregunta se busca que se acerquen a la respuesta de la pregunta 7.

9. ¿Qué parte del estanque se llena con las dos llaves en una hora?

Hasta este momento se ha concluido que usando la primera llave el estanque se llena a un cuarto de su capacidad y que. usando la segunda se llena un sexto del total. Se espera que los alumnos propongan sumar $^1/_4$ *y* $^1/_6$*, obteniendo que, al cabo de una hora, el estanque se habrá llenado hasta* $^5/_{12}$ *de su capacidad.*

10. ¿Cuánto tiempo deben estar abiertas las llaves, simultáneamente para que el estanque se llene completamente?

La pregunta devuelve la atención a la cuestión principal. Si los alumnos saben qué fracción del total se habrá llenado después de una hora, pueden trabajar numéricamente en encontrar la respuesta. Se propone la exploración del fenómeno a través de una construcción dinámica en GeoGebra para profundizar en el comportamiento del llenado del estanque.

Explorando en GeoGebra.

Utilizando GeoGebra analiza y explora el llenado del estanque a partir de la información disponible y reflexiona:

11. ¿Qué variables puedes identificar asociadas al problema y cómo las relacionas con los ejes del plano cartesiano?

Se pretende que los estudiantes asocien el eje Y con la capacidad del estanque y el eje X con el tiempo expresado en horas.

12. Coloca un punto A en el eje Y que represente la capacidad del estanque, ¿Qué valor sería adecuado para mostrar que el estanque está lleno? ¿Por qué?

Puede discutirse si el punto A puede ubicarse en cualquier lugar. Si bien puede encontrarse la solución del problema gráficamente, aunque se ubique el punto A en cualquier lugar del *eje Y, es importante, para el análisis posterior, que se localice en 1 ya que se habla del estanque como unidad.*

El profesor puede orientar a los alumnos para que ajusten la escala del eje Y y la visualización sea más conveniente.

13. Traza una recta perpendicular al eje Y que pase por el punto A.
14. Traza un punto B sobre el eje X pasando por 4 y una perpendicular al eje pasando por B.
15. Marca el punto C que se encuentra en la intersección de las dos rectas perpendiculares. En el contexto del problema, ¿Qué significado tiene ese punto?

Se pretende que el estudiante reconozca que este punto de intersección representa el momento en el que el estanque se encuentra lleno al emplearse la llave 1, cuatro horas.

16. ¿Cómo representas el tiempo que tarda la segunda llave? Realiza los trazos necesarios para mostrar el llenado por medio de la llave 2.

Con los trazos anteriores como antecedente, se espera que los alumnos tracen una recta perpendicular al eje X pasando por 6 y localicen el punto E (6,1).

El profesor puede auxiliar a los alumnos que lo requieran para completar la tarea.

17. Traza el segmento i desde el origen hasta el punto C. Colorea el segmento de azul.
18. Traza el segmento j desde el origen hasta el punto E y coloréalo de rojo.
19. Coloca un punto P móvil sobre el eje X que permita representar una cantidad de tiempo variable.
20. Traza una recta k, perpendicular al eje X, que pase por el punto P. Esta perpendicular interseca a los segmentos i y j.
21. Coloca un punto G en la intersección de la recta perpendicular k con el segmento i. Traza un segmento desde P hasta G (segmento l), ¿Qué representa este segmento?

Se espera que los alumnos contesten que el segmento representa la parte del estanque que se llena cuando ha transcurrido la cantidad de tiempo dada por P mientras se utiliza solamente la llave 1.

22. Ubica el punto P en (1, 0), en este momento, ¿qué significa la posición del punto G?

El punto G indicará en este momento que se ha llenado ¼ o 0.25 de su capacidad.

23. Coloca un punto H en la intersección de la recta k con el segmento j y traza el segmento m desde P hasta H ¿Qué representa este segmento?

El segmento representa la parte del estanque se ha llenado al usarse solamente la segunda llave, por ejemplo, si P se encuentra en (1,0), el segmento m medirá 1/6.

24. Ahora se desea representar gráficamente la cantidad de agua que hay en el estanque si se usan las dos llaves de forma simultánea para su llenado, para esto suma las longitudes de los segmentos l y m. Introduce el siguiente texto en la barra de entrada:

Suma=l + m

Centra tu atención en el resultado de la suma, ¿Cuánto tiempo se necesita para que el estanque se llene hasta un cuarto de su capacidad usando las dos llaves de forma simultánea?

25. Coloca un punto S que represente la cantidad de agua que hay en el estanque en una cantidad P de tiempo y muestra sus coordenadas. En la barra de entrada escribe lo siguiente:

S=(x(P), Suma)

El profesor puede socializar sobre el significado de la suma de los segmentos l y m, incluso puede hacerse referencia a la pregunta nueve -que implicaba que los alumnos sumaran la cantidad de agua que aporta cada llave en una hora- y pedir a los alumnos que coloquen el punto P en 1 para que comparen el resultado que habían obtenido con la información provista por su construcción en GeoGebra. Se espera que comprueben que $\frac{5}{12} \approx 0.42$ *(debe mencionarse que el software hace un redondeo).*

En lo que respecta al punto S, x(P) se refiere al valor de la abscisa de P, que indica el tiempo transcurrido; y la parte "Suma" hace referencia a la cantidad de agua vertida en el estanque por las dos llaves.

26. Mueve el punto P. ¿Cómo identificas el momento en el que el tanque está lleno?
27. Usa tu construcción para contestar: ¿Cuánto tiempo deben estar abiertas las llaves, simultáneamente para que el estanque se llene completamente?

Para profundizar

28. Obtén el lugar geométrico del punto S cuando se mueve el punto P. ¿Qué características tiene el lugar geométrico que encontraste?
29. ¿Cómo te ayuda el lugar geométrico para responder a la pregunta 27?

Con la pregunta 28 y 29 se espera que el estudiante identifique que la solución se encuentra en la intersección de la recta $y = 1$ *y el lugar geométrico. Sin embargo, en GeoGebra no es posible ubicar ese punto mediante el comando "punto de intersección", por lo que surge la* *necesidad de encontrar la fórmula del lugar geométrico para poder trazarlo directamente. Para lo anterior se sugieren las preguntas siguientes.*

30. Obtén la pendiente del segmento i, ¿cómo interpretas este valor?
31. Obtén la pendiente del segmento j, ¿qué significado tiene este valor?
32. Obtén la pendiente del lugar geométrico, ¿Qué observas?

El análisis de la pendiente tiene la intención de establecer relaciones entre la representación gráfica que se ha hecho del problema y el análisis numérico que se realizó al inicio de la actividad. La pendiente del segmento i *es* $\frac{1}{4} = 0.25$ *(parte del estanque que es llenado en una hora por la llave 1), así mismo, la pendiente del segmento* j *es* $\frac{1}{6} \approx 0.17$.

Sin embargo, los estudiantes encontrarán que no pueden obtener la pendiente del lugar geométrico de S. El profesor deberá tratar esto con los estudiantes y plantear la necesidad de encontrar una recta que represente gráficamente el llenado del estanque con las dos llaves y por lo tanto, su expresión algebraica para poder trazarla.

33. ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el llenado del estanque?

El profesor puede apoyar a los alumnos para que formulen la expresión $y = \frac{5}{12}x$

34. Graficá en tu construcción la expresión anterior, ¿Cuál es la pendiente de esta recta?
35. ¿Qué sucede con el lugar geométrico después de 4 horas? ¿Por qué crees que ocurre esto?

Después de 4 el lugar geométrico no existe puesto que depende de la suma los segmentos l y m, mismos que describen el llenado del estanque por las llaves 1 y 2, respectivamente. A partir de 4 horas, el segmento l ya no existe.

En el archivo https://www.dropbox.com/s/mxcssi7pkp8jzvm/Llaves.ggb?dl=0se encuentra el modelo dinámico del problema, que se espera que construyan los estudiantes.

1.2) Actividad: Soluciones

Autor: Mtra. Dyada Villarreal Soto

Correo: dyadavillareal@gmail.com

La actividad se centra en la observación de la composición de una solución de agua y sal. Los alumnos exploran las relaciones entre variables y ponen en juego la dependencia de las estas. Análisis del comportamiento de la concentración (qué significa la concentración al 0%)

Soluciones

Agua al 5% de sal

Un tanque contiene 80 litros de agua al 5% de sal.

1. ¿Qué significa la expresión “al 5% de sal”?
2. ¿Qué cantidad de sal contiene cada litro de agua al 5% de sal?
3. ¿Qué cantidad de sal se tiene en 20 litros de solución al 5% de sal? ¿Y en 25 litros? ¿Qué procedimiento usas para averiguarlo?
4. Completa la siguiente tabla representa las cantidades de agua y sal en una solución de agua al 5% de sal.

Cantidad de líquido (en litros)	Cantidad de sal
1	
5	
20	
40	
50	
80	
X	

La tabla tiene como propósito consolidar el significado de la relación que se analiza. Agua al 5% de sal implica que en una cantidad cualquiera de líquido (al 5%) 5 de 100 partes son sal. Se busca que los alumnos lleven a cabo el desarrollo de una estrategia que les permita llenar la tabla sin perder de vista la relación establecida entre las dos variables.

Hacia el final, se recomienda al profesor orientar la atención del alumno hacia la generalización. Si llamamos x a la cantidad variable de solución y se denota con y a la cantidad de sal –dependiente de x-, la expresión algebraica que relaciona las variables es $y = 0.05x$, *o bien,* $y = \frac{5}{100}x$, *sin embargo, se recomienda que sean los alumnos quienes construyan la expresión con base en su experiencia al completar la tabla.*

En GeoGebra

5. ¿Qué variables identificas en el problema y cómo las puedes asociar a los ejes del plano cartesiano?

Se ha asociado el eje Y con la cantidad neta de sal y el eje X con la cantidad de solución. Es preciso mencionar que la escala mostrada en los ejes debe ajustarse para que sea más cómoda la visualización. Puede socializarse y convenirse en grupo, pero se recomienda que en el eje X se muestre al menos el 80 (cantidad inicial de agua) y un poco más, puesto que el problema plantea la necesidad de agregar agua. Mientras tanto, en el eje Y no se necesita la representación de números muy grandes (por ejemplo; el 5% de 100 litros es 5) por lo que ajustar la escala hasta el 5 o 6 es adecuado.

6. Coloca un punto A sobre el eje X para representar la cantidad inicial de líquido (80 litros).
7. Traza una recta perpendicular al eje X pasando por el punto A.
8. Grafica la expresión algebraica que obtuviste en la pregunta 5. Observa la gráfica resultante, cambia del color de la gráfica a verde para identificarla fácilmente.
9. Describe el tipo de gráfica que obtuviste.
10. Marca un punto B en la intersección de tu gráfica con la perpendicular que pasa por A, ¿Qué significado tiene el punto B?

Se espera que los alumnos interpreten la posición del punto B y deduzcan que para 80 litros de solución se tendrán 4 unidades de sal.

11. Traza una perpendicular al eje Y pasando por el punto B. Si A se encuentra en 80, ¿dónde interseca esta perpendicular al eje Y?
12. Cambia el color de la perpendicular a azul y nómbrala "m".
13. Al mover el punto A. ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene constante?

Se espera que el alumno identifique que: (1) al aumentar o disminuir la cantidad de agua, también aumenta o disminuye la cantidad de sal respectivamente; y, (2) la concentración de sal (5%) se mantiene constante.

14. ¿Cambia la concentración de sal en el agua? ¿Cómo explicas lo que sucede?

Al cambiar la posición del punto A se está modificando la cantidad de solución total y por lo tanto la cantidad de sal también cambia, sin embargo; la concentración, vista como la razón "sal entre cantidad total de líquido" no se modifica, se sigue tratando con agua al 5% de sal. Se espera que los alumnos adviertan que la relación no se modifica.

15. Utilizando solamente la representación gráfica como referencia, ¿es posible saber cuánta sal hay en 65 litros de agua al 5%? ¿Y en 32 litros?

Se pretende que los estudiantes recurran a cambiar la posición del punto A para responder.

16. Obtén la pendiente de la gráfica de la expresión, ¿Cómo interpretas el valor obtenido?

La pendiente de la recta es 0.05, haciendo referencia al 5% de sal presente en el agua. La intención de la pregunta es que los alumnos refuercen la idea de que a lo largo de la recta asociada a la función pueden encontrarse diferentes cantidades de agua a los cuales corresponden determinadas cantidades de sal; sin embargo, la relación entre estas permanece constante (concentración de la solución).

Agua al 2%

1. Con base en tu experiencia con la primera parte de la actividad, ¿Qué significa la expresión "al 2% de sal"?
2. ¿Qué cantidad de sal se tiene en 15 litros de solución al 2% de sal?
3. ¿Cómo se puede calcular la cantidad de sal que hay en una solución al 2% de sal?

Las tres preguntas anteriores pretenden hacer un análisis parecido al que se realizó al inicio de la actividad. Se espera que para este momento la relación entre las variables se encuentre bien afianzada.

4. ¿Cuánta agua deberá agregarse a 80 litros de agua al 5% de sal para tener agua al 2% de sal?

La pregunta plantea el reto principal de la hoja de trabajo.

Es necesario que al discutir la pregunta se reconozca que dada la condición inicial (se tienen 80 litros de agua al 5% de sal) se tiene una cantidad constante de sal, aquella encontrada mediante la construcción en GeoGebra.

El profesor debe invitar a los alumnos a reflexionar en el hecho de que teniendo una cantidad constante de sal (4), se debe agregar agua para que la concentración pase de ser 5% a 2%, es decir, hay dos partes de sal por cada 100 de líquido.

A continuación, se trabajará con GeoGebra para responder la pregunta y profundizar.

Segunda exploración en GeoGebra

5. Coloca un punto móvil C sobre el eje X a la derecha del punto A para representar la nueva cantidad de agua, por ejemplo, si ubicamos el punto en 120, ¿Qué cantidad de agua se ha agregado?

Se espera que los alumnos contesten que, calculando la diferencia entre la abscisa del punto C y la del punto A, se obtiene la cantidad de agua agregada.

El profesor puede promover que los alumnos tracen un segmento desde A hasta C cuya longitud también indica la cantidad de agua que se agrega.

6. Traza una perpendicular al eje X que pase por C.
7. Marca el punto D en la intersección de la perpendicular anterior y la recta m.
8. Centra tu atención en el punto D, este nos muestra una mezcla diferente de agua y sal, ¿su concentración de sal es mayor o menor? Explica.

Con esta tarea se busca favorecer la reflexión sobre el significado de los últimos trazos y que los alumnos logren percibir que el punto D indica una solución de agua con sal que, aunque tiene más agua que la mezcla inicial, sigue teniendo la misma cantidad de sal (4).

Es deseable que los alumnos adviertan en este caso que la concentración de sal en la mezcla ha disminuido, o bien, que no se trata de agua al 5% de sal, sino una concentración menor.

9. Piensa que se agregan 40 litros de agua a la solución inicial, ¿Dónde debes ubicar el punto C para representar este caso particular?
10. Traza un segmento t desde el origen hasta el punto D, ¿Cuál es la pendiente de ese segmento? ¿Qué significa el valor de la pendiente del segmento?

La pendiente del segmento indica el porcentaje de sal para la cantidad de agua indicada por el punto C tomando en cuenta que la cantidad de sal es 4.

Se recomienda al profesor indicar a los alumnos que modifiquen el redondeo que hace GeoGebra para evitar que se muestre el mismo valor de la pendiente en un intervalo de valores en X (cantidad de agua). Para esto, en la pestaña de "opciones", seleccione "redondeo" y escoja 4 o 5 cifras decimales.

11. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la mezcla cuando se agregan 40 litros de agua?
12. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener una mezcla al 2% de sal?

Puede encontrarse la solución cuando se mueve el punto C hasta el momento en el que la pendiente del segmento t sea igual a 0.02.

13. ¿Cuál es el comportamiento de la concentración de sal en la mezcla, según la cantidad de agua que contenga?

Se espera que el alumno reconozca que a mayor cantidad de agua agregada es menor la concentración de sal en la mezcla. Se puede proponer trazar con coordenadas (x(C), pendiente del segmento t) y observar cuál es el lugar geométrico que describe. Esta idea permite evitar que el estudiante asocie este tipo de comportamiento con una recta decreciente. Si el estudiante lo asocia con una recta decreciente, se sugiere cuestionarlo sobre el significado de la intersección que tendría esa recta con el eje X, es decir, ¿cómo se interpreta una concentración del 0%?

En el archivo https://www.dropbox.com/s/krppboywozbpnyi/Soluciones.ggb?dl=0 se encuentra el modelo dinámico del problema, que se espera que construyan los estudiantes.

1.3) Actividad: El más veloz

Autor: Mtro. Mario Alberto Alvarado Quiñones
Correo: m.beto.alvarado@gmail.com

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes logren identificar la relación entre el valor de la pendiente de una recta y el concepto de velocidad de un móvil. Se espera que a través del uso de representaciones gráficas y el uso de GeoGebra deduzcan una manera para calcular la pendiente de una recta.

El más veloz

1. Observa la siguiente imagen y responde.

2. De los elementos presentes en la imagen, ¿cuál se mueve más rápido? Enlístalos de mayor a menor y argumenta tu respuesta.

Se considera prudente que el profesor propicie una discusión y que los estudiantes propongan el término "velocidad", de tal suerte que también queden implicados los conceptos de "distancia" y tiempo" y la relación que existe entre ellos. Una vez concluida esta socialización se continua con las siguientes preguntas.

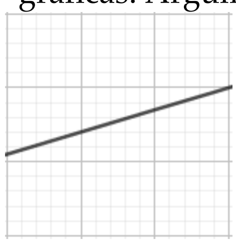
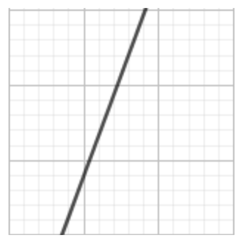
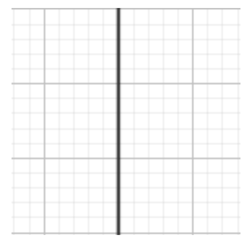
3. ¿Qué hiciste para decidir cuál de los elementos en la imagen es el más veloz?
4. ¿Qué es velocidad?
5. Al hablar de velocidad, ¿qué variables están involucradas?
6. ¿De qué manera se puede expresar la relación existente entre las variables?

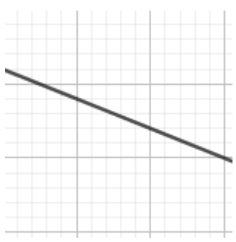
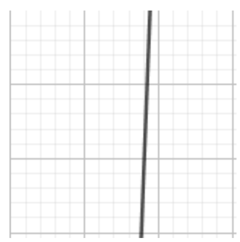
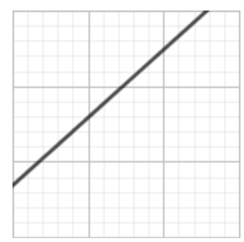
Con las preguntas 3-6, se espera que los estudiantes reconozcan que, para conocer la velocidad de un objeto, es necesario relacionar la distancia recorrida en un cierto tiempo. La manera en la que se puede expresar esa relación puede variar (enunciado, expresión algebraica, gráfico); sin embargo, se espera que todas mantengan la idea de que $v = \frac{d}{t}$.

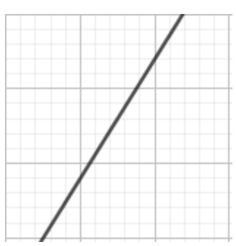
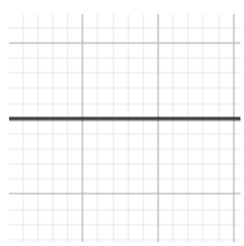
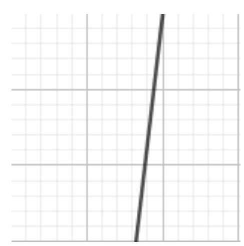
7. ¿Cómo podemos representar geométricamente esta relación?

Con esta pregunta se espera que los estudiantes propongan y reconozcan la necesidad del uso de un plano cartesiano para representar geométricamente la relación entre las variables distancia y tiempo y obtener la línea recta que represente dicha relación. Se sugiere que, de manera arbitraria, se seleccione al menos dos de los elementos presentes en la imagen, por ejemplo, se recomiendan usar el más veloz y el menos veloz. Lo anterior con la finalidad de que se pueden comprar las inclinaciones de cada una de las rectas y, con ayuda del profesor, logren asociar la relación entre la inclinación y la velocidad. Es importante mencionar que las intervenciones del profesor deben estar dirigidas a enfatizar que, a mayor velocidad, la recta tendrá una mayor inclinación.

8. Escribe a qué elemento de la imagen representa cada una de las siguientes gráficas. Argumenta tu elección.

Se incluyen algunas gráficas que no serán seleccionadas debido a que se trata de una recta con pendiente negativa, una recta vertical y una horizontal. Será buena oportunidad para explorar los porqués de tales situaciones y dar significado a la línea horizontal, la línea vertical y la pendiente negativa, en el contexto que se está trabajando.

9. En la siguiente tabla, se muestra la distancia que ha recorrido cada elemento de la imagen, en los primeros segundos. Completa la tabla.

Tiempo	**Distancia**					
	Caminante	**Corredor**	**Ciclista**	**Antílope**	**Auto**	**Avión**
0	0			0		
1	3			27		260
2	6		32			
3	9	27	48		255	
4			64	108		
5		45				
6	18					1560
7	21	63	112	189	595	
8						
Constante de variación						

La tabla se presenta con algunos espacios en blanco para propiciar el cálculo y que se perciba la variación constante.

10. Escribe qué velocidad lleva cada uno. Describe el proceso que utilizaste para determinar la velocidad.

Durante la socialización del punto 10 se sugiere que el profesor guie la discusión hacia el análisis de los incrementos de la distancia respecto al tiempo y propiciar con ello la expresión: $m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$, *para el cálculo de la pendiente. Es importante señalar que este análisis debe llevar al estudiante a asociar la inclinación con el valor de la pendiente y a su vez con el concepto de velocidad.*

11. Usa GeoGebra para ubicar los pares ordenados del corredor, ciclista y el antílope y traza sus rectas respectivas.

Ya que cada uno cuenta con 9 pares ordenados, parecería tedioso el proceso de para graficarlo; sin embargo, es una oportunidad para propiciar la discusión en torno al número de puntos *necesarios para trazar una recta. De esta manera, basta con ubicar dos pares ordenados para posteriormente trazar la recta que pasa por ellos.*

12. Ahora, utiliza el comando "pendiente" y los datos en la vista algebraica y completa la siguiente tabla.

Elemento de la imagen	**Velocidad constante**	**Expresión algebraica**	**Pendiente**
Corredor			
Ciclista			
Antílope			

El modelo que se espera que construyan los estudiantes en GeoGebra se puede consultar en el siguiente enlace:
https://www.dropbox.com/s/j8zq5zqlkftqn3t/el%20m%C3%A1s%20veloz.ggb?dl=0

13. ¿Qué relación hay entre la velocidad y la pendiente?

La discusión en este momento deberá centrarse en relacionar el valor de la pendiente, la velocidad y el valor que acompaña a x en la expresión algebraica. La información obtenida de este análisis le permitirá al estudiante, continuar con el llenado de la tabla del punto 14.

14. Completa la tabla siguiente

Elemento de la imagen	Velocidad constante	Expresión algebraica	Pendiente
Caminante			
Auto			
Avión			

1.4) Actividad: Velocidades en un biatlón

Autor: Mtro. Mario Alberto Alvarado Quiñones

Correo: m.beto.alvarado@gmail.com

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes, al resolver el problema de manera geométrica y dinámica, logren dar sentido geométrico a procesos algebraicos que, generalmente, los desarrollan de manera mecanizado sin entender qué es lo que están realizando. También, se espera que sean capaces de identificar la conexión entre conceptos, principalmente: velocidad y pendiente. La finalidad de esta actividad es que los estudiantes logren construir, por sí solos, el modelo dinámico del problema en GeoGebra a través de la guía del profesor y de preguntas planteadas en la hoja de trabajo.

Velocidades en un biatlón

Problema. Un deportista participó en un biatlón donde se combinaron las disciplinas de atletismo y ciclismo. El trayecto de 215 km lo recorrieron en 10 horas; de las cuales 7.5 horas viajaron en bicicleta y el resto del tiempo corriendo. Si la velocidad media en bicicleta fue 10 km/h mayor que la velocidad media al correr, ¿cuál fue la velocidad media y la distancia recorrida en cada disciplina?

1. ¿Qué variables identificas que están involucradas en el problema?

La finalidad de esta pregunta es que los estudiantes se familiaricen con el problema e identifiquen las variables que están involucradas: velocidad, distancia y tiempo.

2. ¿Cuáles condiciones identificas que se deben de cumplir para poder encontrar la solución al problema?

La finalidad de esta pregunta es que los estudiantes reconozcan que son dos las condiciones que se deben de cumplir en el problema: (1) la distancia total recorrida es de 215 km y que el tramo en bicicleta se hizo en 7.5 horas y el tramo corriendo en 2.5 horas; (2) la velocidad media en bicicleta fue 10 *km/h mayor que la velocidad media al correr.*

3. Abre GeoGebra, muestra los ejes coordenados y ubica un punto A en el origen.
4. Ubica un punto B con coordenadas (7.5,0) y traza una perpendicular l al eje X que pase por B y señale el segmento AB de color verde.
5. ¿Qué crees que representa el segmento AB en términos del problema?
6. Ubica un punto C con coordenadas (10,0) y traza una perpendicular m al eje X que pase por C y señale el segmento BC de color azul.
7. ¿Qué crees que representa el segmento BC en términos del problema?

Es importante que el profesor durante las preguntas 3-6 promueva la reflexión sobre por qué el tiempo se está ubicando en el eje X y que se concluya que el segmento AB y BC representan el tiempo utilizado en el recorrido en bicicleta y corriendo, respectivamente.

8. Realiza los trazos necesarios para representar la distancia total recorrida. ¿Qué trazos hiciste? Justifica tu respuesta.

Con esta pregunta se debe llevar al estudiante a que reconozca que la distancia debe ubicarse en el eje Y, de tal manera que se coloque un punto D sobre dicho eje, con coordenadas (215,0), se trace la perpendicular n al eje Y que pase por D y se señale el segmento AD. Debido a las cantidades de kilómetros que se manejan será necesario ajustar la escala en el eje Y, o bien, pensar en modificar las cantidades por ejemplo a (21.5,0) pero se debe tener cuidado al interpretar los resultados obtenidos de la construcción.

9. ¿Cómo representas la distancia recorrida en bicicleta?

La intención es que el estudiante ubique un punto E en el eje Y, sobre el segmento AD que representa la distancia total, y trace la perpendicular p al eje Y que pase por el punto E. Así, pueda identificar que esa distancia, la cual no es conocida, puede variar hasta encontrar el momento en que se cumplan las condiciones del problema.

10. Dibuja el segmento que representa la distancia recorrida en bicicleta de color rojo y el que representa la distancia que corrieron de color amarillo.
11. Si el punto E se ubica en (0,50), ¿Cuántos kilómetros recorrieron en bicicleta? ¿Cuántos kilómetros corrieron?
12. Si el punto E se ubica en (0,120), ¿Cuántos kilómetros recorrieron en bicicleta? ¿Cuántos kilómetros corrieron?

Con las preguntas 10-12, se espera que el estudiante identifique el segmento AE (rojo) representa la distancia recorrida en bicicleta y el segmento ED (amarillo) representa la distancia que corrieron. También, se promueve que el estudiante mueva el punto E, reconozca el dinamismo de la construcción y observe que en la vista algebraica tiene a la vista los valores de los segmentos rojo y amarillo.

13. Ubica el punto de intersección F entre las rectas l y p y muestra sus coordenadas. ¿Qué coordenadas obtuviste? ¿Cómo interpretas esas coordenadas en términos del problema?

Las coordenadas que se obtengan variarán con base en la posición en la que tengan al punto E. Sin embargo, la interpretación debe estar en los siguientes términos: por ejemplo, si E tiene coordenadas (7.5,100) significa que en 7.5 horas recorrieron 100 kilómetros en bicicleta y, por lo tanto, corrieron 115 kilómetros en 2.5 horas.

14. Ubica el punto de intersección G entre las rectas m y n y muestra sus coordenadas. ¿Qué coordenadas obtuviste? ¿Cómo interpretas esas coordenadas en términos del problema?

Las coordenadas deben ser (10,215) y representan la distancia total recorrida (215 km) en las 10 horas.

15. Traza el segmento AF y dibújalo de color morado.
16. Mueve el punto E. ¿Qué observas que cambia?

De manera inicial, se espera que el estudiante observe que cambian el valor de la ordenada del punto F y que eso se debe a que se está variando la posición del punto E. Además, se debe guiar al alumno a que reconozca que también el segmento AF cambia, específicamente cambia su inclinación. Con base en lo que se abordó en la actividad anterior (El más veloz), se esperaría que comenzaran a relacionar la inclinación del segmento con la velocidad media que llevan en esa parte del recorrido. Se sugiere analizar diversos casos particulares, por ejemplo, qué pasa cuando E está en (0,30), (0,75), (0,150), (0,200).

17. Calcula la pendiente del segmento AF en GeoGebra, usando el comando "pendiente", luego mueve el punto E. ¿Qué observas en la pendiente?
18. ¿Cómo interpretas el valor de la pendiente del segmento AF en términos del problema?

Las preguntas 17 y 18 tienen la intención de que el estudiante haga uso de las conexiones y relaciones que se establecieron en la actividad anterior (El más veloz) y reconozca que el valor de la pendiente del segmento AF representa la velocidad media que lleva el deportista en bicicleta y que ésta dependerá de la distancia que se haya recorrido en las 7.5 horas.

19. ¿Cómo representas la velocidad media que llevaba el deportista al correr?

En esta pregunta, el profesor debe guiar a los estudiantes para que logren identificar que necesitan trazar el segmento FG (color rosa) y calcular su pendiente para conocer la velocidad que llevaría el deportista al correr la distancia que representa ED en 2.5 horas.

20. ¿Cómo puedes encontrar la solución del problema con el modelo dinámico que construiste? Explica tu respuesta.

Es importante que en esta pregunta se le permita al estudiante explorar el modelo dinámico y observe el comportamiento de los valores de la pendiente. Se debe hacer énfasis en que, si bien ya se tiene la asegurada la condición 1 del problema, falta encontrar el momento en que se cumpla la condición 2, es decir, que la velocidad media en bicicleta es $10\ km/h$ mayor a la velocidad media corriendo. Así, el estudiante debe mover el punto E, hasta encontrar la posición en la que la diferencia entre la pendiente de AF y FG sea 10. Lo anterior se puede facilitar si calcula la diferencia en la barra de entrada, es decir, $diferencia = m_1 - m_2$ y buscar el momento en que esa diferencia sea 10.

21. ¿Cuál fue la velocidad media y la distancia recorrida en cada disciplina?

En bicicleta se recorrió 180 kilómetros con una velocidad media de 24 km/h, mientras que corrió 35 kilómetros a una velocidad media de 14 km/h.

22. ¿Qué pasaría si la distancia total recorrida fuera de 250 km? O bien, ¿qué la velocidad media en bicicleta fuera 6km/h menor a la velocidad media corriendo?

La finalidad de esta última pregunta es que los estudiantes observen que con este modelo dinámico pueden resolver todos los problemas que tengan esta estructura, solo es necesario, generalizar la posición de los puntos B, C, D y E, esto es, colocarlos sobre los ejes correspondientes sin tener una coordenada específica de manera que se puedan ajustar de acuerdo con los datos de los nuevos problemas. Se sugiere promover una competencia entre equipos en los que, con ayuda de su modelo dinámico, puedan resolver cualquier problema de este tipo que le plantee otro equipo.

El modelo dinámico que se espera que construyan los estudiantes se puede consultar en el siguiente enlace: https://www.dropbox.com/s/xm5cd7gry5yde63/velocidades%20en%20un%20biatl%C3%B3n.ggb?dl=0

1.5) Actividad: Experimentos con carritos

Autor: Mtro. Jorge Armando Ríos Escobedo

Correo: lim_x-00@hotmail.com

Con esta actividad se busca que los estudiantes identifiquen y recapaciten en la variación de los parámetros de la función lineal. Se propone hacer el análisis de los datos recolectados en un experimento con un carrito de control remoto y utilizar la visualización grafica y la herramienta tecnológica GeoGebra para explorar los parámetros de la función lineal.

Experimentos con carritos

En el laboratorio de física se realizó una práctica que involucraba el estudio del movimiento de un carrito de control remoto.

Se efectuaron cuatro experimentos con las siguientes características:

a) Experimento 1: el carrito inicia en la línea de salida y se desplaza a una velocidad de seis centímetros por segundo.
b) Experimento 2: el carrito inicia a 20 cm de la línea de salida y se desplaza a una velocidad de seis centímetros por segundo.
c) Experimento 3: el carrito inicia en la línea de salida y se desplaza a una velocidad de ocho centímetros por segundo.
d) Experimento 4: el carrito inicia a 20 cm de la línea de salida y se desplaza a una velocidad de ocho centímetros por segundo.
   Realiza un bosquejo del comportamiento gráfico donde se represente el movimiento del carrito durante los primeros 6 segundos de cada experimento.

Permitir al estudiante explorar con las herramientas a su alcance el trazo de las gráficas.

A partir de los bosquejos de las gráficas que realízate contesta lo siguiente:

1. ¿Qué relaciones observas entre las gráficas de los experimentos 1 y 2? ¿3 y 4?

Se espera que el estudiante identifique la gráfica de los experimentos como elementos paralelos.

2. ¿Qué relaciones observas entre las gráficas de los experimentos 1 y 3? ¿2 y 4?

Se espera que el estudiante identifique la gráfica de los experimentos como elementos cuya pendiente o inclinación es distinta.

3. ¿Qué relaciones observas entre las gráficas de los experimentos 1 y 4? ¿2 y 3?

Se espera que el estudiante identifique la gráfica de los experimentos como elementos paralelos y con cambio en su pendiente.

Exploración con GeoGebra

Activa la primera parte del archivo https://www.dropbox.com/s/nh4t8cffww0i29v/lineales_par%C3%A1metros.ggb?dl=0 para completar la información de la siguiente tabla

Descripción del movimiento	Gráfica en GeoGebra	Fórmula en GeoGebra
El carrito estaba a 5 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.		
El carrito estaba a 10 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.		
El carrito estaba a 15 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.		
El carrito estaba a 15 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 9 cm por segundo.		
El carrito estaba a 15 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 15 cm por segundo.		

Con base en la información de la tabla, contesta lo siguiente:

a. En la gráfica, ¿cómo o dónde identificas el punto donde inicia el movimiento el carrito?

En los tres primeros se muestra variación en el punto de partida del movimiento, por lo que el estudiante debe concluir que al cambiar dicho valor existirá un desplazamiento vertical de la gráfica correspondiente.

b. En la gráfica, ¿cómo o dónde identificas la velocidad a la cual se mueve el carrito?

En los tres últimos se muestra la misma velocidad, representado en la gráfica en un ángulo de inclinación idéntico, o bien, la misma pendiente.

c. En la fórmula, ¿cómo o dónde identificas el punto donde inicia el movimiento el carrito?

En los tres primeros se muestra variación en el punto de partida del experimento, por lo que el estudiante debe concluir que al cambiar dicho valor existirá un desplazamiento vertical de la gráfica correspondiente.

d. En la fórmula, ¿cómo o dónde identificas la velocidad a la cual se mueve el carrito?

En los últimos tres se muestra la misma velocidad, representado en la fórmula el coeficiente de x o valor de la pendiente.

e. ¿Qué sucede si se recorre en el mismo tiempo una distancia distinta?

Es importante que el docente realice preguntas relacionadas con las diferencias en las gráficas del concepto de pendiente para que el estudiante sea capaz de inferir el ángulo de inclinación de la recta que representa los puntos de coincidencia de la distancia y el tiempo transcurrido.

Las siguientes preguntas tiene la intención de confirmar las generalizaciones en la función $y = m\,x + b$

f. ¿Qué representa el valor de b en el movimiento del carrito?

g. ¿Qué sucede con el experimento si aumenta o disminuye el valor de b?

h. ¿Qué representa el valor de m en el movimiento del carrito?

i. ¿Qué sucede con el experimento si aumenta o disminuye el valor de m?

j. ¿Cómo se comportaría la gráfica cuando el valor de m y b son negativos? ¿Este fenómeno puede representar dichas condiciones? ¿Por qué?

La finalidad de esta pregunta es que el alumno identifique que: (1) cuando b es negativo, representa que el carrito inicia su movimiento antes de la línea de salida; (2) cuando m es negativo, representa que el carrito se desplaza en sentido contrario (reversa).

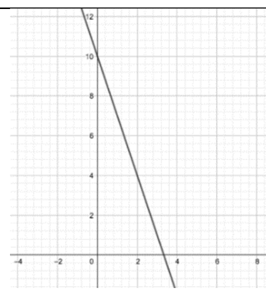
k. ¿En qué otras situaciones observas una relación entre variables como la que se da en los experimentos del carrito?

Prueba activar ambas partes del archivo para comprobar lo anterior.

https://www.dropbox.com/s/nh4t8cffww0i29v/lineales_par%C3%A1metros.ggb?dl=0

Activa la segunda parte del archivo para completar la información de la siguiente tabla con base en las relaciones que observaste.

https://www.dropbox.com/s/nh4t8cffww0i29v/lineales_par%C3%A1metros.ggb?dl=0

Descripción del movimiento	Gráfica	Fórmula	¿Qué relación hay?
El carrito estaba a 13 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.			
		y=5x+13	
			
			Tiene la misma pendiente y una ordenada al origen distinta.

Función cuadrática

2.1) Actividad: Resolviendo ecuaciones cuadráticas

Autor: Dulce María Reyes Rojas

Correo: reyesrojasdulce@gmail.com

La actividad fue adaptada de Heid y Wilson (2015). Tiene como propósito que se reflexione acerca de la aplicación, precisión y confiabilidad de los distintos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas entre ellos la factorización y la fórmula general. Así mismo, que se reconozcan gráfica y analíticamente el número de soluciones reales de la ecuación asociada a la función. Para ello, se propuso el análisis de procedimientos desarrollados por estudiantes.

Resolviendo ecuaciones cuadráticas

En la clase de álgebra l el profesor dejó una actividad de tarea en la que tenían que resolver una ecuación cuadrática. Al día siguiente uno de los estudiantes le dijo al profesor que no había podido resolverla del todo, el profesor lo pasó al pizarrón y le pidió anotar el procedimiento que siguió y hasta donde llegó. El alumno escribió:

$$x^2 = x + 6$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x+6}$$
$$x = \sqrt{x+6}$$

Luego pidió a los alumnos que ayudaran a su compañero a terminar de resolver la ecuación cuadrática.

También, se planteó el siguiente procedimiento:

Otro de los alumnos aplicó un procedimiento distinto, el cual también mostró a sus compañeros.

$$x^2 - x = 6$$
$$x(x-1) = 6$$
$$x = 6 \;,\; (x-1) = 6$$

Para ambas situaciones se formulan las siguientes preguntas:

1. ¿Estás de acuerdo en el procedimiento que utilizó el alumno? ¿Por qué?

Se hace el cuestionamiento para saber si el alumno puede llegar a apreciar el error inicial del problema detectando con esto su forma de reflexionar acerca del procedimiento. Iniciando con esto una discusión sobre la manera en que se puede equivocar en la toma de decisiones al tratar de resolverlo, por ejemplo, plantearle al alumno algunos casos en los que hace procedimientos de despeje e involucra operaciones inversas y exhibe confusión en el manejo de signos, coeficientes y exponentes, además de que debe entender el objetivo de la acción de despejar.

Durante el análisis del segundo procedimiento se espera que se reflexione sobre una de las ideas erróneas que desarrollan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones cuadráticas al generalizar la propiedad del neutro aditivo en la multiplicación. La cual se refiere a que, si el producto es igual a cero entonces uno de sus factores también lo es. Heid y Wilson (2015) mencionan que esta propiedad establece que si se tiene la multiplicación de dos números, a *y* b*, sucede que* $ab = 0$*, cuando alguno de los dos son* 0*,* $a = 0$ *o* $b = 0$ *, y existe un único número real,* n*, al aplicar la propiedad del producto cero pasa que "la multiplicación de* a, b *será* n*,* $ab = n$*, cuando se cumpla que* $a = n$ *o* $b = n$*". Al realizar esta actividad, se puede retomar el método de factorización para resolver la ecuación tomando en cuenta la propiedad del producto cero.*

2. ¿Qué tipo de solución debe de dar como resultado de la ecuación cuadrática?

A través de esta pregunta se pretende que el alumno pueda argumentar sobre la forma en que resolverá la ecuación para llegar a algún resultado, es aquí, donde se puede incitar al alumno a encontrar diferentes procedimientos o maneras de obtener el camino adecuado para la solución, esperando que el alumno pueda mencionar métodos como el de formula general o factorización.

3. ¿Cómo continuarías el procedimiento del estudiante para encontrar la solución a la ecuación?

Se pretende que el alumno conteste y realice el procedimiento que planteo y pueda obtener la respuesta correcta. Se sugiere pedir a los alumnos graficar la ecuación $x^2 = x + 6$ *en GeoGebra para poder interpretar geométricamente la función a la cual está asociada la ecuación cuadrática. Teniendo como objetivo de que se lleve al alumno a detectar las raíces de la ecuación cuadrática, y una breve explicación de que significan, en este caso su solución.*

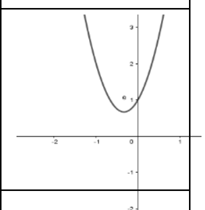
Una opción más es poder abordar el tema en el que a través de la gráfica se puede encontrar las soluciones de la ecuación por medio de la intersección en el eje x*, con el fin de que se pueda reflexionar sobre el tema del discriminante (*$d = b^2 - 4ac$*) el cual está incluido en la fórmula general y se espera que sea uno de los métodos que puede mencionar el alumno para resolver las situaciones. Una explicación adecuada que se le puede dar al alumno es que al resolver una ecuación y encontrar el discriminante en el momento de aplicar la fórmula general se puede obtener el número de soluciones que tendrá la ecuación y cuantas intersecciones con el eje de las* x *a través de los siguientes puntos:*

- *Si es discriminante es mayor a cero (*$d > 0$*) entonces la ecuación tendrá dos soluciones distintas y la gráfica de la función interseca al eje* x *dos veces.*
- *Si el discriminante es cero (*$d = 0$*) entonces ecuación tendrá una solución y la gráfica de la función interseca al eje* x *una vez.*

- *Si el discriminante es menor a cero ($d < 0$) la ecuación no tendrá soluciones en los reales y además la gráfica de la función no tendrá intersecciones con el eje x.*

Conexiones entre el número de soluciones de la ecuación, valores del discriminante y gráfica de una función.

Finalmente se pide completar la tabla para que el alumno pueda relacionar las ideas matemáticas vistas durante el desarrollo de la tarea, en la cual se trata de que el alumno resuelva ecuaciones cuadráticas con distintos procedimientos, encuentre las raíces de las funciones, determine el valor de su discriminante, y obtenga las ecuaciones cuadráticas asociadas a las funciones y la gráfica de estas mismas.

Función	**Discriminante de la ecuación asociada**	**Número de soluciones reales de la ecuación asociada**	**Soluciones reales de la ecuación asociada**	**Grafica de la función**
$f(x) = x^2 + 2x - 3$		2		
		2	$x_1 = 4$ $x_2 = -3$	
$f(x) = 2x^2 - 4x + 6$				
	$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6}$			
$x^2 = -3x - \frac{9}{4}$				
		2	$x_1 = 5 - \sqrt{-3}$ $x_1 = 5 + \sqrt{-3}$	

2.2) Actividad: El problema del rectángulo

Autor: Dra. María del Carmen Olvera Martínez

Correo: carmen.olvera@ujed.mx

En esta Actividad se aborda un problema que involucra el estudio de una función cuadrática. Se desea que se desarrollen dos acercamientos: dinámico y algebraico; con la finalidad de que contrasten los resultados obtenidos, identifiquen los conceptos matemáticos involucrados, y que se discutan ventajas y limitaciones de cada acercamiento. También, esta actividad permite analizar la importancia de tener siempre presente el dominio de una función.

El problema del rectángulo

Si ABCD es un rectángulo tal que $\overline{AB}$ tiene una longitud de 6.5 cm, $\overline{BC}$ mide 4 cm. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$.

¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga la mínima área posible?

Un acercamiento dinámico usando el software de GeoGebra

1. Leer individualmente la tarea propuesta e identifica los elementos fundamentales que ayudan a darle sentido al problema.

Se invita en esta parte que el profesor dirija el análisis del problema de forma grupal para que se identifiquen cuáles son los datos que se tienen y qué es lo que está pidiendo en el problema.

2. Usar el software dinámico GeoGebra para dibujar el rectángulo ABCD utilizando los diferentes comandos del menú (perpendicular, rotación, círculo, etc.). Construir de manera individual un modelo dinámico en el cual se pueda mover el punto M a lo largo del segmento $\overline{AB}$ para generar una familia de cuadriláteros inscritos.

Se sugiere que, inicialmente, se deje al estudiante que intente construir el modelo dinámico y posteriormente plantear preguntas que los lleven a probar su construcción, esto es, que se hagan pruebas de arrastre a través del movimiento de puntos móviles y asegurarse que se mantengan las condiciones del problema. En este sentido, es importante que se haga un análisis de las propiedades de las figuras geométricas para que las construcciones que se *hagan se mantengan ante el movimiento. Se espera que lleguen a tener un modelo dinámico como el siguiente:*

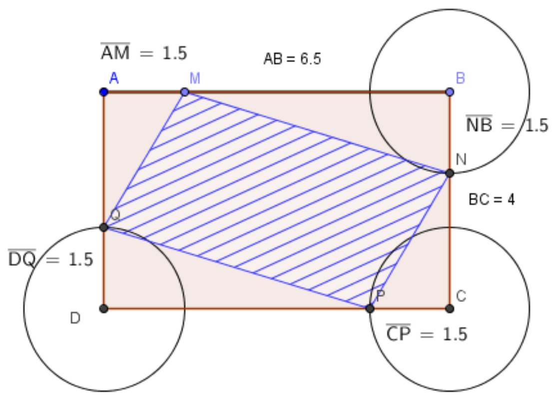


Figura 1. Ejemplo de modelo dinámico que representa al problema.

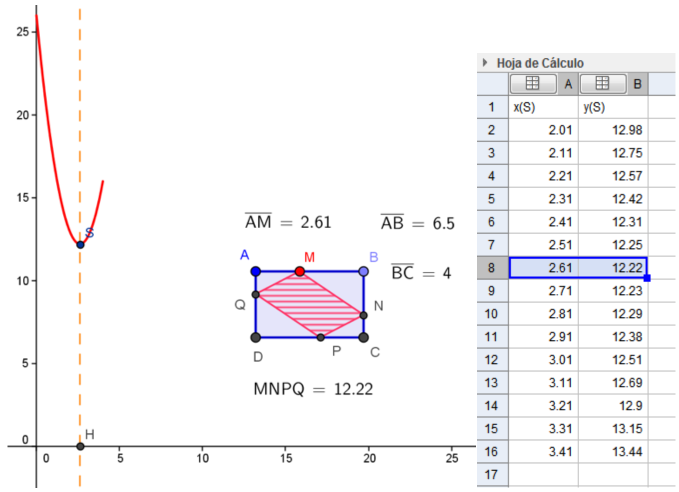
3. ¿Qué propiedades mantiene esa familia de cuadriláteros MNPQ? ¿Se obtiene el cuadrilátero inscrito en cualquier posición del punto M? Explicar cuál es el domino de M para construir siempre el cuadrilátero.

Con estas preguntas se tienen diversas intenciones, una es que pueden identificar que el cuadrilátero inscrito es un paralelogramo y para eso deben poder argumentarlo matemática por ejemplo con congruencia de triángulos. También, es un espacio para profundizar sobre el dominio de la función, ¿por qué solo se puede dibujar el cuadrilátero cuando la longitud del segmento AM está entre cero y cuatro?

4. Hallar la representación gráfica del comportamiento del área del cuadrilátero inscrito encontrando el lugar geométrico del punto que relaciona la posición del punto M sobre el segmento $\overline{AB}$ con el área del cuadrilátero correspondiente. ¿Qué propiedades tiene la representación gráfica del área?

5. Identificar visualmente en qué punto sobre la gráfica, el área del cuadrilátero alcanza su valor mínimo. ¿Existe algún patrón asociado con la posición del punto M, la longitud de los lados del cuadrilátero y el área mínima? Obtener una tabla que muestre algunos valores del segmento $\overline{AM}$ y el área del cuadrilátero correspondiente.

Con la pregunta 4 y 5 se promueven los acercamientos geométricos y tabular como una primera aproximación a la solución de problema. Los estudiantes deben identificar que se trata de una función cuadrática y, en este caso, se trata de encontrar el mínimo en la parábola *obtenida (Figura 2). Esto último puede ser mediante el uso de propiedades geométricas de la parábola, o bien, relacionándolo con el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola en un punto.*

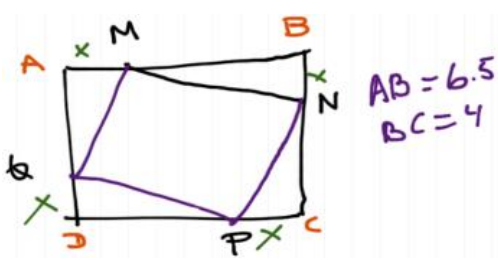


	A	B
1	x(S)	y(S)
2	2.01	12.98
3	2.11	12.75
4	2.21	12.57
5	2.31	12.42
6	2.41	12.31
7	2.51	12.25
8	2.61	12.22
9	2.71	12.23
10	2.81	12.29
11	2.91	12.38
12	3.01	12.51
13	3.11	12.69
14	3.21	12.9
15	3.31	13.15
16	3.41	13.44
17		

Figura 2. Ejemplo del acercamiento gráfico y tabular a la solución del problema.

Sobre el modelo algebraico

6. ¿Existe alguna relación entre el área de los cuatro triángulos que aparecen en las esquinas de la figura, el área del rectángulo dado y el área del cuadrilátero inscrito? Utilizar una notación adecuada para identificar las figuras que aparecen en la representación de la tarea.



7. Hallar una expresión para el área del cuadrilátero MNPQ. Graficar esta expresión y discutir qué tipo de propiedades tiene.

8. Hallar la posición del punto M para la cual el cuadrilátero MNPQ alcanza un área mínima. Comparar este valor con el obtenido previamente en el software.

9. Cambiar las dimensiones de los lados del rectángulo inicial por a y b respectivamente, y hallar el modelo general que describe el área del cuadrilátero

inscrito. ¿Cuál es el valor de $\overline{AM}$ para que el área del cuadrilátero inscrito tenga un valor mínimo en términos de los lados a y b del rectángulo?

La intención de las preguntas 6-9 es que los estudiantes encuentren la función cuadrática que modela al problema, en un inicio con cantidades específicas y después de manera general. Se debe guiar a los estudiantes a que reconozcan que tienen al menos dos opciones para plantear la fórmula: (1) minimizando el área del cuadrilátero MNPQ, y (2) maximizando el área de los cuatro triángulos de las esquinas. Retomando la primera opción, el área de MNPQ se puede obtener restando al área del rectángulo ABCD el área correspondiente a los cuatro triángulos de las esquinas:

$A(MNPQ) = A(ABCD) - 2A(triángulo\ AMQ) - 2A(triángulo\ BNM)$.

Si la longitud del segmento AM *es* x, *entonces la expresión que representa el área de MNPQ es* $f(x) = 26 - 10.5x + 2x^2$.
Para el caso general, se tendría que: $A(MNPQ) = 2x^2 - (a+b)x + ab$.
Después de desarrollar procedimientos propios de cálculo se encuentra que cuando $x = \frac{a+b}{4}$ *se obtiene el área mínima de MNPQ. Con este resultado, establecieron que la longitud del segmento* AM *para la cual el área del cuadrilátero MNPQ es mínima, es siempre una cuarta parte del semi perímetro del rectángulo ABCD, longitud del segmento* $AM = \frac{a+b}{4}$

10. Explorar algebraica y dinámicamente un caso en el cual el rectángulo inicial sea cambiado por un paralelogramo.

Con esta pregunta, además de trabajar una extensión al problema inicial, se pretende analizar qué propiedades se mantienen y cuáles cambian respecto a la situación inicial. En este caso, los acercamientos hacia la solución se desarrollan de manera similar al anterior, con la diferencia que en este se debe contemplar el ángulo que se forma entre los lados del paralelogramo. Como resultado del acercamiento algebraico, se observa que se mantiene el hecho de que el área mínima se alcanza cuando la longitud de $AM = \frac{a+b}{4}$.

Sin embargo, es importante llevar a los estudiantes al análisis de casos particulares donde la diferencia entre a y b sea mayor, manteniendo fijas las medidas de los ángulos. Lo anterior con la intención de que identifiquen que el mínimo de la función no siempre se podrá calcular con la fórmula encontrada. Esto se debe a que la fórmula permite encontrar el vértice de la parábola asociada a la función, sin embargo, hay ocasiones en las que el vértice no está dentro del dominio de la función, de modo que el valor mínimo será, en este caso, el extremo derecho de la gráfica correspondiente.

Se debe llevar a los estudiantes a que analicen varios casos particulares y lleguen a identificar que se deben de fijar en la relación que existe entre las dimensiones de a y b para reconocer cuándo pueden utilizar la fórmula y cuándo no. Esta relación lleva a considerar tres casos partiendo de que b es la medida del segmento menor:

- *Cuando* $a = 3b$, *el vértice de la parábola es el extremo derecho del lugar geométrico. Por lo tanto, el área mínima de MNPQ se alcanza en* $x = b$, *o bien, en* $x = \frac{a+b}{4}$.
- *Cuando* $a > 3b$, *el vértice de la parábola asociada no está dentro del dominio de la función del problema. Así, el área mínima de MNPQ se alcanza cuando* $x = b$ *(Figura 3).*
- *Cuando* $a < 3b$, *entonces la fórmula encontrada en el modelo algebraico del problema es aplicable. El valor mínimo del área de MNPQ coincide con el vértice de la parábola asociada y se alcanza cuando* $x = \frac{a+b}{4}$ *(Figura 4).*

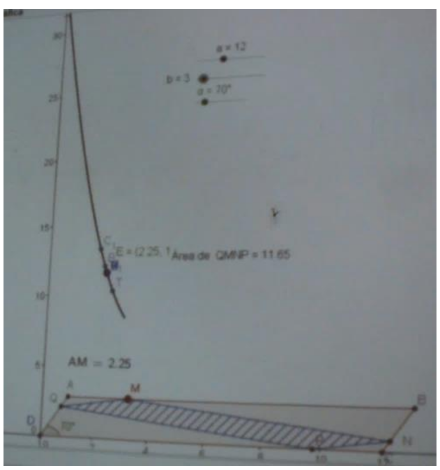


Figura 3. Caso particular cuando $a > 3b$.

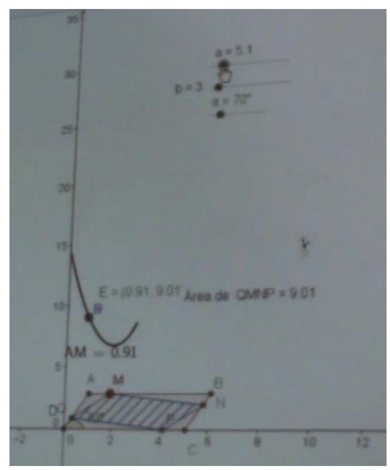


Figura 4. Caso particular cuando $a < 3b$.

En el siguiente enlace puede ver la sugerencia para el trabajo en GeoGebra de esta actividad https://www.dropbox.com/s/uejqstf4b2gzngx/problema%20del%20rect%C3%A1ngulo.ggb?dl=0*y para la sugerencia para la extensión de problema puede ver en* https://www.dropbox.com/s/vrjd67xdbmzjamw/Extensi%C3%B3n%20problema%20del%20rect%C3%A1ngulo.ggb?dl=0

2.3) Actividad: El cambio de parámetros

Autor: Dulce María Reyes Rojas

Correo: reyesrojasdulce@gmail.com

Esta actividad es adaptada de Huang y Kulm (2012). En esta se involucra un problema acerca de la variación de los parámetros a, b, y c de la función cuadrática con la finalidad de fomentar la interpretación el comportamiento de la gráfica al variar los valores de dichos parámetros y observar su posición, concavidad y forma.

El cambio de los parámetros

En la clase del profesor Juan, se está estudiando la gráfica de la función:

$$y = ax^2 + bx + c$$

y cómo la variación de los valores de los parámetros a, b y c pueden causar diferentes cambios en la gráfica original.

En el pizarrón se encuentra graficado lo siguiente:

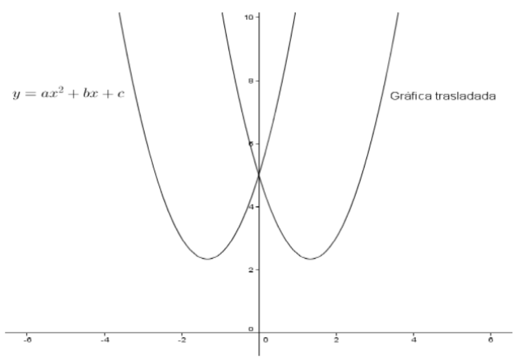


Figura 1. Grafica original traslada de $y = ax^2 + bx + c$.

1. Con base en la Figura 1, ¿Cuál, de las siguientes opciones, es una descripción apropiada de la traslación de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ a la gráfica trasladada? Explica tu respuesta de la manera más detallada posible.

a) Sólo cambió el valor de a.

b) Sólo cambió el valor de c.

c) Sólo cambió el valor de b.

d) Al menos dos de los parámetros cambiaron. ¿Cuáles?

e) No se puede generar la gráfica trasladada cambiando esos parámetros

La pregunta principal se formuló con la intención de conocer si el alumno puede hacer una interpretación adecuada de lo que sucede en la gráfica de una función cuadrática cuando varían los valores de los parámetros.

Luego de esto se puede proponer al alumno a trabajar con una función cuadrática del tipo $y = ax^2 + bx + c$ *y explorarla a través de GeoGebra, para promover la exploración de los parámetros* a, b *y* c. *Se espera que el alumno varié los valores de los parámetros para poder distinguir el papel que ejerce cada uno en el comportamiento de la gráfica de la función cuadrática.*

2. ¿Qué sucede en la gráfica cuando varía el valor de a? ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene invariante?
3. ¿Qué sucede en la gráfica cuando varía el valor de c? ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene invariante?
4. ¿Qué sucede en la gráfica cuando varía el valor de b? ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene invariante?

Se plantean las siguientes preguntas con la intención de que el alumno explore cada parámetro con ayuda de GeoGebra y que pueda detectar que los siguientes cambios suceden:

Si se varía el parámetro a *la gráfica de la función está abre hacia arriba si es positiva y si el valor de* a *es negativo la gráfica abre hacia abajo. Una pregunta interesante que se debe debatir con el alumno es ¿Qué sucede cuando el valor del parámetro* a *es cero? Dando respuesta a esto y que se espera que el alumno pueda detectar, es que cuando* a *es cero el termino cuadrático, de la función con la que se ha estado manejando* $ax^2 + bx + c = y$, *desaparece o se elimina haciendo quedar con ello solo a la parte* $bx + c = y$ *la cual es una función lineal, por lo tanto gráficamente se obtendrá una línea recta.*

Si se varía el parámetro c *la gráfica de la función se desplaza hacia arriba si es positivo o hacia abajo si es negativo.*

5. ¿Qué elementos y propiedades recuerdas de la parábola?
6. Encuentra, en GeoGebra, los elementos que mencionaste en la pregunta anterior.
7. Al variar el parámetro b, ¿cómo se comportan dichos elementos? ¿Qué relaciones identificas?

Se plantean las preguntas 5, 6 y 7 para que se pueda explorar el parámetro b y que puedan detectar que pasa cuando cambia de valor, ya que la tarea se enfoca en el movimiento que describe este parámetro. Se pretende que se encuentren geométricamente los elementos que caracterizan a la parábola como lo es el eje de simetría, algunos puntos simétricos, el vértice da la parábola la mediatriz entre otros, dando a esto la posibilidad de hacer un repaso de estos temas y que además se pueda favorecer la comprensión a través de GeoGebra sobre qué pasa con el vértice al cambiar el valor del parámetro b y que lugar geométrico describe.

8. ¿Qué aprendiste al explorar la variación del valor del parámetro a?
9. ¿Qué aprendiste al explorar la variación del valor del parámetro c?
10. ¿Qué aprendiste al explorar la variación del valor del parámetro b?

Se hacen las preguntas 8, 9 y 10 para reforzar los conocimientos que el alumno comprendió.

11. Con base en tus exploraciones, ¿mantienes tu respuesta a la pregunta inicial? En caso de que no sea así, ¿cuál es tu nueva respuesta? Explica detalladamente.

Con esta pregunta los alumnos pueden rectificar su respuesta.

Con base en el análisis de las preguntas anteriores, completa la siguiente tabla:

Ecuación de la parábola	**Ecuación del lugar geométrico que describe el vértice al variar el parámetro b**
$\mathrm{y} = 2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 3$	
$\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 5$	
$\mathrm{y} - 7.7 = -0.1\mathrm{x}^2 - 6.3\mathrm{x}$	
$\mathrm{y} = \frac{3}{10}\mathrm{x}2 + 6.4 + \frac{9}{5}\mathrm{x}$	
$y = \frac{48}{5}x^2 - 4 + 10x$	

12. ¿Cómo llegaste a los resultados?

Por último, se propuso completar la tabla y dar la explicación acerca de cómo encontró los resultados para saber si el alumno comprendió cual era el lugar geométrico que describe el vértice $(-ax^2 + c = y)$ *de la parábola cuando se varía el valor del parámetro* b.

En el siguiente enlace puede ver la sugerencia para el trabajo en GeoGebra de esta actividad https://www.dropbox.com/s/edd3t3m7i739irm/variacion%20de%20par%C3%A1metros.ggb?dl=0

2.4) Actividad: Torneo de golf

Autor: Dulce María Reyes Rojas

Correo: reyesrojasdulce@gmail.com

Esta actividad es parte de una situación retomada de un problema presentado en Mata-Holguín (2005). Tiene por objetivo analizar fenómenos que pueden ser modelados por una función cuadrática, en el caso de esta tarea se estudia el tiro parabólico.

Torneo de golf

Carlos es un golfista profesional que participó en el famoso torneo anual masculino British Amateur de Reino Unido, donde realizó un tiro el cual duró en el aire 7 segundos. Se tomaron algunas fotografías cuando la pelota estuvo en el aire (figuras 1, 2 y 3).

Figura 1. Fotografía 1.

Figura 2. Fotografía 2.

Figura 3. Fotografía 3.

Con estas fotografías se hizo una recreación de la trayectoria completa del tiro de Carlos, la cual se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Recreación de la trayectoria completa.

Para la pregunta uno y como parte del objetivo de la tarea se proporciona información limitada al alumno ya que se espera que pueda llegar a construir la función que describe la trayectoria de la pelota, con la finalidad de que se identifiquen los elementos y procedimientos necesarios para encontrar la solución de la pregunta principal.

1. Con base en los datos y las imágenes proporcionadas, ¿Cuál es la altura máxima que alcanzó la pelota? Justifica tu respuesta.

Se realizó la secuencia de preguntas 2, 3 y 4 con la intención de que el alumno identifique que se está hablando de un tiro parabólico. Esta pregunta se centró en que se pueda analizar la situación con la intención de que recordará propiedades matemáticas que le sirvieran como guía para plantear un proceso de solución.
Se debe pedir al alumno que explore el archivo en GeoGebra previamente hecho y se espera que pueda reconocer las relaciones matemáticas que planteo el mismo para encontrar la altura máxima a la que llego la pelota.
https://www.dropbox.com/s/yfepl1nx9ztj5t9/APLICACIONES%20PELOTA%20DE%20GOLF_030818.ggb?dl=0

1. ¿Qué tipo de trayectoria siguió el tiro?
2. ¿Qué relaciones matemáticas identificas en la Figura 4, respecto al tiro de Carlos?
3. Con ayuda de GeoGebra, explora y analiza la trayectoria del tiro de la pelota, obtén la altura máxima alcanzada y describe tu procedimiento.

Con las siguientes preguntas, después del análisis de las preguntas anteriores y del manejo de GeoGebra se espera que el alumno pueda encontrar y desarrollar un método con el cual encuentre la función que modele la trayectoria de la pelota. La función resultante es $f(x) = 1.5x^2 + 10.5$

4. ¿Qué tipo de función puede modelar la trayectoria de la pelota?
5. ¿Cuál crees que es la función?

Para concluir el problema se realizan preguntas acerca de los resultados obtenidos y se plantea una nueva situación para que el alumno implemente los elementos matemáticos y conjeturas a las que llego durante el desarrollo de la tarea.

6. Con base en la función que encontraste, ¿Cuál es la altura máxima alcanzada y a los cuántos segundos sucedió?

7. Si se hubiera sacado una fotografía a los 2 segundos, ¿A qué altura estaría la pelota?
8. En el torneo, otro golfista también hizo un tiro que duró 7 segundos en el aire. Se tomó una fotografía en el primer segundo de lanzamiento y la pelota estaba a 4.5 metros del suelo. ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada en la trayectoria de esta pelota?

Funciones racionales

3.1) Actividad: El problema de los postes de teléfono

Autor: Dra. María del Carmen Olvera Martínez

Correo: carmen.olvera@ujed.mx

El propósito de esta Actividad es abordar el estudio de una función radical. Específicamente se desea conocer en qué momento esa función tiene un valor mínimo. Se desea promover diferentes acercamientos a la solución como: numérico (hoja de cálculo), dinámico (GeoGebra), geométrico, algebraico (WolframAlpha). La idea es discutir sobre la manera en que se integran diversos conceptos matemáticos en cada uno de los acercamientos y la forma en que el uso de herramientas digitales promueve el análisis de ideas y significados matemáticos involucrados con la función radical.

El problema de los postes telefónicos

Dos postes telefónicos están separados 10 m; sus longitudes son 3 y 5 metros, respectivamente. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de los postes se sujetará a un punto en tierra, localizado sobre la recta que los une. ¿Dónde debe situarse el punto sobre el suelo, de tal manera que la longitud del cable sea mínima?

Un acercamiento dinámico con GeoGebra

1. ¿Cuáles son los elementos fundamentales que ayudan a entender el problema?
2. Bosqueja un esquema que represente el problema.

Con estas dos preguntas se tiene la intención de que los estudiantes identifiquen información clave para la resolución del problema y puedan establecer relaciones entre los datos que se les proporcionan, así como la notación que les permita hacer referencia futra a los elementos. Es importante mencionar que los diagramas que generen los estudiantes pueden ser diversos, sin embargo, es importante analizar que realmente se consideren todas las condiciones del problema.

3. Construye un modelo dinámico en GeoGebra que te permita mover el punto P (punto en tierra) sobre la recta que une los postes. Comenta el proceso de construcción.
4. ¿Qué sucede con la longitud del cable cuando la posición del punto P cambia?

Se debe guiar al estudiante a que construya y explore de manera inicial un modelo dinámico que represente al problema. El camino de construcción puede variar, pero se deben conservar las condiciones del problema. Se espera que el modelo dinámico se asemeje al que se muestra a continuación (Figura 1).

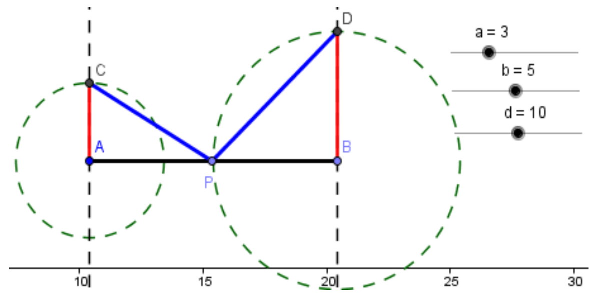
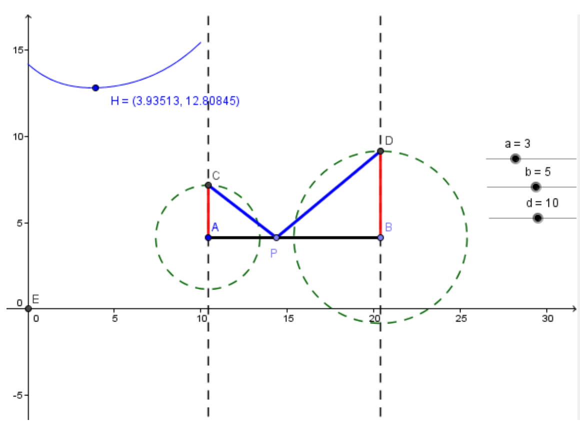


Figura 1. Ejemplo de un modelo dinámico que representa el problema

5. Hallar la representación gráfica que relacione la posición del punto P sobre la recta que une los postes en tierra con la longitud del cable correspondiente ¿Qué propiedades tiene la representación gráfica de la longitud?
6. Identificar visualmente en qué punto sobre la gráfica la longitud del cable es mínima.
7. Obtener una tabla que muestre la longitud del cable para diferentes posiciones del punto P e identificar cuándo la longitud del cable alcanza el valor mínimo.
8. ¿De qué manera es posible encontrar el valor mínimo de la longitud del cable?

En las preguntas 5-8 se desea que el estudiante explore el modelo dinámico y se aproxime de manera empírica a la solución del problema, a través del análisis del comportamiento de los datos de manera gráfica y tabular (Figura 2).



	A	B
1	x(H)	y(H)
2	4.61045	12.85225
3	4.61045	12.85225
4	4.4979	12.84117
5	4.44162	12.83618
6	4.38534	12.83158
7	4.32907	12.82734
8	4.27279	12.82349
9	4.21651	12.82002
10	4.16024	12.81693
11	4.10396	12.81422
12	4.04768	12.81191
13	3.99141	12.80998
14	3.93513	12.80845
15	3.87885	12.80732
16	3.82258	12.80659
17	3.7663	12.80627
18	3.71002	12.80635

Figura 2. Ejemplo de acercamiento gráfico y tabular.

Un acercamiento con Excel

9. ¿Cómo puede determinarse la distancia entre el extremo superior de un poste y el punto P?
10. ¿Cuáles datos necesitas conocer para encontrar la longitud del cable?
11. ¿Existe un valor del cual dependa la longitud del cable?
12. ¿De qué manera se puede relacionar y organizar la información que se proporciona en el problema para encontrar la longitud del cable?
13. Realiza una hoja de cálculo en Excel que permita conocer la longitud del cable a partir de un valor del cual dependan todos los demás datos necesarios. Recuerda que en Excel es posible escribir fórmulas en las que se haga referencia a celdas específicas.
14. Encuentra la posición del punto P para la cual la longitud del cable es mínima. Comenta cómo lo localizaste.

El trabajo con la hoja de cálculo se considera un complemento que permite a los estudiantes relacionar los datos y observar su comportamiento mediante un análisis numérico. Este acercamiento también permite generar discusiones sobre el dominio de la función. Un ejemplo de la hoja de cálculo que se puede construir es la siguiente:

	A	B	C	D	E
1	**AP**	**PB**	**CP**	**PD**	**CP+PD**
2	0	=10-A2	=RAIZ(9+(A2^2))	=RAIZ(25+B2^2)	=C2+D2
3					

Figura 3. Ejemplo de organización de una hoja de cálculo para el problema de los postes.

Otras posibles soluciones

15. ¿De qué otra manera podemos encontrar la posición que debe tener el punto P para que longitud del cable sea mínima?

Con esta pregunta se promueve que el estudiante encuentra más formas de resolver el problema puede ser de manera algebraica y apoyarse de herramientas como WolframAlpha, o bien, de manera geométrica.

En los siguientes enlaces puede ver las sugerencias para el trabajo en GeoGebra de esta actividad

https://www.dropbox.com/s/s28x0c02zkzisg3/problema%20de%20los%20postes.ggb?dl=0
https://www.dropbox.com/s/0zglecgd314mlty/Problema%20de%20los%20postes%202.ggb?dl=0

Función exponencial y logarítmica

4.1) Actividad: Inversiones bancarias

Autor: María del Carmen Olvera Martínez

Correo: carmen.olvera@ujed.mx

La función exponencial es abordada en esta Actividad partiendo del análisis de una situación que involucra la inversión a plazo de cierta cantidad de dinero en un banco, con ciertas condiciones en la tasa de rendimiento. Inicialmente se promueve el uso de Excel para elaborar tablas de valores que permitan conocer la cantidad de dinero generada por los intereses de la inversión y el comportamiento que estos datos tienen, para posteriormente crear la función que modela dicha situación. Dado que se trata de una función exponencial del tipo $f(x) = a * b^x + c$*, se propone graficar en GeoGebra la función que representa al problema, variar las condiciones iniciales y observar de qué manera se modifica la gráfica. Se espera que se identifiquen el efecto que tiene en la gráfica la variación de cada uno de los parámetros* a, b *y* c*, pero además que establezca la relación con la situación inicialmente planteada. También, se hace una comparación entre la función lineal y la exponencial en cuanto a las características de la tasa de cambio.*

Inversiones bancarias

Situación. Un banco brinda a sus clientes preferentes una opción de inversión a plazo, la cual consiste en que si el cliente invierte más de $20,000, entonces el banco le ofrece una tasa de rendimiento del 5% de interés anual sobre la cantidad excedente a los $20,000 de requisito. Un empresario vio atractiva esta inversión y decide invertir $60,000 a un plazo de 10 años.

1. Elabora una hoja de cálculo en donde se muestre el comportamiento de la inversión en cada año transcurrido.

Para construir la hoja de cálculo es necesario entender la situación planteada, identificar lo que se pide encontrar y seleccionar la información necesaria para establecer relaciones. Una actividad importante en la hoja de cálculo es organizar los datos, por lo que resulta relevante la manera de etiquetar cada columna. Los títulos escritos en las columnas dan muestra del entendimiento que se tiene del problema y de la manera de establecer relaciones entre los datos. Aunque cada hoja de trabajo puede ser diferente, la manera en que se organiza la información debe ser similar, esto es, las diferencias pueden consistir en los títulos de las columnas o la cantidad de columnas que involucran. Por ejemplo, se puede proponer una hoja como la siguiente:

	A	B	C	D	E	F
1						
2				Interés	0.05	
3						
4	Año	Capital Inicial	Excedente inicial	Rendimiento	Capital Final	Excedente final
5	1	60000	=B5-20000	=C5*E$2	=B5+D5	=E5-20000
6	2	=E5	=B6-20000	=C6*E$2	=B6+D6	=E6-20000
7	3	=E6	=B7-20000	=C7*E$2	=B7+D7	=E7-20000

2. Con base en la información de la tabla, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánta cantidad hay de excedente en el primer año?

b) ¿En el segundo año?

c) ¿En el sexto año?

d) ¿Cuánto hay de excedente al finalizar el plazo?

e) ¿Cuál es la cantidad total que espera obtener el empresario al terminar el plazo?

Con estas preguntas se espera que los estudiantes puedan explorar el problema a partir de los resultados obtenidos en su hoja de cálculo. Así puedan observar el comportamiento de los datos.

f) El empresario observa que en el primer año su inversión aumento $2,000. Por lo tanto, le indica al ejecutivo del banco que mejor invierta su dinero a un plazo de 20 años pues desea que su inversión crezca hasta $100,000. ¿Es correcto el razonamiento del empresario? ¿Por qué?

La finalidad de esta pregunta es que se detecte un error en la forma de razonar del empresario, ya que, si el empresario invierte su dinero a 20 años, se reuniría un total de $126,131.91. Se espera que los estudiantes observen que, al transcurrir un año, efectivamente la cantidad total se incrementa en $2,000 como lo mencionó el empresario; sin embargo, del primer al segundo año hay un incremento de $2,100 mientras que del segundo al tercer año el incremento es de $2,205. De tal manera que puedan conjeturar que el empresario no se percató de lo anterior y asumió que el incremento siempre sería de $2,000 por año, esto es, se debe promover el análisis entre el crecimiento exponencial y el lineal.

g) El empresario le pregunta al ejecutivo del banco de qué manera puede calcular el monto total que tendría según el número de años de inversión. ¿Qué respuesta le darías tú? ¿Por qué?

h) Bosqueja una gráfica de la situación.

Con esta pregunta se espera que los estudiantes puedan hacer un análisis de casos particulares para que encuentren un patrón de comportamiento en los datos y lleguen a establecer la función $C(x) = 40000(1.05)^x + 20000$*, donde* $C(x)$ *es la cantidad total reunida y* x *representa el número de años transcurridos. Es importante que se haga énfasis que* x *solo puede tomar valores enteros mayores o iguales a cero debido a que el interés es anual, principalmente para el bosquejo de la gráfica.*

3. Grafica la función correspondiente a esta situación en GeoGebra. Observa y comenta qué pasa cuando:

a) La tasa de rendimiento (%) es modificada.

b) El requisito de $20,000 en la inversión se cambia.

Estas tareas tienen la intención de que se analicen los efectos en la gráfica y en la expresión algebraica al cambiar algunas condiciones de la situación. Se espera que conjeturen que mientras más alta sea la tasa de rendimiento anual, la cantidad total aumentará de manera más rápida. Respecto a los cambios en el requisito, se desea que observen que es conveniente que la cantidad de requisito sea pequeña, pues el excedente será mayor y crecerá más rápido el dinero reunido. Es importante que se observen los cambios en la representación gráfica y algebraica al variar los parámetros de la función exponencial, pero siempre interpretando esos cambios dentro del contexto del problema.

4. En el tiempo $t = 0$ una especie de tortuga es liberada en un estanque. Cuando $t = 4$, un biólogo determina que hay 300 tortugas en el estanque. Tres años después hay 450 tortugas. Sea P la población de tortugas en el año t:

a) Encuentra una fórmula para $P = f(t)$ asumiendo un crecimiento lineal. Interpreta los parámetros de la fórmula en términos de la población de tortugas.

b) Encuentra una fórmula para $P = g(t)$ asumiendo un crecimiento exponencial. Interpreta los parámetros de la fórmula en términos de la población de tortugas.

c) Con base en su experiencia el biólogo estima que cinco años después ($t = 12$) habrá 900 tortugas en el estanque. ¿Cuál modelo se ajusta mejor a la estimación del biólogo? ¿Por qué?

Con estos incisos de la pregunta 4 se tiene la intención de los estudiantes obtengan las fórmulas que representan dos tipos de crecimiento: lineal y exponencial. Para el primer caso *la fórmula que se espera que obtengan es $P(t) = 50t + 100$ y para el segundo inciso es $P(t) = 175(1.1447)^t$.*

5. Considera la fórmula general de la función exponencial y explora en GeoGebra el efecto de la variación de los parámetros a, b y c. Comenta y justifica cómo afecta a la gráfica la variación del valor de cada uno de los parámetros.

Con esta tarea se espera que los estudiantes puedan explorar, a través del uso de deslizadores en GeoGebra, el efecto que tiene en la gráfica la variación de los parámetros a, b y c en la función $f(x) = a * b^x + c$. Este análisis, aunque estaría fuera del contexto del problema, permita profundizar en las propiedades matemáticas de la función exponencial. De manera general, se debe guiar a los estudiantes a que reconozcan que:

- *Para el parámetro a: si $a > 0$ la gráfica de la función es cóncava hacia arriba, si $a <$ 0 es cóncava hacia abajo y si $a = 0$ entonces la gráfica es una línea horizontal.*
- *Para el parámetro b: los valores de b no puede ser negativos por ser la base. Si $b = 1$, la gráfica es una línea horizontal correspondiente a $y = a + c$. Cuando $a > 0$ y $b > 1$ la gráfica es creciente y mientras más grande sea el valor de b la gráfica crece más rápido. Cuando $a > 0$ y $0 < b < 1$, la gráfica decrece y para valores cada vez más pequeños de b lo hace de manera más rápida. Si $a < 0$ y $b > 1$, la gráfica decrece y lo hace más rápidamente para valores cada vez más grandes de b. La gráfica es creciente cuando $a < 0$ y $0 < b < 1$, para valores pequeños de b, el crecimiento es más rápido. Además, pueden distinguir que la gráfica $f(x) = abx + c$ es simétrica a $g(x) = a\left(\frac{1}{b}\right)x + c$ respecto al eje vertical.*
- *Para el parámetro c. La variación de este parámetro provoca un movimiento vertical en la gráfica, por lo tanto, afecta también a la intersección de la función con el eje vertical. De esta manera, la ordenada en el origen está dada por $a + c$, pues cuando $x = 0$ entonces $b = 1$. Además, la asíntota de la gráfica de la función corresponde a $y = c$.*

6. Las siguientes fórmulas representan la población (en miles) de cuatro diferentes ciudades A, B, C y D. Describe en palabras cómo estas poblaciones están cambiando a lo largo del tiempo e interpreta los parámetros de la fórmula en términos de la población.

$$P_A = 200 + 1.3t$$

$$P_B = 270(1.021)^t$$

$$P_C = 150(1.045)^t$$

$$P_D = 600(0.978)^t$$

Esta pregunta tiene la intención de promover la interpretación de fórmulas. En este caso se espera que identifiquen que en la población A el crecimiento es lineal, la población inicial era de 200 mil personas y cada año aumentaba 1300 de manera constante. En B y C el crecimiento era exponencial y en D, era un decrecimiento exponencial. En la ciudad B se tiene que la población inicial es de 270,000 y el crecimiento anual es de 2.1%. Para la ciudad C, la población inicial es de 150,000 con un crecimiento anual de 4.5%. Mientras que en la ciudad D. la población inicial es de 600,000 y tiene un decrecimiento de 2.2%.

En el siguiente enlace puede ver la sugerencia del archivo en GeoGebra para esta actividad
https://www.dropbox.com/s/s9afyrtbq2y4iri/par%C3%A1metros%20exponencial.ggb?dl=0

4.2) Actividad: Distancia entre el sol y los planetas

Autor: Mtra. Liliana Aurora Tabares Sánchez

Correo: liliana_ats@hotmail.com

La actividad propuesta tiene como objetivo ofrecer un apoyo para el estudio y aprendizaje de la función logaritmo cuando es definida como la inversa de la función exponencial.

Distancia entre el sol y los planetas

La primera parte de la actividad tiene la intención de exponer la necesidad usar la escala logarítmica como una alternativa para ubicar cantidades que crecen en grandes proporciones y ver de manera directa al logaritmo base diez como la operación inversa a elevar diez a un exponente x.

Se sugiere a ver el video de la siguiente página https://www.youtube.com/watch?v=Wj2-xxovArQ.

Se sugiere a ver el video con el fin de que los estudiantes tengan referencia de las distancias que se están usando en la actividad y sean sensibles a las proporciones alcanzadas.

Con los siguientes datos aproximados de las distancias de los planetas al sol realiza las tareas propuestas.

	Planeta	**Distancia media del Sol**
1	Mercurio	57 910 000 km
2	Venus	108 200 000 km
3	La Tierra	146 600 000 km
4	Marte	227 940 000 km
5	Júpiter	778 330 000 km
6	Saturno	1 429 400 000 km
7	Urano	2 870 990 000 km
8	Neptuno	4 504 300 000 km
9	Plutón*	5 934 456 500 km

Aunque Próxima Centauri es la estrella más cercana al Sol, 4,2 años luz sigue siendo una distancia extraordinaria para una nave espacial, que tendría que recorrer 40 billones de kilómetros (40 000 000 000 km).

Nota en la escala inglesa el un billón es igual a $1 * 10^9$

a) Con la información que se proporciona escribe completa la tabla donde expreses las distancias en millones de kilómetros, por ejemplo, la distancia de Mercurio es $57.91 * 10^6$ millones de kilómetros.

	Planeta	**Distancia media del Sol**	
1	Mercurio	57 910 000 km	$57 * 10^6$
2	Venus	108 200 000 km	
3	La Tierra	146 600 000 km	
4	Marte	227 940 000 km	
5	Júpiter	778 330 000 km	
6	Saturno	1 429 400 000 km	
7	Urano	2 870 990 000 km	
8	Neptuno	4 504 300 000 km	
9	Plutón*	5 934 456 500 km	
	Centauri	40 000 000 000 km	

1. ¿Qué significado tiene escribir el diez elevado a un número cuando está multiplicando a otro?

Con esta pregunta buscamos que el estudiante se haga consiente que el usar la notación exponencial es otra forma de escribir una cantidad.

b) Dibuja una recta numérica en la que cada centímetro corresponda a mil millones de kilómetros y localiza sobre ella donde se ubican aproximadamente los nueve planetas Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno.

2. En la recta numérica que acaba de dibujar ¿Qué distancia representa la quinta división de la recta numérica?

3. ¿Qué longitud tiene la recta numérica que dibujaste para localizar los nueve planetas?

4. Con la escala anterior: ¿Cuánto tendría que medir la recta numérica para poder localizar sobre ella la estrella Centauri?

Con las preguntas 2, 3 y 4 el estudiante puede comprobar que la escala que está usando para identificar las distancias de los planetas es insuficiente para poder visualizar distancias más grandes.

c) Dibuja otra recta numérica en la que la primera división (de un centímetro de longitud) corresponda a 10^1 millones de kilómetros la segunda división a 10^2 millones de kilómetros y así sucesivamente y localiza sobre ella donde se ubican aproximadamente los nueve planetas y la estrella Centauri.

5. En la recta numérica que recién dibujaste ¿Qué distancia representa la quinta división?

6. ¿Cuál es la diferencia entre la escala de la recta en la que cada centímetro corresponda a mil millones de kilómetros y la de esta dada con 10^n?

Los estudiantes corroboran que la escala logarítmica es más eficiente para este tipo de longitudes.

En la recta numérica que realizaron anteriormente se ubican aproximadamente las distancias de los planetas entre escalas de diez a una potencia con numero entero 10^x, por ejemplo, la estrella Centuri cuya distancia al sol es de 40 000 millones de kilómetros la ubicamos muy cerca de 10^5. Para conocer la potencia exacta a la que debemos elevar 10 para tener como resultado los 40 0000 millones de kilómetros usamos la operación opuesta al exponente que es la función logaritmo.

$\log(40\,000) = 4.60205999132796$

Es decir que $10^{4.60205999132796} = 40\,000$

d) Usando la calculadora complete la tabla de los valores de x con los que es elevado 10 para tener las distancias más exactas de los planetas al sol.

Planeta	Distancia	Log(x)	Log(x)	10^x
Mercurio	57 910 000	Log 57 910 000	7.76275356	$10^{7.7625356}$
Venus	108 200 000			
La Tierra	146 600 000			
Marte	227 940 000			
Júpiter	778 330 000			
Saturno	1 429 400 000			
Urano	2 870 990 000			
Neptuno	4 504 300 000			
Plutón	5 934 456 500			

Usar GeoGebra como herramienta para análisis

e) Con ayuda de la calculadora calcula $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$ (el logaritmo es base 10) con los valores de x igual a 1/10, 1/5, 1/4, 1/2, 3/2, 5/6, 1,1 $\frac{1}{10}$ para $f(x)$y con los valores de x igual a 1/10, 1/4, 1/2, 1, 2, 5, 10 y 18 para g(x). Escribe los pares ordenados que corresponden a los puntos de cada función.

$f(x) = 10^x$		$g(x) = \log x$	
$f\left(\frac{1}{10}\right) = 10^{\frac{1}{10}}$	$\left(\frac{1}{10}, 10^{\frac{1}{10}}\right)$		

f) Grafica en GeoGebra los puntos de f(x) y g(x) que calculaste.

7. ¿Encuentras alguna relación entre las coordenadas de la función f(x) y las de la función g(x)?

8. ¿Qué propiedad cumplen las funciones inversas respecto a la función identidad?

Se busca poner en contexto el hecho que una función multiplicada por si inversa es igual a la función identidad o una interpretación equivalente.

g) Define las funciones f(x), g(x) y h(x)=x en GeoGebra. Recuerda que para definir la función logaritmo será con base 10.

h) Coloca un punto A sobre h(x). Este punto que se encuentra sobre la función identidad nos ayuda a ver de forma más clara la relación entre las funciones exponencial y logaritmo.

i) Agrega una recta perpendicular al eje x y otra al eje y usando el punto A de la función h.

j) Localiza los putos de intersección de las rectas perpendiculares a los ejes y las funciones exponencial y logaritmo respectivamente.

k) Visualiza los valores de los puntos de intersección con la gráfica de las funciones f(x) y g(x).

l) Mueve el punto A y analiza las coordenadas de los puntos de intersección B y C.

10. ¿Cómo son las coordenadas de las funciones entre sí?

Se espera que con esta actividad los estudiantes puedan visualizar la relación de las funciones logaritmo y exponencial de manera gráfica.

La construcción en GeoGebra que los estudiantes construirán se sugiere que sea parecida a la que se muestra en el enlace:
https://www.dropbox.com/sh/2kh2h9yburdgejv/AADmALfUv25V3V5ou8JpoL23a?dl=0

Funciones trigonométricas

5.1) Actividad: Horas de luz solar

Autores: Carlos Michelle Díaz Leyva y

Karla Rocío Campos Martínez

Correo: cdiazleyva@gmail.com

El objetivo de esta tarea matemática es proponer una manera de abordar el estudio de las funciones trigonométricas seno y coseno a través de la resolución de problemas dentro de contextos reales, en este caso, el análisis de las horas de luz solar en dos ciudades de dos países distintos. En ella se analizan los parámetros de estas funciones y su construcción de forma algebraica por medio de la investigación y la observación de graficas de funciones.

Horas de luz solar

En el año 2015, en la ciudad de Monterrey, el día más largo ocurre el 21 el junio (con trece horas cuarenta y dos minutos de luz solar) y el día más corto es el 21 de diciembre (con diez horas y treinta minutos de luz solar). Los equinoccios, que son los días en que la longitud del día y la noche son aproximadamente iguales a 12 horas, suceden el 21 de marzo y el 21 de septiembre.

En la siguiente tabla se registraron los datos anteriores de las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes en la ciudad de Monterrey.

Tabla 1. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Monterrey, México.

Mes	Horas de luz solar
Enero	
Febrero	
Marzo	12.10
Abril	
Mayo	
Junio	13.77
Julio	
Agosto	
Septiembre	12.10
Octubre	
Noviembre	
Diciembre	10.5

1. Con ayuda de GeoGebra, grafica los datos obtenidos en la tabla anterior.

Con las preguntas uno, dos y tres el estudiante debe definir el dominio como los meses del año y el contra dominio como las horas de luz de cada mes para que estos le den un sentido al problema, ya que si se escoge como dominio las horas de luz y de contra dominio a los meses del año 2015 estaríamos diciendo que dada las horas de luz podemos conocer el mes en el que estamos.

Además, el estudiante debe de analizar que los datos registrados en la tabla de la ciudad de Monterrey, México están dados en notación decimal y concluyan que es necesario expresar los minutos en notación decimal para poder graficarlos en GeoGebra.

El estudiante debe de relacionar cada mes con los números naturales del 1 al 12, en donde enero toma la posición número uno y diciembre toma la posición número doce.

2. ¿Cuál variable asocias al eje horizontal? ¿Por qué?

En esta respuesta se espera que el estudiante asocie al eje horizontal con los meses del año 2015.

3. ¿Cuál variable asocias al eje vertical? ¿Por qué?

En esta respuesta se espera que el estudiante asocie al eje vertical con las horas de luz de cada mes del año 2015.

4. ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? ¿Por qué?

En esta pregunta se espera que el estudiante pueda proponer que la gráfica de la función que modela los datos de la Tabla 1 es una función trigonométrica, aunque se puede dar el caso que los estudiantes por la ubicación de los cuatro puntos dados en la Tabla 1 mencione otro tipo de función.

5. Escribe la función que crees que representan esos puntos.

El objetivo de esta pregunta es que el estudiante escriba en su forma algebraica la función que representa a los puntos de la Tabla 1 graficados en GeoGebra.

6. ¿Cuál crees que sea el comportamiento de los días 21 de cada mes del año 2016?

El objetivo de esta pregunta es que el estudiante analice y mencione que el comportamiento para el siguiente año es similar al del año 2015 dando así la introducción al concepto de periodo el cual caracteriza a las funciones trigonométricas.

Si los estudiantes no logran identificar un comportamiento periódico se les puede pedir que vaya a la página de www.sunrise-and-sunset.com e investiguen si existe dicho comportamiento.

7. Con ayuda de los datos que se proporcionan en la página www.sunrise-and-sunset.com, completa la Tabla 1 y grafica en GeoGebra los nuevos datos obtenidos.

Las preguntas siete, ocho y nueve tienen como objetivo que el estudiante complete la Tabla 1 con ayuda de los datos proporcionados en la página web. Es importante mencionarle al estudiante que los datos que tiene que registrar para completar la Tabla 1 son los de los días veintiuno de cada mes, después los grafique en GeoGebra y que al observar la serie de puntos graficados en GeoGebra reflexione si la función que propuso en un inicio modela los nuevos datos graficados o si tiene que realizar un cambio en su función propuesta.

En esta parte el estudiante debe de reconocer que la gráfica de la función que modela los datos graficados es una función trigonométrica, en especial, la función seno o coseno. Si el estudiante en un principio propuso una función trigonométrica seno o coseno se espera que mantenga su respuesta de la pregunta número cuatro.

Si el estudiante no logra reconocer una función trigonométrica entonces se le puede pedir que grafique los datos obtenidos del año 2016 para que tenga más información y pueda proponer una función trigonométrica.

8. Con base en la última gráfica, ¿mantienes tu propuesta a la pregunta 4?
   SI _____ NO_____ ¿Por qué?
9. En caso de que tu respuesta haya cambiado, ¿cuál es el tipo de función que representan los puntos de la última gráfica?
10. ¿Cuáles son los parámetros de la función que encontraste?

En esta pregunta se espera que el estudiante investigue en Internet, libros de matemáticas o en otros medios, cuáles son los parámetros de la función seno o de la función coseno.

$$f(x) = a * sin(bx + c) + d \;\; y \;\; f(x) = a * cos(bx + c) + d$$

11. En GeoGebra, grafica la función que propones y asigna un deslizador a cada uno de sus parámetros.

En las preguntas once y doce el estudiante deberá de crear un deslizador para cada uno de los parámetros de la función que previamente investigó, escribir la función en la barra de entrada *de GeoGebra y empezar a variar los parámetros hasta que la gráfica de la función coincida con los datos graficados de la Tabla 1.*

A continuación, se muestra el valor de cada parámetro para que la función coincida con los puntos que se graficaron.

$$f(x) = 1.53 * \sin(0.53x - 1.57) + 12$$

$$f(x) = 1.53 * \cos\ (0.53x - 3.14) + 12$$

12. Varía los valores de los deslizadores hasta encontrar la gráfica que pasé por todos los puntos. ¿Qué valor obtuviste para cada parámetro?
13. Abre el archivo de GeoGebra "Horas de luz solar". En él se encuentran graficadas funciones que tal vez puedan pasar por todos los puntos. Explora las diferentes opciones y escribe el valor de los parámetros a, b, c y d que encontraste para que la función se aproxime a los datos.

    a: _____ b: _____ c: _____ d: _____

Si el estudiante después de las preguntas anteriores no logra identificar una función trigonométrica, entonces se abrirá el archivo de GeoGebra que se indica y tendrá que observar cuales de las tres funciones presentadas en el archivo es la que modela los datos graficados.

14. En la función que encontraste,

En esta pregunta los estudiantes deben de analizar lo que hace cada uno de los parámetros con las funciones seno y coseno

- *El parámetro a es la amplitud, este parámetro cambia el tamaño de la función, si $a > 1$ se amplifica su forma. Si $0 < a < 1$ se hace más pequeña. Si $a < 0$ entonces se invierte su forma.*
- *El parámetro b es la frecuencia, este parámetro modifica el grado de repetición. Si $b > 1$ la función se repite más rápidamente. Si $0 < b < 1$ la función se repite más lentamente.*
- *El parámetro c es el desplazamiento, este parámetro determina el desplazamiento horizontal de la función. Un signo $(+)$ en la fase, implica que la función se adelante (o sea, se corre a la izquierda) y un signo $(-)$ en la fase implica que la función se atrase (o sea, se corre a la derecha).*
- *A la función $f(x)$ se le agrega una constante d ésta se desplazará d unidades hacia arriba si su signo es más o se desplazará d unidades hacia abajo si su signo es menos.*
    a. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador a?
    b. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador b?

c. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador c?
d. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador d?

15. En la Tabla 2 se muestran las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes del año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Tabla 2. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Mes	**Horas de luz solar**
Enero	14.03
Febrero	13.06
Marzo	12.06
Abril	10.98
Mayo	10.15
Junio	9.8
Julio	10.13
Agosto	10.96
Septiembre	12.03
Octubre	13.1
Noviembre	14.03
Diciembre	14.43

Encuentra, sin uso de GeoGebra, la función que representa estos datos.

En esta pregunta se espera que el estudiante mediante el uso de internet, libros de matemáticas u otros medios encuentre dos de los cuatro parámetros de la función seno, uno de ellos es el parámetro de amplitud (a).

Su fórmula es la siguiente:

$$amplitud = \frac{valor\ maximo - valor\ minimo}{2}$$

En donde:

Valor máximo: es el mayor número de horas de luz solar que se registró en la tabla.

Valor mínimo: es el menor número de horas que se registró en la tabla.

Otra de las fórmulas que se espera que los estudiantes encuentren en internet es la siguiente:

$$periodo = \frac{2\pi}{b}$$

Aquí el estudiante tendrá que realizar un despeje, el cual se muestra a continuación:

$$b = \frac{2\pi}{periodo}$$

Dónde:

Periodo: los vamos a tomar como un año, ya que en la tabla se realizó un registro de doce meses, por lo tanto, el periodo va a ser igual a 12 meses, es decir, un año.

Para los parámetros c *y* d *se espera que los estudiantes retomen el caso de la ciudad de Monterrey y compararen la gráfica de la función seno* $f(x) = sen(x)$ *o la función coseno* $f(x) = cos(x)$ *y la gráfica que modela los datos de la ciudad de Monterrey, México. Para obtener el parámetro* d *en el caso de la función seno los estudiantes deben de analizar que la gráfica de la función seno tiene una intersección en el punto* $(0,0)$*, mientras que la gráfica de la ciudad de Monterrey al poner su deslizador* c *en valor* 0 *tiene una intersección en el punto* $(0,12)$*, es decir el valor del parámetro* d *es* 12*.*

En el caso de la función coseno los estudiantes deben de analizar que la gráfica de la función coseno tiene una intersección en el punto $(0,1)$*, mientras que la gráfica de la ciudad de Monterrey al poner su deslizador* c *en valor* 0 *tiene una intersección en el punto* $(0,13)$*, es decir el valor del parámetro* d *es* 12*.*

Para obtener el parámetro c *los estudiantes deben de analizar que cuando se pone el parámetro* c *en cero se observa que el valor máximo de la función coincide con el mes de marzo. Los estudiantes deben de identificar que la gráfica de la función esta desplazada 3 meses a la derecha y deben de llegar a la siguiente relación.*

Si $12\ meses = 2\pi$*, donde* 2π *es el periodo de la función seno se obtiene la siguiente relación:*

Meses	***Radianes***
12	2π
6	π
3	$\frac{\pi}{2}$

Y obtener que el valor de c *es igual a* $\frac{\pi}{2}$*, pero el desplazamiento en Buenos Aires es hacia la izquierda. Si el estudiante eligió la función coseno al desplazamiento tendrá que sumarle* $\frac{\pi}{2}$ *por la siguiente igualdad:*

$$sen(ax) = cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

Además, observar que el comportamiento obtenido de los parámetros c *y* d *encontrados en la ciudad de Monterrey funciona para la ciudad de Buenos Aires, Argentina.*

La función que deben obtener con las fórmulas matemáticas investigadas y lo observado en la comparación de las gráficas es:

$$\boldsymbol{f(x) = 2.13 * sen\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right) + 12}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 2.13 * cos\left(\frac{\pi}{6}x + \pi\right) + 12}$$

16. Grafica en GeoGebra la función que encontraste en el inciso anterior en la gráfica que obtuviste en la pregunta 7.
17. ¿Qué observas en las gráficas?

El objetivo de las preguntas 17 y 18 es que los estudiantes puedan hacer comparaciones de las gráficas de la ciudad de Monterrey, México y la ciudad de Buenos Aires, Argentina, por ejemplo, que el día con menos horas de luz en Buenos Aires ocurre en junio, en cambio en Monterrey esto ocurre en el mes de diciembre.

18. Completa la siguiente tabla comparando los resultados obtenidos de los datos de Monterrey y Buenos Aires.

	Diferencias	**Semejanzas**
Expresión algebraica		
Gráfica		

Justifica cada una de las diferencias y semejanzas que encontraste

19. Con base en lo observado, ¿Cuántas horas de luz habrá el día 21 de diciembre del 2018 en la ciudad de Monterrey? Justifica tu respuesta

En esta pregunta los estudiantes deben de identificar que la función es periódica por lo tanto las horas de luz en diciembre del año 2015 serán iguales a las de diciembre del año 2018. Por otro se puede hacer la comprobación mediante la sustitución en la formula encontrada en la ciudad de Monterrey.

20. Ve el video: https://www.youtube.com/watch?v=VBLxGv32OWs&t=50s y responde
    a. ¿Qué relación tiene el contenido del video con lo que trató la actividad?

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes logren identificar que el ángulo de inclinación del planeta tierra influye en la duración del día en distintos países.

    b. Escribe dos ciudades, de otros dos países que tengan un comportamiento similar a la ciudad de Monterrey, México observado en esta tarea.

En esta pregunta el estudiante deberá de investigar en la página web que se le presentó al inicio de la actividad dos ciudades que tengan el mismo comportamiento de la ciudad de Monterrey, México

En el siguiente enlace puede ver la sugerencia del archivo en GeoGebra para esta actividad *https://www.dropbox.com/s/hu9z0727f0igw1g/Horas%20de%20luz.ggb?dl=0*

Función monótona

6.1) Funciones monótonas y sus inversas

Autor: María Elena Irigoyen Carrillo

Correo: mariaelena940803@hotmail.com

La secuencia didáctica está diseñada para que el alumno construya y reflexione el concepto de función monótona y haga uso de sus conocimientos de cálculo adquiridos en cursos previos para conjeturar el siguiente enunciado:

Si una función es no monótona, entonces la función no tiene inversa.

Se recomienda que se tengan conocimientos previos sobre temas de funciones, dominio y rango de funciones, funciones biyectivas, funciones continuas, composición de funciones, funciones inversas, asíntotas, entre otros.

La conjetura del enunciado se logrará refutar, mediante el uso y reflexión de contraejemplos específicos, empleando como apoyo la herramienta GeoGebra. Además, se espera que, una vez analizados los casos particulares, los estudiantes puedan construir un contraejemplo, distinto a los propuestos, que refute la conjetura.

La actividad se divide en tres tareas específicas que tienen objetivos claros que se complementa para llegar al propósito general. Las distintas tareas se titulan "Composición de funciones y funciones inversas", "Funciones monótonas y sus graficas" y "Funciones monótonas y sus inversas" para poder hacer referencia a ellas.

Composición de funciones y funciones inversas

*En la primera tarea, llamada **composición de funciones y funciones inversas,** se plantean una serie de ejercicios sobre: dominio y rango de funciones, composición de funciones y obtención de la inversa de funciones, con la cual se pretende que el estudiante recuerde y se familiaricé con dichos conceptos matemáticos, los cuales se considera que ya han sido estudiados en sus cursos previos de cálculo.*

Esta tarea, también permite que el docente conciba una idea general del nivel de conocimiento que poseen sus estudiantes respecto al contenido abarcado, y de este modo, pueda identificar las áreas de oportunidad de sus estudiantes.

1. Las siguientes funciones serán empleadas en los incisos a, b y c

I. $f(x) = x^2$

II. $g(x) = \frac{1}{x}$

III. $h(x) = x^2 + 4x$

IV. $i(x) = \sqrt{x-1}$

a) Obtén el dominio y rango de las funciones descritas en 1.

b) Obtén las siguientes composiciones de funciones. Para los casos en los que **no** sea posible realizar la composición, explica por qué no se puede.

- $f \circ g$
- $g \circ h$
- $g \circ i$
- $h \circ i$
- $i \circ f$

c) Encuentra la función inversa para cada una de las funciones descritas en 1 verifica tus resultados. En caso de que **no** sea posible determinar la inversa de una función, explica por qué no es posible.

En esta parte de la tarea se recomienda al docente llevar a cabo la socialización con el grupo, con la finalidad de unificar resultados y aclarar dudas respecto al contenido matemático involucrado. De ser necesario, el docente deberá profundizar en los temas donde se hayan presentado dificultades.

En caso de presentarse dificultades, el docente puede guiarse con las siguientes preguntas.

Preguntas guía
¿Qué representa el "dominio" y "rango" de una función?
¿Es importante definir el dominio y rango de una función? ¿Por qué?
¿Cuándo se pueden componer dos funciones y cuándo no? Dar ejemplos
¿Es necesario conocer el dominio y rango de dos funciones, para poder componerlas? ¿Por qué?
Si al componer dos funciones, obtienes la función identidad, ¿qué relación existe entre ambas funciones?
¿Qué representa la inversa de una función? Dar ejemplos
¿Cuándo puedes obtener la inversa de una función? ¿Y cuándo no?

Enseguida, une vez finalizada la socialización de respuestas, y aclarado las dudas, se reanudará con la segunda parte de la actividad.

Funciones monótonas y sus gráficas

*La segunda tarea, titulada **funciones monótonas y sus gráficas,** se enfoca en el tema de funciones monótonas y no monótonas. Pretende que los estudiantes analicen algunas funciones a través de su representación tabular y gráfica y respondan a cuestionamientos que les permitirán construir, por equipo, una definición de función monótona, que les sea útil para identificar funciones monótonas y no monótonas en un conjunto de funciones y durante el análisis e interpretación de gráficas de funciones.*

Esta tarea, ofrece al docente, la oportunidad de identificar la manera en la que los estudiantes conciben el concepto de función monótona y proporcionar retroalimentación, en caso de percibir concepciones erróneas.

Esta parte del trabajo será contestada por equipo, justificando de manera clara, cada uno de sus resultados.

Analiza las siguientes funciones a través de su tabla y grafícalas en los recuadros.

a)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x & x < 4 \\ 4 & x \geq 4 \end{cases}$$

x	$f(x)$
-1	-1
0	0
1	1
4	4
6	4

b)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

c)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = -x^3$$

x	$f(x)$
-2	8
-1	1
0	0
1	-1
2	-8

d)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^3 + x^2$$

x	$f(x)$
-2	-4
-1	0
-0.5	0.125
0	0
2	12

e)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = 2^x$$

x	$f(x)$
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4

De acuerdo con las tablas y graficas de las funciones, contesta lo siguiente.

1. ¿En cuáles funciones se observa el siguiente comportamiento: si $x \leq y$, entonces si $f(x) \leq f(y)$ para todo x y y del dominio?

2. ¿En cuáles funciones se observa el siguiente comportamiento: si $x \leq y$, entonces si $f(x) \geq f(y)$ para todo x y y del dominio?

3. ¿En cuáles funciones se observan ambos comportamientos?

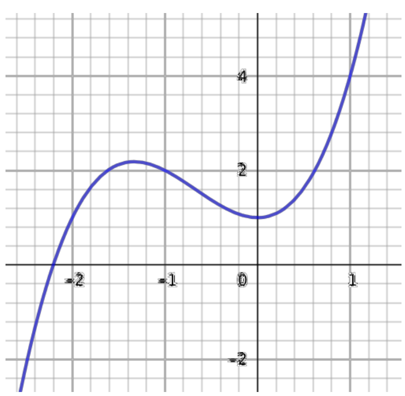
4. De acuerdo con tus respuestas y a la siguiente información construye la definición de ***función monótona***.

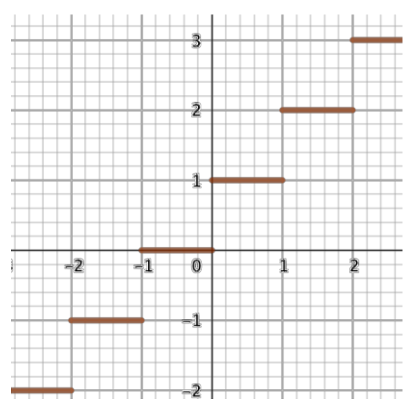
Las funciones de los incisos a), c), e) son funciones monótonas.
Las funciones de los incisos b) y d) son funciones no monótonas.

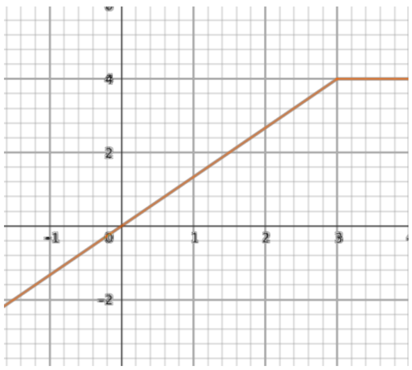
En esta parte de la tarea se sugiere al docente socializará con el grupo las distintas definiciones del concepto "función monótona", construidas por cada equipo. El objetivo del docente será, resaltar los elementos principales de cada definición, para de manera grupal, construir una nueva definición, misma que será empleada en futuros cuestionamientos.

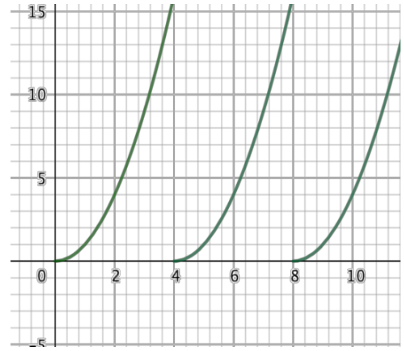
5. Modifica el dominio de las funciones no monótonas de la tabla anterior para convertirlas en funciones monótonas.

Dadas las siguientes gráficas de funciones, determina cuáles de ellas corresponden a funciones monótonas y cuáles no.









En esta parte de la tarea el docente en conjunto con el grupo, analizarán cada una de las funciones y gráficas de funciones, y determinaran cuáles de ellas son funciones monótonas, cuáles no y por qué.

Algunos de los cuestionamientos que puede realizar el docente, respecto al análisis de las funciones, son los siguientes.

Preguntas guía
¿Qué características hacen de una función, una función monótona?
¿Gráficamente, cómo se observa una función monótona? Dar ejemplos
¿Gráficamente, cómo se observa una función no monótona? Dar ejemplos
¿Una función monótona es siempre creciente, o decreciente?
¿La función constante es una función monótona? ¿Por qué?
¿Toda función monótona es continua? Dar ejemplos o contraejemplos.
¿Toda función monótona es biyectiva? Dar ejemplos o contraejemplos.

Funciones monótonas y sus inversas

*En la última tarea, llamada **funciones monótonas y sus inversas**, los estudiantes encontrarán la inversa de las funciones monótonas y no monótonas descritas anteriormente. Se espera que los estudiantes sean capaces de reconocer cuándo se da, o no, la existencia de inversas de funciones monótonas y no monótonas.*

Enseguida, empleando sus conjeturas y con ayuda de GeoGebra, los estudiantes graficarán y analizarán algunas funciones. Con base en este análisis, completarán una tabla relacionada con la clasificación de funciones monótonas y no monótonas y la existencia, o no existencia, de su inversa. La información contenida en esta tabla servirá de apoyo para reflexionar, a *través de preguntas, sobre relaciones que frecuentemente son mal interpretadas por los estudiantes. Por ejemplo:*

¿Si una función no es monótona, entonces no tiene una función inversa?

Se espera que, con la tabla resuelta, modifiquen o amplíen sus conjeturas y lleguen a la conclusión de que "existen funciones no monótonas, con inversa". Finalmente, los alumnos en equipo trataran de encontrar ejemplos que manifiesten tal hecho

A cada estudiante se le entregará la hoja de trabajo, correspondiente a la última parte. Se les pedirá que nuevamente la analicen y resuelvan por equipo, justificando cada una de sus respuestas.

Determina la función inversa para cada una de las funciones del ejercicio 2 y verifica tus resultados. Contesta lo siguiente.

1. ¿Para cuáles funciones sí fue posible determinar su inversa?
2. ¿Para cuáles funciones no fue posible determinar su inversa?
3. ¿Crees que el hecho de que una función sea monótona o no, influya en la existencia de su inversa? ¿Por qué?
4. Respecto a la reflexión anterior ¿qué conjeturas puedes dar, acerca de cuándo, o cuándo no, se puede obtener la inversa de una función monótona?

Una vez concluida esta parte de la tarea el docente se encargará de rescatar las conjeturas que los equipos pudieron conformar, respecto al hecho de cuándo una función monótona o no monótona, puede tener inversa. Tales conjeturas deberán de ser anotadas en un sitio donde puedan ser visibles para todo el grupo. Estas no deberán ser analizadas, pues se pretende que el estudiante por sí mismo reconozca su veracidad o falsedad, después del análisis de la actividad posterior.

Actividad en GeoGebra

El estudiante podrá utilizar la herramienta GeoGebra para analizar la gráfica de algunas funciones y para determinar su inversa. Además, con la información recabada, podrán completar una tabla de clasificación de funciones. Se espera que, con la información de la tabla, el estudiante pueda retomar y reflexionar, por sí mismo, las conjeturas formuladas, y modifique o amplié sus argumentos.

Con ayuda de la herramienta GeoGebra grafica las siguientes funciones y realiza lo siguiente.

I. $f(x) = \begin{cases} 5 & x > 5 \\ x & x \leq 5 \end{cases}$

II. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

III. $h(x) = \frac{1}{x} + x$

IV. $i(x) = e^x$

V. $j(x) = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$

VI. $k(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ 1/x + 1 & x < 0 \end{cases}$

1. Clasifica las funciones en: monótonas y no monótonas.

2. Obtén la inversa para cada una de las funciones (si es posible) y de igual forma clasifica las funciones en: funciones con inversa y funciones sin inversa.

Con la información obtenida completa la siguiente tabla.

	Funciones monótonas	Funciones no monótonas
Funciones con inversa		
Funciones sin inversa		

Con lo comprendido hasta el momento y con ayuda de la tabla, contesta las siguientes preguntas. (Justifica mediante pruebas o contraejemplos)

3. ¿Toda función monótona en los reales tiene inversa?
4. ¿Existen funciones no monótonas sin inversa?
5. ¿Toda función sin inversa es no monótona?

¿Si f es una función no monótona, entonces f no tiene inversa?

Con lo aprendido hasta ahora, modifica o completa tu respuesta a la pregunta: ¿qué conjeturas puedes dar, acerca de cuándo, o cuándo no, se puede obtener la inversa de una función monótona?

Aquí se el docente cuestionará sobre si es necesario modificar las conjeturas propuestas anteriormente y por qué. Además, en caso de que los estudiantes hayan formulado nuevas conjeturas, destacarlas. Si algunas de las conjeturas propuestas por los estudiantes son falsas, es importante mostrar contraejemplos que permitan refutarlas.

Respecto a la actividad realizada, da un contraejemplo, distinto a los ya presentados, a la siguiente conjetura: **Si *f* es una función no monótona, entonces *f* no tiene inversa**

Para finalizar con la actividad cada equipo deberá construir contraejemplos (con ayuda de GeoGebra o a lápiz y papel), que permitan refutar la conjetura: si una función es no monótona, entonces no tiene inversa. Dichos contraejemplos serán compartidos al resto del grupo.

Una vez cumplida la actividad, el docente rescatará ideas principales de la actividad.

En el siguiente enlace puede ver la sugerencia del archivo en GeoGebra para esta actividad

https://www.dropbox.com/s/l1s8jfuix890505/Funciones%20mon%C3%B3tonas.ggb?dl=0

Nombre: ____ Fecha: ________________

Llaves

Un estanque se llena por una de dos llaves en 4 horas y la segunda lo llena en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el estanque vacío si se abren ambas llaves al mismo tiempo? Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuántos litros de agua aporta la llave 1 en una hora?

2. ¿Qué parte del estanque se llena con la primera llave en una hora?

3. ¿Qué parte del estanque se ha llenado después de abrir la llave 1 durante una hora y media?

4. ¿Cuántos litros de agua aporta la llave 2 en una hora?

5. ¿Qué parte del estanque se llena con la segunda llave en una hora?

6. ¿Cuánta agua habrá en el estanque si se abre solamente la llave 2 por cuatro horas?

7. ¿Cómo será el llenado del estanque utilizando las dos llaves de forma simultánea?

8. ¿Qué pasaría si se abrieran las dos llaves durante tres horas?

9. ¿Qué parte del estanque se llena con las dos llaves en una hora?

10. ¿Cuánto tiempo deben estar abiertas las llaves, simultáneamente para que el estanque se llene completamente?

Explorando en GeoGebra.

Utilizando GeoGebra analiza y explora el llenado del estanque a partir de la información disponible y reflexiona:

11. ¿Qué variables puedes identificar asociadas al problema y cómo las relacionas con los ejes del plano cartesiano?

12. Coloca un punto A en el eje Y que represente la capacidad del estanque, ¿Qué valor sería adecuado para mostrar que el estanque está lleno? ¿Por qué?

13. Traza una recta perpendicular al eje Y que pase por el punto A.

14. Traza un punto B sobre el eje X pasando por 4 y una perpendicular al eje pasando por B.

15. Marca el punto C que se encuentra en la intersección de las dos rectas perpendiculares. En el contexto del problema, ¿Qué significado tiene ese punto?

16. ¿Cómo representas el tiempo que tarda la segunda llave? Realiza los trazos necesarios para mostrar el llenado por medio de la llave 2.

17. Traza el segmento i desde el origen hasta el punto C. Colorea el segmento de azul.

18. Traza el segmento j desde el origen hasta el punto E y coloréalo de rojo.

19. Coloca un punto P móvil sobre el eje X que permita representar una cantidad de tiempo variable.

20. Traza una recta k, perpendicular al eje X, que pase por el punto P. Esta perpendicular interseca a los segmentos i y j.

21. Coloca un punto G en la intersección de la recta perpendicular k con el segmento i. Traza un segmento desde P hasta G (segmento l), ¿Qué representa este segmento?

22. Ubica el punto P en (1, 0), en este momento, ¿qué significa la posición del punto G?

23. Coloca un punto H en la intersección de la recta k con el segmento j y traza el segmento m desde P hasta H ¿Qué representa este segmento?

24. Ahora se desea representar gráficamente la cantidad de agua que hay en el estanque si se usan las dos llaves de forma simultánea para su llenado, para esto suma las longitudes de los segmentos l y m. Introduce el siguiente texto en la barra de entrada:

Suma= l +m

25. Centra tu atención en el resultado de la suma, ¿Cuánto tiempo se necesita para que el estanque se llene hasta un cuarto de su capacidad usando las dos llaves de forma simultánea?

26. Coloca un punto S que represente la cantidad de agua que hay en el estanque en una cantidad P de tiempo y muestra sus coordenadas. En la barra de entrada escribe lo siguiente:

S=(x(P), Suma)

27. Mueve el punto P. ¿Cómo identificas el momento en el que el tanque está lleno?

28. Usa tu construcción para contestar: ¿Cuánto tiempo deben estar abiertas las llaves, simultáneamente para que el estanque se llene completamente?

Para profundizar

29. Obtén el lugar geométrico del punto S cuando se mueve el punto P. ¿Qué características tiene el lugar geométrico que encontraste?

30. ¿Cómo te ayuda el lugar geométrico para responder a la pregunta 27?

31. Obtén la pendiente del segmento i, ¿cómo interpretas este valor?

32. Obtén la pendiente del segmento j, ¿qué significado tiene este valor?

33. Obtén la pendiente del lugar geométrico, ¿Qué observas?

34. ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el llenado del estanque?

35. Graficá en tu construcción la expresión anterior, ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

36. ¿Qué sucede con el lugar geométrico después de 4 horas? ¿Por qué crees que ocurre esto?

Nombre: ____ Fecha: ________________

Soluciones

Agua al 5% de sal

Un tanque contiene 80 litros de agua al 5% de sal.

1. ¿Qué significa la expresión “al 5% de sal”?

2. ¿Qué cantidad de sal contiene cada litro de agua al 5% de sal?

3. ¿Qué cantidad de sal se tiene en 20 litros de solución al 5% de sal? ¿Y en 25 litros? ¿Qué procedimiento usas para averiguarlo?

4. Completa la siguiente tabla representa las cantidades de agua y sal en una solución de agua al 5% de sal.

Cantidad de líquido (en litros)	Cantidad de sal
1	
5	
20	
40	
50	
80	
X	

En GeoGebra

5. ¿Qué variables identificas en el problema y cómo las puedes asociar a los ejes del plano cartesiano?

6. Coloca un punto A sobre el eje X para representar la cantidad inicial de líquido (80 litros).

7. Traza una recta perpendicular al eje X pasando por el punto A.

8. Grafica la expresión algebraica que obtuviste en la pregunta 5. Observa la gráfica resultante, cambia del color de la gráfica a verde para identificarla fácilmente.

9. Describe el tipo de gráfica que obtuviste.

10. Marca un punto B en la intersección de tu gráfica con la perpendicular que pasa por A, ¿Qué significado tiene el punto B?

11. Traza una perpendicular al eje Y pasando por el punto B. Si A se encuentra en 80, ¿dónde interseca esta perpendicular al eje Y?

12. Cambia el color de la perpendicular a azul y nómbrala "m".

13. Al mover el punto A. ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene constante?

14. ¿Cambia la concentración de sal en el agua? ¿Cómo explicas lo que sucede?

15. Utilizando solamente la representación gráfica como referencia, ¿es posible saber cuánta sal hay en 65 litros de agua al 5%? ¿Y en 32 litros?

16. Obtén la pendiente de la gráfica de la expresión, ¿Cómo interpretas el valor obtenido?

Agua al 2%

1. Con base en tu experiencia con la primera parte de la actividad, ¿Qué significa la expresión "al 2% de sal"?

2. ¿Qué cantidad de sal se tiene en 15 litros de solución al 2% de sal?

3. ¿Cómo se puede calcular la cantidad de sal que hay en una solución al 2% de sal?

4. ¿Cuánta agua deberá agregarse a 80 litros de agua al 5% de sal para tener agua al 2% de sal?

Segunda exploración en GeoGebra

5. Coloca un punto móvil C sobre el eje X a la derecha del punto A para representar la nueva cantidad de agua, por ejemplo, si ubicamos el punto en 120, ¿Qué cantidad de agua se ha agregado?

6. Traza una perpendicular al eje X que pase por C.

7. Marca el punto D en la intersección de la perpendicular anterior y la recta m.

8. Centra tu atención en el punto D, este nos muestra una mezcla diferente de agua y sal, ¿su concentración de sal es mayor o menor? Explica.

9. Piensa que se agregan 40 litros de agua a la solución inicial, ¿Dónde debes ubicar el punto C para representar este caso particular?

10. Traza un segmento t desde el origen hasta el punto D, ¿Cuál es la pendiente de ese segmento? ¿Qué significa el valor de la pendiente del segmento?

11. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la mezcla cuando se agregan 40 litros de agua?

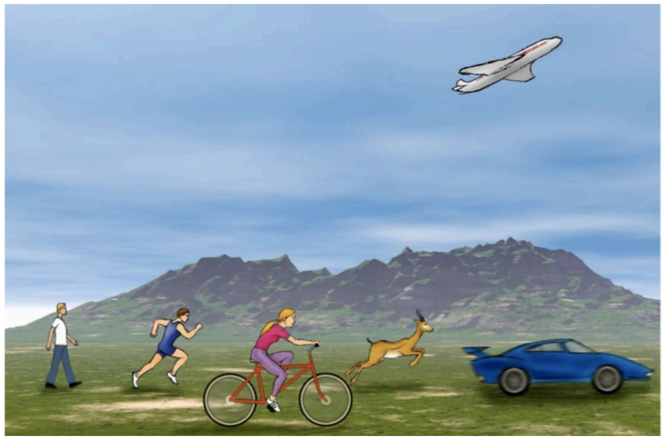
12. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener una mezcla al 2% de sal?

13. ¿Cuál es el comportamiento de la concentración de sal en la mezcla, según la cantidad de agua que contenga?

Nombre: ____ Fecha: _________________

El más veloz

1. Observa la siguiente imagen y responde.



2. De los elementos presentes en la imagen, ¿cuál se mueve más rápido? Enlístalos de mayor a menor y argumenta tu respuesta.

3. ¿Qué hiciste para decidir cuál de los elementos en la imagen es el más veloz?

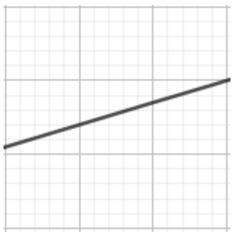
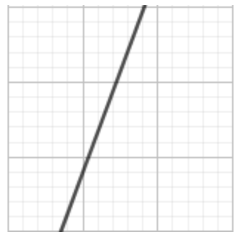
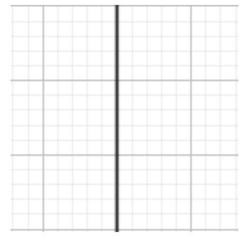
4. ¿Qué es velocidad?

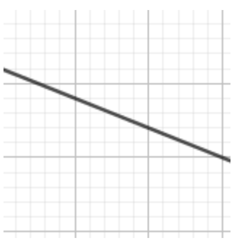
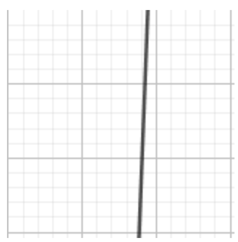
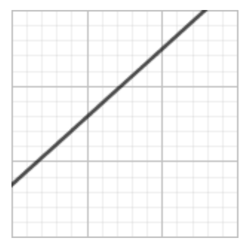
5. Al hablar de velocidad, ¿qué variables están involucradas?

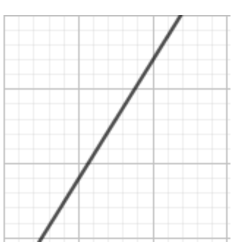
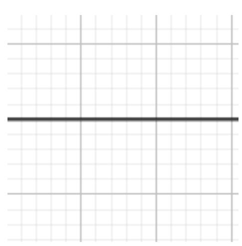
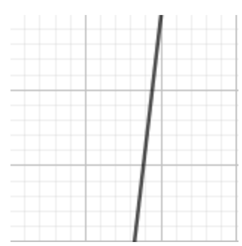
6. ¿De qué manera se puede expresar la relación existente entre las variables?

7. ¿Cómo podemos representar geométricamente esta relación?

8. Escribe a qué elemento de la imagen representa cada una de las siguientes gráficas. Argumenta tu elección.

9. En la siguiente tabla, se muestra la distancia que ha recorrido cada elemento de la imagen, en los primeros segundos. Completa la tabla.

Tiempo	**Distancia**					
	Caminante	**Corredor**	**Ciclista**	**Antílope**	**Auto**	**Avión**
0	0			0		
1	3			27		260
2	6		32			
3	9	27	48		255	
4			64	108		
5		45				
6	18					1560
7	21	63	112	189	595	
8						
Constante de variación						

10. Escribe qué velocidad lleva cada uno. Describe el proceso que utilizaste para determinar la velocidad.

11. Para los pares ordenados del corredor, ciclista y el antílope y traza sus rectas respectivas.

12. Ahora, utiliza el comando "pendiente" y los datos en la vista algebraica y completa la siguiente tabla.

Elemento de la imagen	**Velocidad constante**	**Expresión algebraica**	**Pendiente**
Corredor			
Ciclista			
Antílope			

13. ¿Qué relación hay entre la velocidad y la pendiente?

14. Completa la tabla siguiente

Elemento de la imagen	Velocidad constante	Expresión algebraica	Pendiente
Caminante			
Auto			
Avión			

Nombre: ______________________________________ Fecha: ________________

Velocidades en un biatlón

Problema. Un deportista participó en un biatlón donde se combinaron las disciplinas de atletismo y ciclismo. El trayecto de 215 km lo recorrieron en 10 horas; de las cuales 7.5 horas viajaron en bicicleta y el resto del tiempo corriendo. Si la velocidad media en bicicleta fue 10 km/h mayor que la velocidad media al correr, ¿cuál fue la velocidad media y la distancia recorrida en cada disciplina?

1. ¿Qué variables identificas que están involucradas en el problema?

2. ¿Cuáles condiciones identificas que se deben de cumplir para poder encontrar la solución al problema?

3. Abre GeoGebra, muestra los ejes coordenados y ubica un punto A en el origen.

4. Ubica un punto B con coordenadas (7.5,0) y traza una perpendicular l al eje X que pase por B y señale el segmento AB de color verde.

5. ¿Qué crees que representa el segmento AB en términos del problema?

6. Ubica un punto C con coordenadas (10,0) y traza una perpendicular m al eje X que pase por C y señale el segmento BC de color azul.

7. ¿Qué crees que representa el segmento BC en términos del problema?

8. Realiza los trazos necesarios para representar la distancia total recorrida. ¿Qué trazos hiciste? Justifica tu respuesta.

9. ¿Cómo representas la distancia recorrida en bicicleta?

10. Dibuja el segmento que representa la distancia recorrida en bicicleta de color rojo y el que representa la distancia que corrieron de color amarillo.

11. Si el punto E se ubica en (0,50), ¿Cuántos kilómetros recorrieron en bicicleta? ¿Cuántos kilómetros corrieron?

12. Si el punto E se ubica en (0,120), ¿Cuántos kilómetros recorrieron en bicicleta? ¿Cuántos kilómetros corrieron?

13. Ubica el punto de intersección F entre las rectas l y p y muestra sus coordenadas. ¿Qué coordenadas obtuviste? ¿Cómo interpretas esas coordenadas en términos del problema?

14. Ubica el punto de intersección G entre las rectas m y n y muestra sus coordenadas. ¿Qué coordenadas obtuviste? ¿Cómo interpretas esas coordenadas en términos del problema?

15. Traza el segmento AF y dibújalo de color morado.

16. Mueve el punto E. ¿Qué observas que cambia?

17. Calcula la pendiente del segmento AF en GeoGebra, usando el comando "pendiente", luego mueve el punto E. ¿Qué observas en la pendiente?

18. ¿Cómo interpretas el valor de la pendiente del segmento AF en términos del problema?

19. ¿Cómo representas la velocidad media que llevaba el deportista al correr?

20. ¿Cómo puedes encontrar la solución del problema con el modelo dinámico que construiste? Explica tu respuesta.

21. ¿Cuál fue la velocidad media y la distancia recorrida en cada disciplina?

22. ¿Qué pasaría si la distancia total recorrida fuera de 250 km? O bien, ¿qué la velocidad media en bicicleta fuera 6km/h menor a la velocidad media corriendo?

Nombre: ____ Fecha: ________________

Experimentos con carritos

En el laboratorio de física se realizó una práctica que involucraba el estudio del movimiento de un carrito de control remoto.

Se efectuaron cuatro experimentos con las siguientes características:

e) Experimento 1: el carrito inicia en la línea de salida y se desplaza a una velocidad de seis centímetros por segundo.

f) Experimento 2: el carrito inicia a 20 cm de la línea de salida y se desplaza a una velocidad de seis centímetros por segundo.

g) Experimento 3: el carrito inicia en la línea de salida y se desplaza a una velocidad de ocho centímetros por segundo.

h) Experimento 4: el carrito inicia a 20 cm de la línea de salida y se desplaza a una velocidad de ocho centímetros por segundo.

Realiza un bosquejo del comportamiento gráfico donde se represente el movimiento del carrito durante los primeros 6 segundos de cada experimento.

A partir de los bosquejos de las gráficas que realízate contesta lo siguiente:

1. ¿Qué relaciones observas entre las gráficas de los experimentos 1 y 2? ¿3 y 4?

2. ¿Qué relaciones observas entre las gráficas de los experimentos 1 y 3? ¿2 y 4?

3. ¿Qué relaciones observas entre las gráficas de los experimentos 1 y 4? ¿2 y 3?

Exploración con GeoGebra

Activa la primera parte del archivo lineal_parámetros.ggb para completar la información de la siguiente tabla

Descripción del movimiento	Gráfica en GeoGebra	Fórmula en GeoGebra
El carrito estaba a 5 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.		
El carrito estaba a 10 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.		
El carrito estaba a 15 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.		
El carrito estaba a 15 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 9 cm por segundo.		
El carrito estaba a 15 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 15 cm por segundo.		

Con base en la información de la tabla, contesta lo siguiente:

4. En la gráfica, ¿cómo o dónde identificas el punto donde inicia el movimiento el carrito?

5. En la gráfica, ¿cómo o dónde identificas la velocidad a la cual se mueve el carrito?

6. En la fórmula, ¿cómo o dónde identificas el punto donde inicia el movimiento el carrito?

7. En la fórmula, ¿cómo o dónde identificas la velocidad a la cual se mueve el carrito?

8. ¿Qué sucede si se recorre en el mismo tiempo una distancia distinta?

9. ¿Qué representa el valor de b en el movimiento del carrito?

10. ¿Qué sucede con el experimento si aumenta o disminuye el valor de b?

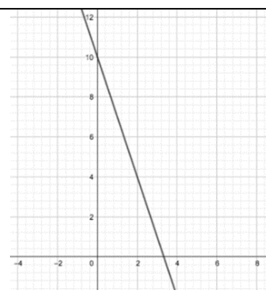
11. ¿Qué representa el valor de m en el movimiento del carrito?

12. ¿Qué sucede con el experimento si aumenta o disminuye el valor de m?

13. ¿Cómo se comportaría la gráfica cuando el valor de m y b son negativos? ¿Este fenómeno puede representar dichas condiciones? ¿Por qué?

14. ¿En qué otras situaciones observas una relación entre variables como la que se da en los experimentos del carrito? Activa ambas partes del archivo lineal_parámetros.ggb para comprobar lo anterior.

Activa la segunda parte del archivo lineal_parámetros.ggb para completar la información de la siguiente tabla con base en las relaciones que observaste.

Descripción del movimiento	Gráfica	Fórmula	¿Qué relación hay?
El carrito estaba a 13 cm de la línea de salida y se movió a una velocidad de 7 cm por segundo.			
		y=5x+13	
			
			Tiene la misma pendiente y una ordenada al origen distinta.

Nombre: ____ Fecha: _______________

Resolviendo ecuaciones cuadráticas

En la clase de álgebra l el profesor dejó una actividad de tarea en la que tenían que resolver una ecuación cuadrática. Al día siguiente uno de los estudiantes le dijo al profesor que no había podido resolverla del todo, el profesor lo pasó al pizarrón y le pidió anotar el procedimiento que siguió y hasta donde llegó. El alumno escribió:

$$x^2 = x + 6$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x + 6}$$

$$x = \sqrt{x + 6}$$

Luego pidió a los alumnos que ayudaran a su compañero a terminar de resolver la ecuación cuadrática.

También, se planteó el siguiente procedimiento:

Otro de los alumnos aplicó un procedimiento distinto, el cual también mostró a sus compañeros.

$$x^2 - x = 6$$

$$x(x - 1) = 6$$

$$x = 6 \ , \ (x - 1) = 6$$

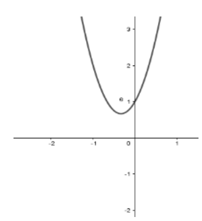
Para ambas situaciones se formulan las siguientes preguntas:

1. ¿Estás de acuerdo en el procedimiento que utilizó el alumno? ¿Por qué?

2. ¿Qué tipo de solución debe de dar como resultado de la ecuación cuadrática?

3. ¿Cómo continuarías el procedimiento del estudiante para encontrar la solución a la ecuación?

4. Completa la siguiente tabla de conexiones entre el número de soluciones de la ecuación, valores del discriminante y gráfica de una función.

Función	**Discriminante de la ecuación asociada**	**Número de soluciones reales de la ecuación asociada**	**Soluciones reales de la ecuación asociada**	**Grafica de la función**
$f(x) = x^2 + 2x - 3$		2		
		2	$x_1 = 4$ $x_2 = -3$	
$f(x) = 2x^2 - 4x + 6$				
	$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6}$			
$x^2 = -3x - \frac{9}{4}$				
		2	$x_1 = 5 - \sqrt{-3}$ $x_1 = 5 + \sqrt{-3}$	

Nombre: ____ Fecha: ________________

El problema del rectángulo

Si ABCD es un rectángulo tal que $\overline{AB}$ tiene una longitud de 6.5 cm, $\overline{BC}$ mide 4 cm. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$.

¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga la mínima área posible?

Un acercamiento dinámico usando el software de GeoGebra

1. Leer individualmente la tarea propuesta e identifica los elementos fundamentales que ayudan a darle sentido al problema.

2. Usar el software dinámico GeoGebra para dibujar el rectángulo ABCD utilizando los diferentes comandos del menú (perpendicular, rotación, círculo, etc.). Construir de manera individual un modelo dinámico en el cual se pueda mover el punto M a lo largo del segmento $\overline{AB}$ para generar una familia de cuadriláteros inscritos.

3. ¿Qué propiedades mantiene esa familia de cuadriláteros MNPQ? ¿Se obtiene el cuadrilátero inscrito en cualquier posición del punto M? Explicar cuál es el domino de M para construir siempre el cuadrilátero.

4. Hallar la representación gráfica del comportamiento del área del cuadrilátero inscrito encontrando el lugar geométrico del punto que relaciona la posición del punto M sobre el segmento $\overline{AB}$ con el área del cuadrilátero correspondiente. ¿Qué propiedades tiene la representación gráfica del área?

5. Identificar visualmente en qué punto sobre la gráfica, el área del cuadrilátero alcanza su valor mínimo. ¿Existe algún patrón asociado con la posición del punto M, la longitud de los lados del cuadrilátero y el área mínima? Obtener una tabla que

muestre algunos valores del segmento $\overline{AM}$ y el área del cuadrilátero correspondiente.

Sobre el modelo algebraico

6. ¿Existe alguna relación entre el área de los cuatro triángulos que aparecen en las esquinas de la figura, el área del rectángulo dado y el área del cuadrilátero inscrito? Utilizar una notación adecuada para identificar las figuras que aparecen en la representación de la tarea.

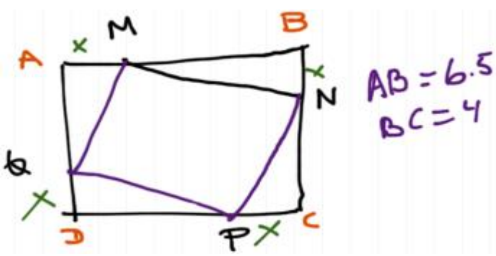


Figura 1. Representación de la tarea.

7. Hallar una expresión para el área del cuadrilátero MNPQ. Graficar esta expresión y discutir qué tipo de propiedades tiene.

8. Hallar la posición del punto M para la cual el cuadrilátero MNPQ alcanza un área mínima. Comparar este valor con el obtenido previamente en el software.

9. Cambiar las dimensiones de los lados del rectángulo inicial por a y b respectivamente, y hallar el modelo general que describe el área del cuadrilátero inscrito. ¿Cuál es el valor de $\overline{AM}$ para que el área del cuadrilátero inscrito tenga un valor mínimo en términos de los lados a y b del rectángulo?

10. Explorar algebraica y dinámicamente un caso en el cual el rectángulo inicial sea cambiado por un paralelogramo.

11. Discutir qué características del pensamiento y razonamiento matemático están involucradas tanto en el enfoque dinámico como en el algebraico para la solución del problema.

12. Identificar y comentar otras tareas o problemas que se puedan abordar con ambos acercamientos (dinámico y algebraico).

13. Discutir maneras de usar este tipo de tareas en tus clases y proponer algunas pautas para ayudar a tus estudiantes a trabajar con la tarea.

Nombre: ____ Fecha: ________________

El cambio de los parámetros

En la clase del profesor Juan, se está estudiando la gráfica de la función:

$y = ax^2 + bx + c$

¿cómo la variación de los valores de los parámetros a, b y c pueden causar diferentes cambios en la gráfica original? En el pizarrón se encuentra graficado lo siguiente:

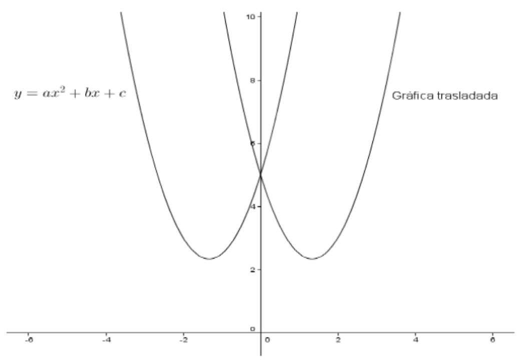


Figura 1. Grafica original traslada de $y = ax^2 + bx + c$.

Con base en la Figura 1:

1. ¿Cuál, de las siguientes opciones, es una descripción apropiada de la traslación de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ a la gráfica trasladada? Explica tu respuesta de la manera más detallada posible.

f) Sólo cambió el valor de a.
g) Sólo cambió el valor de c.
h) Sólo cambió el valor de b.
i) Al menos dos de los parámetros cambiaron. ¿Cuáles?
j) No se puede generar la gráfica trasladada cambiando esos parámetros.

2. Qué sucede en la gráfica cuando varía el valor de a? ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene invariante?

3. ¿Qué sucede en la gráfica cuando varía el valor de c? ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene invariante?

4. ¿Qué sucede en la gráfica cuando varía el valor de b? ¿Qué cambia? ¿Qué se mantiene invariante?

5. ¿Qué elementos y propiedades recuerdas de la parábola?

6. Encuentra, en GeoGebra, los elementos que mencionaste en la pregunta anterior.

7. Al variar el parámetro b, ¿cómo se comportan dichos elementos? ¿Qué relaciones identificas?

8. ¿Qué aprendiste al explorar la variación del valor del parámetro a?

9. ¿Qué aprendiste al explorar la variación del valor del parámetro c?

10. ¿Qué aprendiste al explorar la variación del valor del parámetro b?

11. Con base en tus exploraciones, ¿mantienes tu respuesta a la pregunta 1? En caso de que no sea así, ¿cuál es tu nueva respuesta? Explica detalladamente.

12. Con base en el análisis de las preguntas anteriores, completa la siguiente tabla:

Ecuación de la parábola	**Ecuación del lugar geométrico que describe el vértice al variar el parámetro b**
$y = 2x^2 - 5x + 3$	
$y = -x^2 - 2x + 5$	
$y - 7.7 = -0.1x^2 - 6.3x$	
$y = \frac{3}{10}x2 + 6.4 + \frac{9}{5}x$	
$y = \frac{48}{5}x^2 - 4 + 10x$	

13. ¿Cómo llegaste a los resultados?

Nombre: ____ Fecha: ________________

Torneo de golf

Carlos es un golfista profesional que participó en el famoso torneo anual masculino British Amateur de Reino Unido, donde realizó un tiro el cual duró en el aire 7 segundos. Se tomaron algunas fotografías cuando la pelota estuvo en el aire (figuras 1, 2 y 3).

Figura 1. Fotografía 1.

Figura 2. Fotografía 2.

Figura 3. Fotografía 3.

Con estas fotografías se hizo una recreación de la trayectoria completa del tiro de Carlos, la cual se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Recreación de la trayectoria completa.

1. Con base en los datos y las imágenes proporcionadas, ¿Cuál es la altura máxima que alcanzó la pelota? Justifica tu respuesta.

2. ¿Qué tipo de trayectoria siguió el tiro?

3. ¿Qué relaciones matemáticas identificas en la Figura 4, respecto al tiro de Carlos?

4. Con ayuda de GeoGebra, explora y analiza la trayectoria del tiro de la pelota, obtén la altura máxima alcanzada y describe tu procedimiento.

5. ¿Qué tipo de función puede modelar la trayectoria de la pelota?

6. ¿Cuál crees que es la función?

7. Con base en la función que encontraste, ¿Cuál es la altura máxima alcanzada y a los cuántos segundos sucedió?

8. Si se hubiera sacado una fotografía a los 2 segundos, ¿A qué altura estaría la pelota?

9. En el torneo, otro golfista también hizo un tiro que duró 7 segundos en el aire. Se tomó una fotografía en el primer segundo de lanzamiento y la pelota estaba a 4.5 metros del suelo. ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada en la trayectoria de esta pelota?

Nombre: ____ Fecha: ________________

El problema de los postes telefónicos

Dos postes telefónicos están separados 10 m; sus longitudes son 3 y 5 metros, respectivamente. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de los postes se sujetará a un punto en tierra, localizado sobre la recta que los une. ¿Dónde debe situarse el punto sobre el suelo, de tal manera que la longitud del cable sea mínima?

Un acercamiento dinámico con GeoGebra

1. ¿Cuáles son los elementos fundamentales que ayudan a entender el problema?

2. Bosqueja un esquema que represente el problema.

3. Construye un modelo dinámico en GeoGebra que te permita mover el punto P (punto en tierra) sobre la recta que une los postes.

   Comentar el proceso de construcción.

4. ¿Qué sucede con la longitud del cable cuando la posición del punto P cambia?

5. Hallar la representación gráfica que relacione la posición del punto P sobre la recta que une los postes en tierra con la longitud del cable correspondiente ¿Qué propiedades tiene la representación gráfica de la longitud?

6. Identificar visualmente en qué punto sobre la gráfica la longitud del cable es mínima.

7. Obtener una tabla que muestre la longitud del cable para diferentes posiciones del punto P e identificar cuándo la longitud del cable alcanza el valor mínimo.

8. ¿De qué manera es posible encontrar el valor mínimo de la longitud del cable?

Un acercamiento con Excel

¿Cómo puede determinarse la distancia entre el extremo superior de un poste y el punto P?

9. ¿Cuáles datos necesitas conocer para encontrar la longitud del cable?

10. ¿Existe un valor del cual dependa la longitud del cable?

11. ¿De qué manera se puede relacionar y organizar la información que se proporciona en el problema para encontrar la longitud del cable?

12. Realiza una hoja de cálculo en Excel que permita conocer la longitud del cable a partir de un valor del cual dependan todos los demás datos necesarios. Recuerda que en Excel es posible escribir fórmulas en las que se haga referencia a celdas específicas.

13. Encuentra la posición del punto P para la cual la longitud del cable es mínima. Comenta cómo lo localizaste.

Otras posibles soluciones

14. ¿De qué otra manera podemos encontrar la posición que debe tener el punto P para que longitud del cable sea mínima?

Nombre: ____ Fecha: _________________

Inversiones bancarias

Un banco brinda a sus clientes preferentes una opción de inversión a plazo, la cual consiste en que si el cliente invierte más de $20,000, entonces el banco le ofrece una tasa de rendimiento del 5% de interés anual sobre la cantidad excedente a los $20,000 de requisito. Un empresario vio atractiva esta inversión y decide invertir $60,000 a un plazo de 10 años.

1. Elabora una hoja de cálculo en donde se muestre el comportamiento de la inversión en cada año transcurrido.

2. Con base en la información de la tabla, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánta cantidad hay de excedente en el primer año?

b) ¿En el segundo año?

c) ¿En el sexto año?

d) ¿Cuánto hay de excedente al finalizar el plazo?

e) ¿Cuál es la cantidad total que espera obtener el empresario al terminar el plazo?

f) El empresario observa que en el primer año su inversión aumento $2,000. Por lo tanto, le indica al ejecutivo del banco que mejor invierta su dinero a un plazo de 20 años pues desea que su inversión crezca hasta $100,000. ¿Es correcto el razonamiento del empresario? ¿Por qué?

g) El empresario le pregunta al ejecutivo del banco de qué manera puede calcular el monto total que tendría según el número de años de inversión. ¿Qué respuesta le darías tú? ¿Por qué?

h) Bosqueja una gráfica de la situación.

3. Grafica la función correspondiente a esta situación en GeoGebra. Observa y comenta qué pasa cuando:

a) La tasa de rendimiento (%) es modificada.

b) El requisito de $20,000 en la inversión se cambia.

4. En el tiempo $t = 0$ una especie de tortuga es liberada en un estanque. Cuando $t = 4$, un biólogo determina que hay 300 tortugas en el estanque. Tres años después hay 450 tortugas. Sea P la población de tortugas en el año t:

a) Encuentra una fórmula para $P = f(t)$ asumiendo un crecimiento lineal. Interpreta los parámetros de la fórmula en términos de la población de tortugas.

b) Encuentra una fórmula para $P = g(t)$ asumiendo un crecimiento exponencial. Interpreta los parámetros de la fórmula en términos de la población de tortugas.

c) Con base en su experiencia el biólogo estima que cinco años después ($t = 12$) habrá 900 tortugas en el estanque. ¿Cuál modelo se ajusta mejor a la estimación del biólogo? ¿Por qué?

5. Considera la fórmula general de la función exponencial y explora en GeoGebra el efecto de la variación de los parámetros $a, b \; y \; c$. Comenta y justifica cómo afecta a la gráfica la variación del valor de cada uno de los parámetros.

6. Las siguientes fórmulas representan la población (en miles) de cuatro diferentes ciudades A, B, C y D. Describe en palabras cómo estas poblaciones están cambiando a lo largo del tiempo e interpreta los parámetros de la fórmula en términos de la población.

$$P_A = 200 + 1.3t$$

$$P_B = 270(1.021)^t$$

$$P_C = 150(1.045)^t$$

$$P_D = 600(0.978)^t$$

Nombre: ____ Fecha: _________________

Distancia entre el sol y los planetas

Se sugiere a ver el video de la siguiente página https://www.youtube.com/watch?v=Wj2-xxovArQ.

Con los siguientes datos aproximados de las distancias de los planetas al sol realiza las tareas propuestas.

	Planeta	**Distancia media del Sol**
1	Mercurio	57 910 000 km
2	Venus	108 200 000 km
3	La Tierra	146 600 000 km
4	Marte	227 940 000 km
5	Júpiter	778 330 000 km
6	Saturno	1 429 400 000 km
7	Urano	2 870 990 000 km
8	Neptuno	4 504 300 000 km
9	Plutón*	5 934 456 500 km

Aunque Próxima Centauri es la estrella más cercana al Sol, 4,2 años luz sigue siendo una distancia extraordinaria para una nave espacial, que tendría que recorrer 40 billones de kilómetros (40 000 000 000 km).

Nota en la escala inglesa el un billón es igual a $1 * 10^9$

a) Con la información que se proporciona escribe completa la tabla donde expreses las distancias en millones de kilómetros, por ejemplo, la distancia de Mercurio es $57.91 * 10^6$ millones de kilómetros.

	Planeta	**Distancia media del Sol**	
1	Mercurio	57 910 000 km	$57 * 10^6$
2	Venus	108 200 000 km	
3	La Tierra	146 600 000 km	
4	Marte	227 940 000 km	
5	Júpiter	778 330 000 km	
6	Saturno	1 429 400 000 km	
7	Urano	2 870 990 000 km	
8	Neptuno	4 504 300 000 km	
9	Plutón*	5 934 456 500 km	
	Centauri	40 000 000 000 km	

1. ¿Qué significado tiene escribir el diez elevado a un número cuando está multiplicando a otro?

b) Dibuja una recta numérica en la que cada centímetro corresponda a mil millones de kilómetros y localiza sobre ella donde se ubican aproximadamente los nueve planetas Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno.

2. En la recta numérica que acaba de dibujar ¿Qué distancia representa la quinta división de la recta numérica?

3. ¿Qué longitud tiene la recta numérica que dibujaste para localizar los nueve planetas?

4. Con la escala anterior: ¿Cuánto tendría que medir la recta numérica para poder localizar sobre ella la estrella Centauri?

c) Dibuja otra recta numérica en la que la primera división (de un centímetro de longitud) corresponda a 10^1 millones de kilómetros la segunda división a 10^2 millones de kilómetros y así sucesivamente y localiza sobre ella donde se ubican aproximadamente los nueve planetas y la estrella Centauri.

5. En la recta numérica que recién dibujaste ¿Qué distancia representa la quinta división?

6. ¿Cuál es la diferencia entre la escala de la recta en la que cada centímetro corresponda a mil millones de kilómetros y la de esta dada con 10^n?

En la recta numérica que realizaron anteriormente se ubican aproximadamente las distancias de los planetas entre escalas de diez a una potencia con numero entero 10^x, por ejemplo, la estrella Centuri cuya distancia al sol es de 40 000 millones de kilómetros la ubicamos muy cerca de 10^5. Para conocer la potencia exacta a la que debemos elevar 10 para tener como resultado los 40 0000 millones de kilómetros usamos la operación opuesta al exponente que es la función logaritmo.

$\log(40\,000) = 4.60205999132796$

Es decir que $10^{4.60205999132796} = 40\,000$

d) Usando la calculadora complete la tabla de los valores de x con los que es elevado 10 para tener las distancias más exactas de los planetas al sol.

Planeta	Distancia	Log(x)	Log(x)	10^{x}
Mercurio	57 910 000	Log 57 910 000	7.76275356	$10^{7.7625356}$
Venus	108 200 000			
La Tierra	146 600 000			
Marte	227 940 000			
Júpiter	778 330 000			
Saturno	1 429 400 000			
Urano	2 870 990 000			
Neptuno	4 504 300 000			
Plutón	5 934 456 500			

Usar GeoGebra como herramienta para análisis

e) Con ayuda de la calculadora calcula $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$ (el logaritmo es base 10) con los valores de x igual a 1/10, 1/5, 1/4, 1/2, 3/2, 5/6, 1,1 $\frac{1}{10}$ para $f(x)$y con los valores de x igual a 1/10, 1/4, 1/2, 1, 2, 5, 10 y 18 para g(x). Escribe los pares ordenados que corresponden a los puntos de cada función.

$f(x) = 10^x$		$g(x) = \log x$	
$f\left(\frac{1}{10}\right) = 10^{\frac{1}{10}}$	$\left(\frac{1}{10}, 10^{\frac{1}{10}}\right)$		

f) Grafica en GeoGebra los puntos de f(x) y g(x) que calculaste.

7. ¿Encuentras alguna relación entre las coordenadas de la función f(x) y las de la función g(x)?

8. ¿Qué propiedad cumplen las funciones inversas respecto a la función identidad?

g) Define las funciones f(x), g(x) y h(x)=x en GeoGebra. Recuerda que para definir la función logaritmo será con base 10.

h) Coloca un punto A sobre h(x). Este punto que se encuentra sobre la función identidad nos ayuda a ver de forma más clara la relación entre las funciones exponencial y logaritmo.

i) Agrega una recta perpendicular al eje x y otra al eje y usando el punto A de la función h.

j) Localiza los putos de intersección de las rectas perpendiculares a los ejes y las funciones exponencial y logaritmo respectivamente.

k) Visualiza los valores de los puntos de intersección con la gráfica de las funciones f(x) y g(x).

l) Mueve el punto A y analiza las coordenadas de los puntos de intersección B y C.

10. ¿Cómo son las coordenadas de las funciones entre sí?

Nombre: ____ Fecha: ________________

Horas de luz solar

En el año 2015, en la ciudad de Monterrey, el día más largo ocurre el 21 el junio (con trece horas cuarenta y dos minutos de luz solar) y el día más corto es el 21 de diciembre (con diez horas y treinta minutos de luz solar). Los equinoccios, que son los días en que la longitud del día y la noche son aproximadamente iguales a 12 horas, suceden el 21 de marzo y el 21 de septiembre.

En la siguiente tabla se registraron los datos anteriores de las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes en la ciudad de Monterrey.

Tabla 3. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Monterrey, México.

Mes	**Horas de luz solar**
Enero	
Febrero	
Marzo	12.10
Abril	
Mayo	
Junio	13.77
Julio	
Agosto	
Septiembre	12.10
Octubre	
Noviembre	
Diciembre	10.5

1. Con ayuda de GeoGebra, grafica los datos obtenidos en la tabla anterior.

2. ¿Cuál variable asocias al eje horizontal? ¿Por qué?

3. ¿Cuál variable asocias al eje vertical? ¿Por qué?

4. ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? ¿Por qué?

5. Escribe la función que crees que representan esos puntos.

6. ¿Cuál crees que sea el comportamiento de los días 21 de cada mes del año 2016?

7. Con ayuda de los datos que se proporcionan en la página www.sunrise-and-sunset.com, completa la Tabla 1 y grafica en GeoGebra los nuevos datos obtenidos.

8. Con base en la última gráfica, ¿mantienes tu propuesta a la pregunta 4?

SI _____ NO_____ ¿Por qué?

9. En caso de que tu respuesta haya cambiado, ¿cuál es el tipo de función que representan los puntos de la última gráfica?

10. ¿Cuáles son los parámetros de la función que encontraste?

11. En GeoGebra, grafica la función que propones y asigna un deslizador a cada uno de sus parámetros.

12. Varía los valores de los deslizadores hasta encontrar la gráfica que pasé por todos los puntos. ¿Qué valor obtuviste para cada parámetro?

13. Abre el archivo de GeoGebra "Horas de luz solar". En él se encuentran graficadas funciones que tal vez puedan pasar por todos los puntos. Explora las diferentes opciones y escribe el valor de los parámetros a, b, c y d que encontraste para que la función se aproxime a los datos.

a: _____ b: _____ c: _____ d: _____

14. En la función ¿qué encontraste?

a. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador a?

b. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador b?

c. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador c?

d. ¿Qué sucede en la gráfica cuando se mueve el deslizador d?

15. En la Tabla 2 se muestran las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes del año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Tabla 4. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Mes	**Horas de luz solar**
Enero	14.03
Febrero	13.06
Marzo	12.06
Abril	10.98
Mayo	10.15
Junio	9.8
Julio	10.13
Agosto	10.96
Septiembre	12.03
Octubre	13.1
Noviembre	14.03
Diciembre	14.43

Encuentra, sin uso de GeoGebra, la función que representa estos datos.

16. Grafica en GeoGebra la función que encontraste en el inciso anterior en la gráfica que obtuviste en la pregunta 7.

17. ¿Qué observas en las gráficas?

18. Completa la siguiente tabla comparando los resultados obtenidos de los datos de Monterrey y Buenos Aires.

	Diferencias	**Semejanzas**
Expresión algebraica		
Gráfica		

Justifica cada una de las diferencias y semejanzas que encontraste

19. Con base en lo observado, ¿Cuántas horas de luz habrá el día 21 de diciembre del 2018 en la ciudad de Monterrey? Justifica tu respuesta

20.Ve el video: https://www.youtube.com/watch?v=VBLxGv32OWs&t=50s y responde

c. ¿Qué relación tiene el contenido del video con lo que trató la actividad?
d. Escribe dos ciudades, de otros dos países que tengan un comportamiento similar a la ciudad de Monterrey, México observado en esta tarea.

Nombre_______________________________________ Fecha_________________

Funciones monótonas

Composición de funciones y funciones inversas

1. Las siguientes funciones serán empleadas en los incisos a, b y c

V. $f(x) = x^2$

VI. $g(x) = \frac{1}{x}$

VII. $h(x) = x^2 + 4x$

VIII. $i(x) = \sqrt{x - 1}$

a) Obtén el dominio y rango de las funciones descritas en 1.

b) Obtén las siguientes composiciones de funciones. Para los casos en los que **no** sea posible realizar la composición, explica por qué no se puede.

- $f \circ g$
- $g \circ h$
- $g \circ i$
- $h \circ i$
- $i \circ f$

c) Encuentra la función inversa para cada una de las funciones descritas en 1 verifica tus resultados

En caso de que **no** sea posible determinar la inversa de una función, explica por qué no es posible.

Funciones monótonas y sus gráficas

Analiza las siguientes funciones a través de su tabla y grafícalas en los recuadros.

a)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x & x < 4 \\ 4 & x \geq 4 \end{cases}$$

x	$f(x)$
-1	-1
0	0
1	1
4	4
6	4

b)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

c)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = -x^3$$

x	$f(x)$
-2	8
-1	1
0	0
1	-1
2	-8

d)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^3 + x^2$$

x	$f(x)$
-2	-4
-1	0
-0.5	0.125
0	0
2	12

e)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = 2^x$$

x	$f(x)$
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4

De acuerdo con las tablas y graficas de las funciones, contesta lo siguiente.

1. ¿En cuáles funciones se observa el siguiente comportamiento: si $x \leq y$, entonces si $f(x) \leq f(y)$ para todo x y y del dominio?

2. ¿En cuáles funciones se observa el siguiente comportamiento: si $x \leq y$, entonces si $f(x) \geq f(y)$ para todo x y y del dominio?

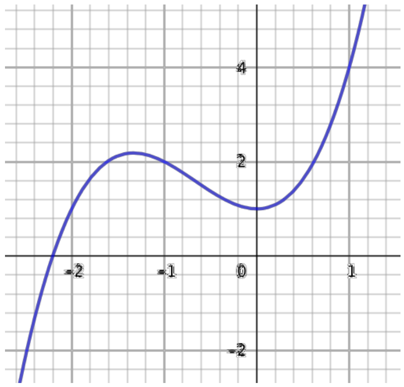
3. ¿En cuáles funciones se observan ambos comportamientos?

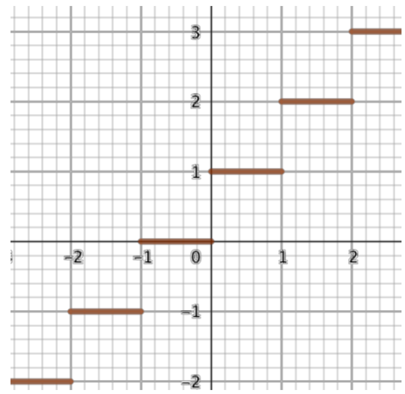
4. De acuerdo con tus respuestas y a la siguiente información construye la definición de ***función monótona***.

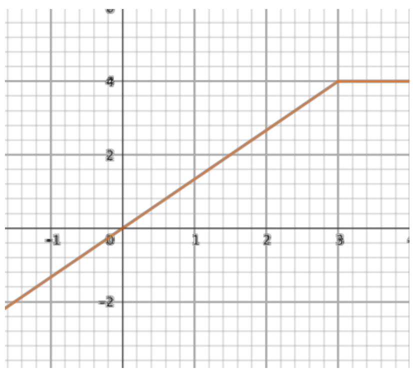
Las funciones de los incisos a), c), e) son funciones monótonas.
Las funciones de los incisos b) y d) son funciones no monótonas.

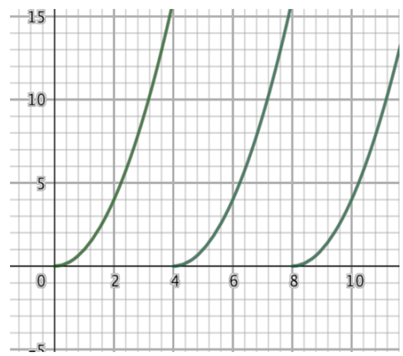
5. Modifica el dominio de las funciones no monótonas de la tabla anterior para convertirlas en funciones monótonas.

Dadas las siguientes gráficas de funciones, determina cuáles de ellas corresponden a funciones monótonas y cuáles no.









Funciones monótonas y sus inversas

Determina la función inversa para cada una de las funciones del ejercicio 2 y verifica tus resultados. Contesta lo siguiente.

5. ¿Para cuáles funciones sí fue posible determinar su inversa?

6. ¿Para cuáles funciones no fue posible determinar su inversa?

7. ¿Crees que el hecho de que una función sea monótona o no, influya en la existencia de su inversa? ¿Por qué?

8. Respecto a la reflexión anterior ¿qué conjeturas puedes dar, acerca de cuándo, o cuándo no, se puede obtener la inversa de una función monótona?

Actividad en GeoGebra

Con ayuda de la herramienta GeoGebra grafica las siguientes funciones y realiza lo siguiente.

VII. $f(x) = \begin{cases} 5 & x > 5 \\ x & x \leq 5 \end{cases}$

VIII. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

IX. $h(x) = \frac{1}{x} + x$

X. $i(x) = e^x$

XI. $j(x) = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$

XII. $k(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ 1/x + 1 & x < 0 \end{cases}$

1. Clasifica las funciones en: monótonas y no monótonas.

2. Obtén la inversa para cada una de las funciones (si es posible) y de igual forma clasifica las funciones en: funciones con inversa y funciones sin inversa.

Con la información obtenida completa la siguiente tabla.

	Funciones monótonas	Funciones no monótonas
Funciones con inversa		

Con lo comprendido hasta el momento y con ayuda de la tabla, contesta las siguientes preguntas. (Justifica mediante pruebas o contraejemplos)

3. ¿Toda función monótona en los reales tiene inversa?

4. ¿Existen funciones no monótonas sin inversa?

5. ¿Toda función sin inversa es no monótona?

¿Si *f* es una función no monótona, entonces *f* no tiene inversa?

Con lo aprendido hasta ahora, modifica o completa tu respuesta a la pregunta: ¿qué conjeturas puedes dar, acerca de cuándo, o cuándo no, se puede obtener la inversa de una función monótona?

Respecto a la actividad realizada, da un contraejemplo, distinto a los ya presentados, a la siguiente conjetura: **Si *f* es una función no monótona, entonces *f* no tiene inversa**

Referencias

Conally, E., Hughes-Hallet, D., Gleason, A., et al. (1998). *Functions Modeling Change. A preparation for calculus.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

Cooney, T., Beckmann, S., & Lloyd, G. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cullen, C. J., Hertel, J. T., & John, S. (2013). Investigating extrema with GeoGebra. *Mathematics Teacher*, 107(1), 68-72.

Dick, T. P. & Hollebrands, K. F. (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Escobedo-Bustamante, A., Olvera-Martínez, C., & Vargas-Betancourt, E. (2016). *Matemáticas II*. México: EdiMend S.A. de C.V. ISBN: 978-607-627-087-5; 978-607-627-085-1

Hernández-Moreno, G. (2013). *Matemáticas 2*. México: Oxford University Press.

Huang, R. & Kulm, G. (2012). Prospective middle grade mathematics teachers' knowledge of algebra for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31 (4), 417-430.

Lagrange, J. B. & Psycharis, G. (2014) Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, (19), 255-2.

Polya, G. (1945). *How to Solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Reyes-Rodríguez, A. (2009). *Uso de herramientas computacionales en la resolución de problemas: Implicaciones en el aprendizaje*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México, D.F.

Santos-Trigo, M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivos*. México D. F., México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2008). Sobre la construcción de una comunidad de práctica en la resolución de problemas. En F. Barrera-Mora, D. Benítez, A. Reyes-Rodríguez, M. Santos-Trigo, & A. Sepúlveda (Eds.), *Memorias del Segundo*

Seminario Nacional sobre la Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas (pp. 133-144). Pachuca, Hidalgo: UAEH.

Santos-Trigo, M. (2010). A mathematical problem-solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, & J. Hertzog (Eds.), *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models* (pp. 208-313). IGI Global: Hershey PA.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2005). Delving into conceptual frameworks: problem solving representations, and models and modeling perspectives. En G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. Wilkins, & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-8). Virginia, USA: PME.

Santos-Trigo, M. & Reyes-Rodríguez, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 313-336.

Shimizu, J., Donaldson, S., Edefield, K., & Jacobson, E. (2015). Solving Quadratic Equations. En M. K. Heid, P. S. Wilson, G. Blume (Eds.). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: a framework and classroom-based situations* (pp. 249-260). Unites States of America: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing, Inc.