

# N

# 7<sup>MO</sup> ENCUENTRO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICAS



# PROGRAMA

## COMITÉ ORGANIZADOR

Dra. Angelina Alvarado Monroy  
M.C. Adriana Escobedo Bustamante  
L.M.A. Javier Espinosa de los Monteros Díaz  
Dr. Armando Mata Romero  
M.E.M. Miguel Ángel Núñez González  
Dra. María del Carmen Olvera Martínez  
Dra. Luz Judith Rodríguez Esparza  
Dr. José Patricio Sánchez Hernández  
Dra. Alejandra Soria Pérez  
M.C. Enrique Vargas Betancourt  
Dra. Rosa Angélica Zamora Rios

# Programa General

Hora	Lunes – 29 mayo	Martes – 30 mayo	Miércoles – 31 mayo	Jueves – 1 junio	Viernes – 2 junio	
9:00-11:00	Clases					
11:00-11:20	<b>Inauguración</b>  <b>Anomalías de Wood en rejillas de difracción con defectos</b> Dr. Iván César Avilés Romero	<u>La matemática detrás de la criptografía de llave pública</u> Franci del Rocío Almeida Torres	<u>Uso de variables dicotómicas en el modelo lineal general</u> Valeria Yaneth Flores Casas Eduardo Reza Gurrrola Cynthia Mayte Salazar Rjos Karla Karina Sánchez Torres	<u>Comparación del PH en distintas marcas de refresco</u> Franci del Rocío Almeida Torres Brianda Estefanía Sáenz Fuentes Eduardo Reza Gurrrola	Rally Matemático	
11:20-11:40		<u>Los ladrillos de Euler</u> Gabriel Fernández Barneth	<u>Cubriendo el plano con polígonos</u> Eybette Mercado Favela	<u>Buscando ternas pitagóricas con la proyección estereográfica</u> Ana Cristina Cabral Álvarez Salma Celeste Hernández Ibarra		
11:40-12:00		<u>Aplicaciones a problemas físicos y biológicos</u> Omar Dozal Alcántar	<u>Introducción a la lógica matemática</u> Josué Isaac Soto Odriozola Jonathan Iván Torres Valenzuela	<u>Frege, padre de la lógica matemática</u> Néilda Marlene Hernández Reyes		
12:00-12:10	RECESO					
12:10-12:30	<u>Enfermedades del modelo lineal general</u> Franci del Rocío Almeida Torres Dorely Díaz Centeno Judith Magdalena Herrera Ontiveros Brianda Estefanía Sáenz Fuentes Yarim Alberto Vargas Flores	<u>La Catenaria</u> Candy Jazmin Soto Betancourt Edwin Bladimir García Velarde	<u>Teorema de Pick a través del teorema de Minkowski</u> Bravam Antonio Moreno González Celene Yajahira Conde Ramírez	<u>Los teoremas de incompletitud de Gödel y de indefinibilidad de Tarski</u> Sergio Carrasco Gámez		
12:30-12:50	<u>Los cuatro cuatros</u> Sebastián Morales Amaya Luis Eduardo Bueno López	<u>El número "e" como límite de sucesiones</u> Noé Montes López	<u>Funciones continuas, ¿son todas derivables en todos los puntos?</u> Juan Antonio Aguilar García	<u>El teorema de Bolzano, un teorema que no debe pasar inadvertido</u> Elisa Salcedo Talamantes Claudia Daniela Corral Hernández		
12:50-13:10	<u>Breve introducción a las geometrías no euclidianas</u> Juan José Díaz de León	<u>¿Es seguro lo que comes?</u> Dorely Díaz Centeno Valeria Yaneth Flores Casas Cynthia Mayte Salazar Rjos Karla Karina Sánchez Torres Jonathan Bernadac Lozano Víctor Iván Sáyago Monreal Denzel Bobadilla Calleros	<u>Biomasa</u> Yarim Alberto Vargas Flores Fernando Fidel Ruiz Pérez José Mario García Escobedo José Francisco Hernández Castro Víctor Hugo Cortez Quiñones	<u>Evolución del consumo en México</u> Elsa Jezabel García Venegas José Mario García Escobedo María José Hernández Silva Jassy Guadalupe Ramírez Esquivel María Lucero Rjos Gurrrola Fernando Fidel Ruiz Pérez		
13:10-13:20	RECESO					
13:20-13:40	<u>Error de diciembre</u> Juan Candia Vargas Edson Aaron Luna Barboza	<u>La lotería, una computadora y el número "e"</u> Abraham Duvany Mora Sarabia Erick Gustavo Torres Ávila	<u>Encontrando primos</u> Jesús Alfredo Lerma Domínguez Alejandra Valdés Hernández	<u>Un cuerpo finito-infinito</u> Luis Asarel Arteaga Martínez Martín Pulido Castañeda		
13:40-14:00	<u>Geometría Riemanniana y la teoría de la relatividad</u> Héctor Alfonso Sánchez Aragón Silvia Janeth Solís Betrán	<u>El sello de Dios</u> Cecilia Ruiz Morales	<u>La sucesión de Fibonacci</u> Carlos Michelle Díaz Leyva Martha Patricia Gailindo Solís	<u>Introducción a los sistemas dinámicos continuos</u> Josepablo Adrián Rangel Torres		
14:00-14:20	<u>El cálculo mental</u> Jesús Alejandro López Montiel	<u>La matemática en relación con los electrocardiogramas</u> Erick Assael Betrán Hernández	<u>Un límite interesante con una tira de papel</u> Miguel Ángel Noriega Meléndez Luis Antonio Ayala Ceniceros	<u>Buscando conjuntos</u> José Crispín Alvarado Calderón		
14:20-15:00				<b>Presentación de carteles</b>		
15:00				<b>Torneo de ajedrez</b>		

## DIRECTORIO DE PARTICIPANTES



## Ponencia de Investigación 1

### ENFERMEDADES DEL MODELO LINEAL GENERAL

Franci del Rocío Almeida Torres, Dorely Diaz Centeno, Judith Magdalena Herrera Ontiveros, Brianda Estefania Sáenz Fuentes, Yarim Alberto Vargas Flores. Asesor: Dra.

Alejandra Soria Pérez. Contacto: *esteff.saenz@gmail.com*

Facultad de Ciencias Exactas

*franci\_z56@hotmail.com, dorely\_8919@hotmail.com, yalvafl\_27@hotmail.com*

Licenciatura

Regresión, autocorrelación, heterocedasticidad, multicolinealidad

Desde una perspectiva matemática gran parte de las pruebas estadísticas se fundamentan en el modelo lineal ya sea general o clásico, su importancia radica en que su estructura refleja los elementos explicativos de un fenómeno por medio de relaciones funcionales probabilísticas entre variables. El problema es que en ocasiones la base de datos presenta discrepancia con respecto a los supuestos del modelo lineal (ML), en este trabajo se tratará un experimento en el que se ilustra la mecánica y el uso de los métodos de detección y corrección de enfermedades de ML.

### Introducción

Describiendo un poco lo que es el Modelo Lineal donde es posible poder determinar de manera matemática si las medidas de dos o más grupos son diferentes, el cual tiene dos componentes básicos que son: variables dependientes y variables independientes, donde también  $U$  es conocida como termino de error o perturbación. Keynes postula que la propensión marginal a consumir (PMC) cumpliendo con  $0 < \beta_2 < 1$  denotándola de la siguiente forma:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + U_i$$

Se trabajara con las variables PIB y consumo, denotando a PIB como el producto interno bruto o producto interior bruto siendo un indicador sobre la producción de un país determinado, ya que obtenemos su total en determinado tiempo, como también la medida de los ingresos obtenidos de la producción. Este se obtiene de la suma de magnitudes por categorías de agentes económicos. Y considerando el consumo como la compra o utilización de distintos productos para satisfacer lujos o necesidades básicas de las personas.

Para realizar este trabajo se tomaron en cuenta dos tipos de consumo que son el privado el cual se refiere a los gastos personales como son los de los hogares, en bienes o en servicio y el consumo de gobierno que sería la adquisición de bienes y servicios para poder complacer las necesidades de los habitantes. Estos fueron sumados para obtener un consumo total. Por lo que nos podemos dar cuenta estas dos variables están muy relacionadas.

Los resultados fueron obtenidos trabajando las distintas enfermedades del Modelo Lineal:

- Autocorrelación
- Heterocedasticidad
- Multicolinealidad



El objetivo del experimento es conocer de primera mano las causas y consecuencias de trabajar un modelo lineal ignorando que no se cumpla algún supuesto.

### Marco teórico

#### MULTICOLINEALIDAD

Un supuesto del modelo clásico de regresión lineal es que no haya multicolinealidad entre las variables explicativas, las  $X$ . Interpretada en términos generales, la multicolinealidad se refiere a una situación en la cual existe una relación lineal exacta o aproximadamente exacta entre las variables  $X$ .

Las consecuencias de la multicolinealidad son las siguientes:

- Si existe multicolinealidad perfecta entre las  $X$ , sus coeficientes de regresión son indeterminados y sus errores estándar no están definidos.
- Si la colinealidad es alta pero no perfecta, es posible la estimación de los coeficientes de regresión, pero sus errores estándar tienden a ser grandes y por tanto los valores poblacionales de los coeficientes no pueden estimarse en forma precisa

No existe un método preciso para detectar la multicolinealidad, pero existen diversos indicadores:

- Cuando  $R^2$  es muy alta pero ninguno de los coeficientes de regresión es estadísticamente significativo con base a la prueba  $t$  convencional.
- En modelos con dos variables explicativas, puede tenerse una idea relativamente buena de la colinealidad mediante la observación del coeficiente de correlación de orden cero, o simple, entre las dos variables. Si esta correlación es alta, seguramente presenta multicolinealidad.
- los coeficientes de correlación de orden cero pueden ser malos indicadores en modelos con más de dos variables  $X$ , pues es posible tener correlaciones bajas de orden cero y encontrar aún alta multicolinealidad. En estas situaciones puede ser necesario examinar los coeficientes de correlación parcial.
- Si  $R^2$  es alta pero las correlaciones parciales son bajas, la multicolinealidad es una posibilidad. Aquí hay una o más variables que pueden ser superfluas. Pero si  $R^2$  es alta y las correlaciones parciales también son altas, la multicolinealidad puede no ser fácilmente detectable.
- Se puede hacer la regresión de cada variable  $X_i$  sobre las variables  $X$  restantes en el modelo y encontrar los coeficientes de determinación correspondientes  $R_i^2$ .

Una vez que se detecta multicolinealidad, se debe hallar la forma de deshacerse del problema. Nuevamente, no existen métodos seguros, sólo unas cuantas reglas prácticas, algunas de las cuales son las siguientes:

- utilizar información obtenida a priori o externa al modelo,
- combinar información de corte transversal y de series de tiempo
- omitir una variable si es muy colineal
- transformar los datos u obtener datos adicionales o nuevos. Naturalmente, saber qué regla funciona en la práctica depende de la naturaleza de la información y de la gravedad del problema de colinealidad

#### HETEROCEDASTICIDAD

Un supuesto importante del modelo clásico de regresión lineal es que todas las perturbaciones  $u_i$  tienen la misma varianza  $\sigma^2$ . Si este supuesto no se satisface, hay heterocedasticidad.

La heterocedasticidad no destruye las propiedades de insesgamiento, es decir, no falta información sobre las variables y consistencia de los estimadores de MCO (Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios). Sin embargo, estos estimadores dejan de tener varianza mínima, es decir, de ser eficientes. Por consiguiente, no son MELI (Mejor Estimación Lineal Insesgada). Los estimadores MELI son proporcionados por el método de mínimos cuadrados ponderados, siempre que se conozcan las varianzas heteroscedásticas de error,  $\sigma^2$

En presencia de heterocedasticidad, las varianzas de los estimadores de MCO no se obtienen con las fórmulas usuales de MCO. Sin embargo, si insiste en utilizar las fórmulas habituales de MCO, las pruebas t y F basadas en ellas pueden conducir a grandes desatinos que darán por resultado conclusiones erróneas.

Es más fácil documentar las consecuencias de la heterocedasticidad que detectarlas. Existen diversas pruebas de diagnóstico disponibles, pero no se puede decir con seguridad cuál funcionará en una situación dada. Algunas de estas pruebas son:

- Prueba de Park
- Prueba de Glejser
- Prueba de correlación de orden de Spearman
- Prueba de Goldfeld-Quandt
- Prueba Breuch-Pagan-Godfrey

Aunque se sospeche y se detecta la heterocedasticidad, no es fácil corregir el problema. Si la muestra es grande, se pueden obtener los errores estándar de los estimadores de MCO corregidos por el método de heterocedasticidad de White y realizar inferencia estadística basada en estos errores estándar. De lo contrario, con base en los residuos de MCO, se pueden hacer conjeturas con ciertos fundamentos acerca del patrón probable de heterocedasticidad y transformar la información original de manera que en la información transformada no haya heterocedasticidad.

El supuesto del MCRL de que el modelo econométrico del análisis está correctamente especificado tiene dos significados. Primero, que no hay errores de especificación ecuacionales y segundo, que no hay errores de especificación de modelo.

Los errores de especificación ecuacionales son:

- omisión de una(s) variable(s) importante(s)
- inclusión de una(s) variable(s) superflua(s)
- adopción de la forma funcional equivocada
- especificación incorrecta del término de error  $u_i$
- errores de medición en la variable regresada y en las regresoras.

Cuando se omiten variables legítimas del modelo, las consecuencias pueden ser muy graves: los estimadores de MCO de las variables consideradas en el modelo no sólo están sesgados sino que también son inconsistentes. Además, las varianzas y los errores estándar de estos coeficientes están estimados en forma incorrecta, lo que vicia los procedimientos usuales de pruebas de hipótesis.

Las consecuencias de incluir variables irrelevantes en el modelo son menos graves: los estimadores de los coeficientes de las variables relevantes, al igual que los de las variables “irrelevantes”, permanecen insesgados y continúan siendo consistentes, y la varianza del error  $\sigma^2$  permanece correctamente estimada. El único problema es que las varianzas estimadas tienden a ser más grandes de lo necesario, lo que resta precisión a la estimación de los parámetros. Es decir, los intervalos de confianza tienden a ser más grandes de lo necesario

Para detectar los errores de especificación ecuacional consideramos diversas pruebas, como:

- Examen de residuos,
- Estadístico d de Durbin-Watson
- Prueba RESET de Ramsey
- Prueba del multiplicador de LaGrange.

Una clase especial de error de especificación son los errores de medición en los valores de la variable regresada y de las regresoras. Si hay errores de medición sólo en la variable regresada, los estimadores de MCO son insesgados y consistentes, pero menos eficientes. Si hay errores de medición en las regresoras, los estimadores de MCO son sesgados e inconsistentes.

Aunque se detecten o sospeche de errores de medición, a menudo las medidas correctivas no son fáciles. Las variables instrumentales o representantes son teóricamente atractivas, pero no siempre prácticas. Los errores de una mala especificación del modelo pueden ser tan graves como los errores de especificación ecuacionales. En particular, distinguimos entre modelos anidados y no anidados. Para decidir el modelo apropiado analizamos la prueba F anidada, o incluyente, así como la prueba J de Davidson-MacKinnon, y señalamos las limitaciones de cada una. Al elegir un modelo empírico en la práctica, los investigadores utilizan una variedad de criterios, de los cuales analizamos algunos, como los de información de Akaike y el de Schwarz, el criterio Cp de Mallows y el pronóstico  $\chi^2$ .

### **Planteamiento del problema**

Para estimar el modelo econométrico es necesario obtener una base de datos para lo cual se tomara una sobre las variables PIB y consumo privado y público con las cuales se trabajará.

### **Metodología**

En términos generales, la metodología econométrica tradicional se ajusta a ocho lineamientos.

Por simplicidad se trabajara con la forma de la función keynesiana de consumo, para estimar el modelo se obtiene una base de datos con la cual se trabaja para estimar los valores de los parámetros de la función consumo, en el supuesto de que el modelo ajustado sea una aproximación razonable de la realidad, se establecerán criterios apropiados para comprobar si los valores estimados concuerdan con las expectativas de la teoría que se quiere probar. El modelo servirá para predecir los valores futuros de la variable dependiente que en este caso es el consumo total, con base a los valores conocidos o esperados de la variable consumo.

### **MÉTODOS DE DETECCIÓN DE LA AUTOCORRELACIÓN**

Existen varios criterios que nos permiten detectar la presencia de autocorrelación en un modelo econométrico. En este trabajo de investigación se verán dos de los más conocidos: La prueba o estadístico Durbin-Watson y la prueba de rachas.

#### EL ESTADÍSTICO DURBIN-WATSON

La prueba de Durbin-Watson parte de la determinación del estadístico:

$$d \equiv DW \equiv \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Se usa para determinar la presencia de autocorrelación, a partir del número de observaciones “ $n$ ” y el de variables explicativas ( $k' = k$ ) en el modelo, los valores “ $dL$ ” y “ $dU$ ”, que delimitan las zonas de rechazo o aceptación de la hipótesis nula  $H_0: \rho = 0$ , es decir,  $H_0$ : la no existencia de autocorrelación, contra la hipótesis alternativa  $H_1: \rho \neq 0$ , o sea  $H_1$ : la presencia de autocorrelación en el modelo.

Delimitación de las zonas de rechazo y aceptación de autocorrelación

Zona de rechazo ( $H_0$ )	Zona de incertidumbre	Zona de aceptación ( $H_0$ )	Zona de incertidumbre	Zona de rechazo ( $H_0$ )
Existe autocorrelación positiva	No se está seguro de su existencia	No existe autocorrelación	No se está seguro de su existencia	Existe autocorrelación negativa

(DW)=0

$dL$

$dU$

(4- $dU$ )

4- $dL$

(DW)=4

En la zona de incertidumbre, la prueba no es concluyente, esto es, no permite saber si existe o no autocorrelación en el modelo.

#### PRUEBA DE “LAS RACHAS”

La prueba de las rachas, también conocida como prueba de Geary, prueba no paramétrica. Para explicar esta prueba, se anotan simplemente los signos (+ o -) de los residuos obtenidos de la columna de residuos.

Se define una racha como una sucesión ininterrumpida de un símbolo o atributo, como + o -. Además se define la longitud de una racha como el número de elementos que contiene. Al examinar el comportamiento de las rachas en una sucesión de observaciones estrictamente aleatoria, es posible derivar una prueba aleatoria de las rachas. Si hay muchas rachas, implica que existe una correlación negativa. En forma similar, si hay muy pocas rachas puede indicar autocorrelación positiva.

Ahora sea,

$N$  = número total de observaciones  
=  $N_1 + N_2$

$N_2$  = número de símbolos -  
(es decir, residuos-)

$N_1$  = número de símbolos +  
(es decir, residuos +)

$R$  = número de rachas

Entonces, según la hipótesis nula de que los resultados sucesivos son independientes, y suponiendo que  $N_1 > 10$  y  $N_2 > 10$ , el número de rachas está normalmente distribuido con



$$\text{Media: } E(R) = \frac{2N_1N_2}{N} + 1$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2_R = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N)}{N^2(N-1)}$$

Si la hipótesis nula de aleatoriedad es sostenible, y según las propiedades de la distribución normal, se debe esperar que la probabilidad de que el intervalo  $[E(R) \pm 1.96(\sigma^2_R)]$  incluya a R es de 95%. Y se tiene la siguiente regla de decisión: no rechace la hipótesis nula de aleatoriedad a 95% de confianza si R, el número de rachas, está en el intervalo de confianza anterior; rechace la hipótesis nula si la R estimada se encuentra fuera de estos límites. (Nota: se puede elegir cualquier nivel de confianza que desee).

#### MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA AUTOCORRELACIÓN

##### MÉTODOS DE COCHRANE-ORCUTT

Representa uno de los métodos clásicos utilizados para erradicar la autocorrelación en un modelo.

A partir de un modelo auto correlacionado de la forma

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$$

Y de la suposición de que  $U_t$  se comporta como en  $U_t = \rho * U_{t-1} + \varepsilon_t$ . Rezagando la expresión del modelo en un periodo y multiplicando por el coeficiente estimado  $\hat{\rho}$ , resulta que:

$$\hat{\rho}Y_{t-1} = \hat{\rho}\alpha + \hat{\rho}\beta X_{t-1} + \hat{\rho}U_{t-1}$$

Si restamos las ecuaciones anteriores se obtiene

$$Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} = \alpha(1 - \hat{\rho}) + \beta(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) + U_t - \hat{\rho}U_{t-1}$$

De donde derivamos una nueva versión del modelo original, pero ahora corregida de autocorrelación, de la forma:

$$Y_t^* = \alpha^* + \beta X_t^* + U_t^*$$

Que podemos estimar, si previamente se definimos a las variables y el parámetro marcados con asterisco como sigue:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1};$$

$$X_t^* = X_t - \hat{\rho}X_{t-1};$$

$$\alpha^* = \alpha(1 - \hat{\rho});$$

$$U_t^* = U_t - \hat{\rho}U_{t-1}$$

Esta versión corregida del modelo presenta menos autocorrelación, por lo que habrá que investigar nuevamente se presencia.

#### Resultados

Se tiene la siguiente base de datos tomada de INEGI, que contiene los datos respecto al consumo privado, consumo de gobierno y PIB en la república mexicana.

Debido a que el PIB depende directamente del consumo se toma como variable dependiente, haciendo así al consumo total la variable independiente.

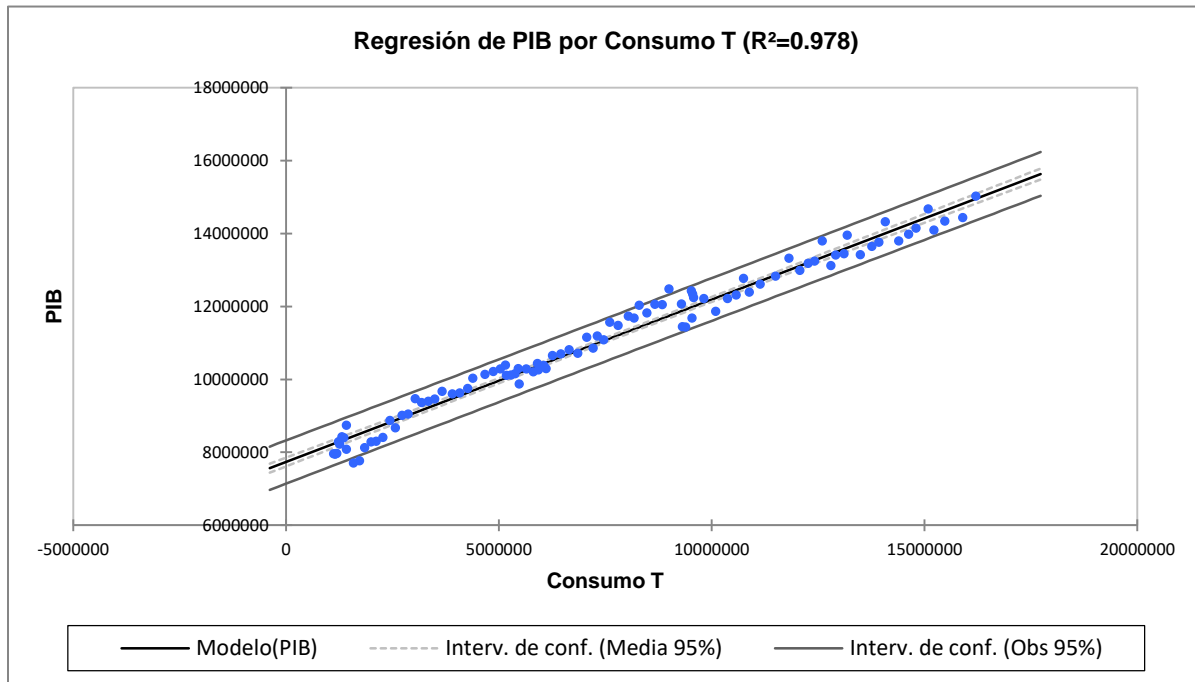
Utilizando estos datos se obtiene la siguiente ecuación:

Ecuación del modelo (PIB):

$$\text{PIB} = 7733729.38750095 + 0.44557425564851 * \text{Consumo T}$$

Parámetros del modelo

Fuente	Valor	Error estándar	t	Pr >  t	Límite inferior (95%)	Límite superior (95%)
Intercepción	7733729.388	59641.389	129.671	< 0.0001	7615310.011	7852148.764
Consumo T	0.446	0.007	64.859	< 0.0001	0.432	0.459



Se procede a realizar las pruebas para comprobar si el modelo cumple con los supuestos:

#### PRUEBAS DE HETEROCEDASTICIDAD

- Prueba de Breusch-Pagan:

LM (Valor observado) 0.119

LM (Valor crítico) 3.841

GL 1

valor-p (bilateral) 0.731

alfa 0.05

Interpretación de la prueba:

H0: Los residuos son homocedásticos

Ha: Los residuos son heterocedásticos

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , no se puede rechazar la hipótesis nula  $H_0$ .

El riesgo de rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es verdadera es de 73.05%.

---

LM (Valor observado) 0.802

LM (Valor crítico) 5.991

GL 2

valor-p (bilateral) 0.670

alfa 0.05

---

Interpretación de la prueba:

$H_0$ : Los residuos son homocedásticos

Ha: Los residuos son heterocedásticos

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , no se puede rechazar la hipótesis nula  $H_0$ .

El riesgo de rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es verdadera es de 66.98%.

El modelo propuesto no presenta heterocedasticidad, por lo que se debe revisar el restante supuesto del modelo.

Pruebas de Autocorrelación.

*Estadísticos descriptivos:*

Variable	Obs.	Obs. con datos perdidos	Obs. sin datos perdidos	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
Residuo	96	0	96	-751536.458	717983.280	0.000	291402.183

- Prueba de Durbin-Watson

**U**                    **1.044**

<b>VALOR-P</b>	< 0.0001
<b>ALFA</b>	0.05

Interpretación de la prueba:

$H_0$ : Los residuos no son autocorrelacionados

Ha: Los residuos son AR(1)

Puesto que el valor-p computado es menor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , se debe rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , y aceptar la hipótesis alternativa  $H_a$ .

El riesgo de rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es verdadera es inferior al 0.01%.

- Prueba de rachas

Se utilizan las mismas hipótesis de la prueba de Durbin-Watson, se calcula el número de rachas que será igual a 4, tendremos entonces:

$$N=96$$

$$N_1=11 \quad \text{Media} \quad E(R)=\frac{2(85)(11)}{96} + 1 = 20.476$$

$$N_2=85$$

$$R=4 \quad \text{Varianza} \quad \sigma^2 R = \frac{2(85)(11)(2)(935)}{96^2(95)} = 3.78$$

$$\sigma R = 1.946$$

El intervalo  $[20 \pm 1.96(1.946)] = (16.18, 23.81)$

El intervalo no incluye 4, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula.

Debido a que se rechaza la hipótesis nula, el modelo propuesto presenta autocorrelación por lo que es necesario realizar algún procedimiento para corregir esta enfermedad.

El paquete xlstat cuenta con el Cochrane-Orcutt que sirve para corregir este tipo de errores, que hace una modificación en los datos originales:

Estadísticos descriptivos:

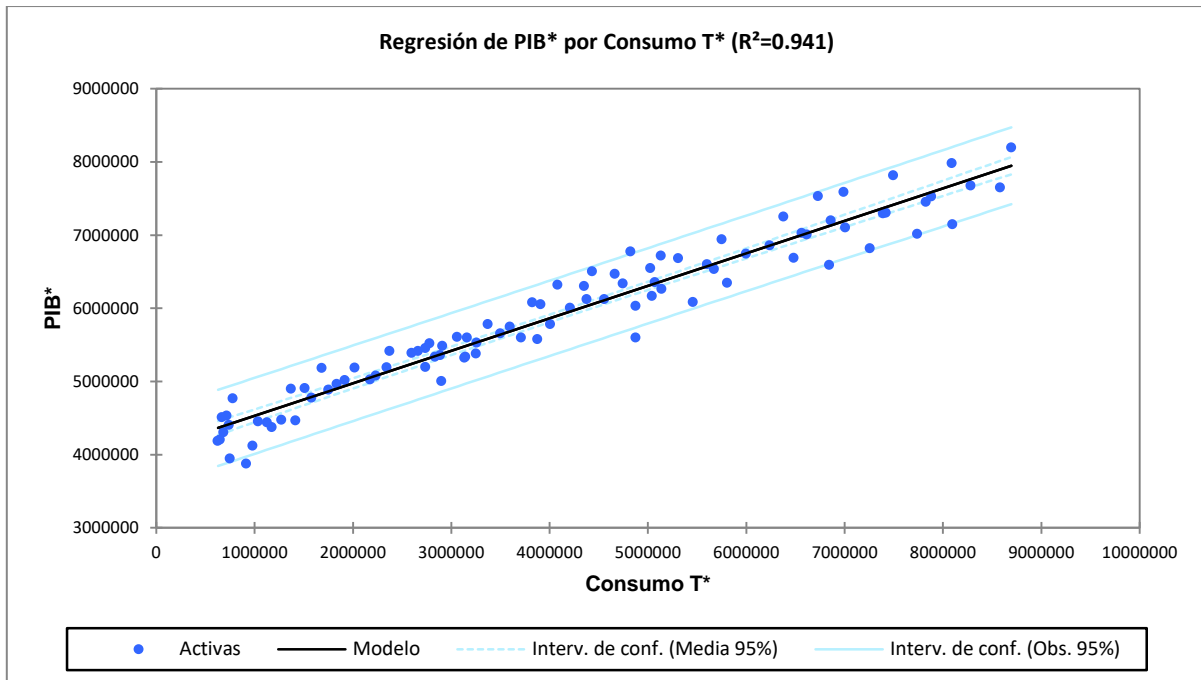
Variable	Observaciones	Obs. con datos perdidos	Obs. sin datos perdidos	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
PIB	96	0	96	7690088.040	15012852.800	11080813.150	1971044.147
Consumo T	96	0	96	1124433.200	16215762.200	7511842.796	4374993.486

Tendremos la siguiente modificación del modelo y de sus parámetros

Ecuación del modelo:

$$PIB^* = 7751405.6567735 + 0.444099558422847 * \text{Consumo T}^*$$

Fuente	Valor	Error estándar	t	Pr >  t	Límite inferior (95%)	Límite superior (95%)
Intercepción	7751405.657	101920.163	144.266	< 0.0001	3979671.105	4193065.521
Consumo T*	0.444	0.011	38.650	< 0.0001	0.421	0.467



Esta nueva versión de modelo supuestamente tendrá menos autocorrelación que la original. Por lo que habrá que investigar nuevamente su presencia en la misma. El número de transformaciones realizadas es en promedio 5 o 10 veces para estar seguros que sea eliminado el problema, entonces realizando nuevamente la Prueba de Durbin-Watson:

- Prueba de Durbin-Watson

U	2.300
valor-p	0.930
alfa	0.05

Interpretación de la prueba:

$H_0$ : Los residuos no son autocorrelacionados

$H_a$ : Los residuos son AR(1)

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , no se puede rechazar la hipótesis nula  $H_0$ .

El riesgo de rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando es verdadera es de 92.96%. Y por tanto, el modelo ya no presenta autocorrelación en los datos.

Realizamos nuevamente las pruebas para la heterocedasticidad:

- Prueba de White:

LM (Valor observado)	4.008
LM (Valor	5.991



crítico)

GL	2
valor-p (bilateral)	0.135
alfa	0.05

---

Interpretación de la prueba:

H0: Los residuos son homocedásticos

Ha: Los residuos son heterocedásticos

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , no se puede rechazar la hipótesis nula H0.

El riesgo de rechazar la hipótesis nula H0 cuando es verdadera es de 13.48%.

- Prueba de Breusch-Pagan:

LM (Valor observado)	3.118
LM (Valor crítico)	3.841
GL	1
valor-p (bilateral)	0.077
alfa	0.05

---

Interpretación de la prueba:

H0: Los residuos son homocedásticos

Ha: Los residuos son heterocedásticos

Puesto que el valor-p calculado es mayor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , no se puede rechazar la hipótesis nula H0.

El riesgo de rechazar la hipótesis nula H0 cuando es verdadera es de 7.74%.

El modelo ya no presenta heterocedasticidad ni autocorrelación.

### Conclusiones

El modelo lineal general, al manejar un gran número de datos aleatorios, es probable que presente algunas fallas en el planteamiento y resultado de las pruebas estadísticas. Estas son conocidas en el ámbito matemático como las enfermedades en el modelo lineal, que se definen como la autocorrelación, la heterocedasticidad, y la multicolinealidad (ésta en caso de tenerse más de dos variables). Debido a ello existen diversos métodos matemáticos cuyo propósito es darle solución a dicho problema. Existen numerosas pruebas para esta tarea, sin embargo en este trabajo se mostraron dos para cada caso. Se trabajó como ejemplo un modelo con las variables PIB y consumo total que se obtiene de la suma entre consumo público y consumo privado. Es importante mencionar que en caso de que se presenten un problema en los supuestos, se deben realizar una corrección en el modelo, ya sea en su planteamiento o en la base de datos. En el modelo econométrico propuesto se observó

inicialmente la presencia de la autocorrelación, se aplicó el método Cocharane- Orcutt y se le logró dar solución con una corrección en la base de datos del modelo, de igual manera se volvieron a revisar las pruebas para la heterocedasticidad con el nuevo modelo y ya no se presentó ninguna alteración de los supuestos en el ML.

### Referencias

Paul Mayer, Probabilidad con aplicaciones a estadística

Guja rati, Econometría

[www.economia.com.mx/producto\\_interno\\_bruto.htm](http://www.economia.com.mx/producto_interno_bruto.htm)

[http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/D\\_departamento/materiales/analisis\\_datosyMultivariable/18reglin\\_SPSS.pdf](http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/D_departamento/materiales/analisis_datosyMultivariable/18reglin_SPSS.pdf)

<http://www4.ujaen.es/~dmonitoro/Metodos/Tema%209.pdf>

<http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/cn/pibt/default.aspx>

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 2

### ERROR DE DICIEMBRE

Juan Candia Vargas, Edson Aarón Luna Barboza. Dra. Alicia López Betancourt. Contacto:

[lma.candia@gmail.com](mailto:lma.candia@gmail.com)

Facultad de Ciencias Exactas

[lma.candia@gmail.com](mailto:lma.candia@gmail.com), [bkcena\\_25@hotmail.com](mailto:bkcena_25@hotmail.com)

Licenciatura.

Palabras clave: economía, análisis de regresión.

### Resumen

En el trabajo se exponen los sucesos que tuvieron lugar en un diciembre de 1994 mientras el país cruzaba una difícil crisis por mal manejo de la economía en ese tiempo la cual llevó al conocido error de diciembre. Se realiza análisis de regresión lineal de datos correspondientes a la cuenta corriente a partir de los cuales se obtuvo una diferencia significativa con los datos capturados en un periodo de tiempo durante el sexenio de Carlos Salinas de Gortari, con los resultados podemos afirmar que la situación actual está peor que la vivida cuando ocurrió el suceso citado.

### INTRODUCCIÓN

En la historia de México han existido muchas complicaciones en el área de la economía, llegando a ser denominadas “crisis económicas”, pero no ha existido una de tal magnitud como la muy conocida como “el error de diciembre”, nombrada así por el ex presidente Carlos Salinas de Gortari.

Esta crisis fue provocada por la falta de reservas internacionales, causando la devaluación del peso mexicano durante los primeros días de la presidencia de Ernesto Zedillo Ponce de León en diciembre de 1994; y ha sido clasificada como la peor crisis, ya que no solamente llegó a afectar las finanzas del Gobierno Federal, sino también a miles de empresas nacionales e internacionales y quizá a millones de ciudadanos que se encontraban seriamente endeudados, una buena parte de empresas en dólares y muchos otros con tasas de interés variables que materialmente se vieron imposibilitados de pagar.

Durante ese tiempo, hubo variaciones muy drásticas en los derivados sectores económicos: como en el ahorro externo, el saldo en cuenta corriente y, sobretodo, en el producto interno bruto (PIB), ya que son las principales áreas económicas afectadas (González, A., 2014).

## MARCO TEÓRICO

Cuando el país estaba en una economía equívoca por parte del Gobierno, el cual antes de ocurrir el error de diciembre hubo un acontecimiento llamado la noche triste que fue el inicio del error de diciembre, con los precios del dólar muy cambiantes y a la vez inestable nuestra moneda frente a él, al momento de que en el banco de México se vio afectado el fondo monetario de la casa Banco de México y para el diciembre en que Salinas de Gortari dejó la presidencia, el día 22 de diciembre 1994 se acordó la devaluación de la moneda, decisiones estaban a cargo del mandatario del gobierno de la republica Ernesto Zedillo Ponce de Leon. Con este hecho hubo consecuencias graves, tales como la elevación de la tasa de inflación y la de interés. La crisis fue agravada por causa de una política “estabilizadora” que generó una recesión sin precedente contemporáneo por su magnitud, costo económico y social y por llevar a la quiebra a un amplio sector poblacional y comercial y, sobretodo, al sistema financiero. (González, M. A., 2000).

Aspectos teóricos matemáticos: método de interpolación de mínimos cuadrados

El enfoque de mínimos cuadrados requiere de la determinación de la mejor recta que aproxima cuando el error involucrado es la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de la recta que aproxima y los valores dados.

El problema general de encontrar la mejor recta de mínimos cuadrados que ajuste a una colección de datos requiere de la minimización de:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Con respecto a los parámetros de  $a$  y  $b$  para el cálculo del polinomio lineal. Para que ocurra un mínimo es necesario que:

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = 0$$

$$\frac{d}{db} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = 0$$

Dada la muestra  $\{(x_i, y_i)\}; i = 1, 2, \dots, n\}$ , los estimados  $a$  y  $b$  de los mínimos cuadrados de los coeficientes de regresión se calculan mediante las fórmulas:

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{y} - b\bar{x}$$

Ecuaciones del polinomio interpolador lineal por el método de mínimos cuadrados

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

Ecuaciones del polinomio interpolador cuadrático por el método de mínimos cuadrados

$$a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i$$

Ecuaciones del polinomio interpolador cúbico por el método de mínimos cuadrados

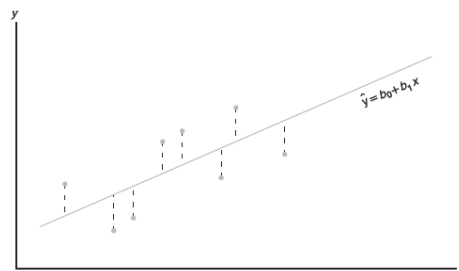
$$a \sum_{i=1}^n x_i^6 + b \sum_{i=1}^n x_i^5 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 + d \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^5 + b \sum_{i=1}^n x_i^4 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 + d \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 + d \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i + nd = \sum_{i=1}^n y_i$$

Se debe señalar que el criterio de los mínimos cuadrados está diseñado para brindar una recta ajustada que resulte en la “cercanía” entre la recta y los puntos graficados. Este método obliga a que los resultados sean “pequeños” en cierto sentido. Recordando que los residuales son el equivalente empírico de los valores de  $\epsilon$ . La siguiente figura ilustra un conjunto de residuales.



Se observa que la línea ajustada tiene valores predichos como puntos sobre la recta y, en consecuencia, los residuales son desviaciones verticales desde los puntos hasta la recta. Como resultado, el procedimiento de mínimos cuadrados genera una recta que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales desde los puntos hasta la recta.

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el análisis de la situación económica del país, después de la junta entre mandatarios el error de diciembre tuvo serias consecuencias que hasta la fecha son resentidas en la economía del país, pero tuvo un control causando algo de estabilidad al final del sexenio de Ernesto Zedillo y durante los gobiernos panistas de Vicente Fox y Felipe Calderón, aunque en el sexenio de Enrique Peña Nieto, la economía ha sufrido una baja algo similar recordando esos duros tiempos de los 90's.

Pero ¿qué hubiera sucedido si la crisis no se hubiera estabilizado?, ¿el análisis de cada aspecto económico tendría una amplia variación con las actuales?

Las matemáticas son un sustento fundamental para el análisis de las situaciones económicas del país. Es así como los modelos de interpolación, en este caso el de regresión lineal sustenta los resultados para un acercamiento a entender la situación vivida por el país en diciembre de 1994 y al inicio del gobierno de Ernesto Zedillo, con el mal manejo de los recursos del país se afectaron las familias y a los empresarios, con lo que decidieron vaciar el fondo monetario del banco de México, con lo que se provocó la crisis en la que centramos este trabajo.

### METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte cuantitativo ya que plantea un problema de estudio delimitado y concreto, usa datos y los pone a prueba a través de teoría, en este caso el análisis estadístico: regresión lineal. La base de datos es secundaria se procesó en el paquete estadístico IBM SPSS Statistics versión 21.

### RESULTADOS

La cuenta corriente es un apartado dentro de la balanza de pagos y recoge las operaciones reales (comercio de bienes y servicios) y rentas que se producen entre los residentes de un país y el resto del mundo en un período de tiempo dado.

Antes y durante la crisis, México tuvo déficit en su cuenta corriente, por causa de tener saldo negativo causado por alguna(s) de estas razones:

- Precios de exportaciones temporalmente bajos.
- Buenas perspectivas económicas que conducen a bajos ahorros.
- Son el resultado de fallos del sistema financiero que alimentan expansiones de créditos.
- Mal comportamiento de las autoridades fiscales que reducen los ahorros nacionales (Sistema de Información Económica, s.f.).

Sus saldos son expresados en la siguiente tabla:

Tabla 1. Datos de cuenta corriente

CUENTA CORRIENTE
------------------



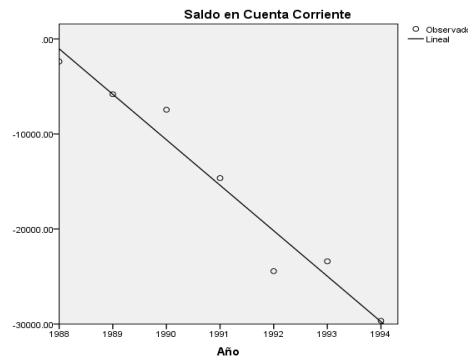
Año	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Saldo	-2375.63	-5821.21	-7451.05	-14646.72	-24438.48	-23399.20	-29661.97

Con respecto a estos datos, se realiza su análisis correspondiente, lo cual obtenemos lo siguiente:

Tabla 2. Coeficientes (Modelo Lineal)

	Coeficientes no estandarizados	
	B	Error estándar
Año	-4785.801	484.892
(Constante)	9513130.753	965419.949

En este caso, el enfoque de dicho análisis es hacia una representación de regresión lineal, la cual es  $y=9513130.753-4785.801x$ ; y dicha representación se puede apreciar en la siguiente gráfica:



Gráfica 1. Coeficientes del análisis lineal.

Y para observar las características de la correlación entre los valores, se realiza la siguiente tabla:

Tabla 3. Resumen del modelo

R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
.975	.951	.941	2565.806

La variable independiente es Año.

Por lo tanto, el coeficiente de correlación (lineal) es de 0.975, lo cual expresa que existe un comportamiento alto positivo entre los datos; y el coeficiente de determinación es de 0.951, así que representa el 95.1% de la variabilidad de la muestra de saldos en el periodo de 1988 a 1994.

Pero, para saber si el modelo lineal es el adecuado, es necesario realizar su análisis de varianza enfocada en la regresión, teniendo de hipótesis principal (o nula) que el modelo no

explica adecuadamente el fenómeno, contra una hipótesis secundaria (o alternativa) de que el modelo lo explica adecuadamente:

## ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F
Regresión	641308973.068	1	641308973.068	97.414
Residuo	32916800.478	5	6583360.096	
Total	674225773.546	6		

La variable independiente es Año.

Al analizar los resultados, se puede concluir que este modelo es suficiente y satisfactorio para representar el comportamiento del saldo en cuenta corriente a través de los años.

Tomando este modelo, en 2016, el saldo en cuenta corriente de nuestro país sería de -135044.21 millones de dólares; y comparando con el saldo real que es de -27858.20 millones de dólares, casi el doble del saldo simulado en la representación. Podemos concluir que, en el punto del saldo, estamos en peor situación que si estuviéramos viviendo aún en el tiempo del error de diciembre.

El ahorro externo es la cantidad de recursos que requiere la economía nacional para cubrir el déficit en la cuenta corriente de la balanza de pagos. Se compone por la inversión extranjera directa, los préstamos recibidos por el sector público y privado no monetario, el cambio en las reservas internacionales, las transferencias de capital y los errores u omisiones. Durante 1989 y 1990, México tuvo un control en sus reservas, provocando que la economía no se encontrara vulnerable, pero en 1991, el país empezó a generar dependencia al sector externo causando que el ahorro externo aumentara casi el doble del porcentaje del año anterior, generando preocupación en el sector económico. El ritmo de crecimiento del ahorro externo ha sido mayor por la confianza que los inversionistas extranjeros han depositado en nuestro país gracias al favorable entorno macroeconómico, a la reducción de tasas en los países desarrollados y a la gran liquidez, incrementando el flujo de recursos provenientes del extranjero.

El comportamiento del porcentaje del ahorro externo entre 1989 a 1994 se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4. Porcentajes de ahorro

AHORRO EXTERNO						
Año	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Porcentaje	2.60	2.70	4.50	6.70	5.80	6.90

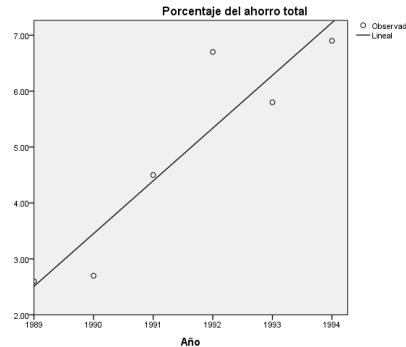
Con respecto a estos datos, se realiza su análisis correspondiente, lo cual obtenemos lo siguiente:

Tabla 5. Coeficientes.

	Coeficientes no estandarizados
--	--------------------------------

	B	Error estándar
Año	.943	.199
(Constante)	-1872.833	396.603

En este caso, la ecuación de dicho análisis de la representación de regresión lineal es  $y = -1872.833 + 0.943x$ ; la cual dicha ecuación se representa en la siguiente gráfica:



Gráfica 2. Porcentaje de ahorro total.

Y para observar las características de la correlación entre los valores, se realiza la siguiente tabla:

Tabla 6. Resumen del modelo.

R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
.921	.849	.811	.833

La variable independiente es Año.

Por lo tanto, el coeficiente de correlación es de 0.921, lo cual expresa que existe un comportamiento alto positivo entre los datos; y el coeficiente de determinación es de 0.849, así que representa el 84.9% de la variabilidad de la muestra de porcentajes del ahorro externo en el periodo entre los años de 1989 a 1994.

Para saber cual es la precisión de los datos en el modelo, se realiza el análisis de varianza de la regresión, teniendo como hipótesis principal que los modelos no son adecuados para representar el fenómeno de comportamiento, contra su hipótesis alternativa que indica que los modelos son adecuados para representar el fenómeno.

#### ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	15.557	1	15.557	22.415	.009
Residuo	2.776	4	.694		
Total	18.333	5			

La variable independiente es Año.

Como resultado, se tiene que el modelo es adecuado para representar el comportamiento del porcentaje del ahorro externo del país durante ese periodo.

Al tomar el modelo lineal, en 2016, el porcentaje del ahorro externo sería del 27.97%, comparada con el porcentaje real del 31%, al notar que existe una diferencia del 3.03%, se concluye que el ahorro externo no sería tan diferente, pero como el actual es mayor, se observa que existe una mayor dependencia al sector externo comparada con el resultado simulado (Zepeda, 2016).

El Producto Interno Bruto (PIB) es el valor monetario de los bienes y servicios finales producidos por una economía en un período determinado. EL PIB es un indicador representativo que ayuda a medir el crecimiento o decrecimiento de la producción de bienes y servicios de las empresas de cada país, únicamente dentro de su territorio. Este indicador es un reflejo de la competitividad de las empresas. La importancia de que el PIB crezca es porque:

Indica la competitividad de las empresas. Si la producción de las empresas mexicanas no crecen a un ritmo mayor, significa que no se está invirtiendo en la creación de nuevas empresas, y por lo tanto, la generación de empleos tampoco crece al ritmo deseado.

Si el PIB crece por abajo de la inflación significa que los aumentos salariales tenderán a ser menores que la misma.

Un crecimiento del PIB representa mayores ingresos para el gobierno a través de impuestos. Si el gobierno desea mayores ingresos, deberá fortalecer las condiciones para la inversión no especulativa, es decir, inversión directa en empresas; y también fortalecer las condiciones para que las empresas que ya existen sigan creciendo (economia.com, s.f.).

Antes del error de diciembre, el producto interno bruto de México ha tenido un bajo crecimiento, pero lograba mantenerse estable, pero en 1995, año en la que el error de diciembre tuvo fuerte presencia, hubo un alarmante decrecimiento significativo que causó el sector económico se debilitara.

El PIB de México durante ese periodo y su crecimiento se representan en las siguientes tablas:

Tabla 7. Producto interno bruto por año

Producto Interno Bruto								
Año	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Cantidad(mmd)	183.1	223	262.7	314.5	363.6	504	527.3	343.8

Tabla 8. Crecimiento del PIB

Crecimiento del PIB								
Año	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Porcentaje	1.25	4.20	5.07	4.22	3.63	4.06	4.73	-5.76

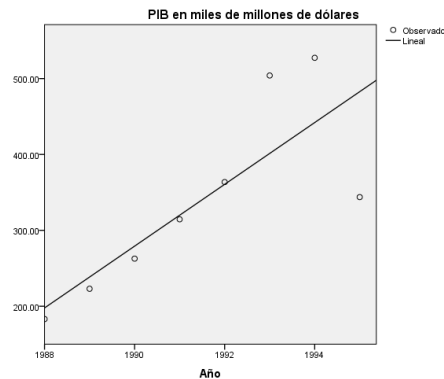
Con respecto a estos datos, se realiza su análisis correspondiente, lo cual obtenemos lo siguiente:

Para las cantidades de PIB:

Tabla 9. Coeficientes

	Coeficientes no estandarizados	
	B	Error estándar
Año	40.707	12.261
(Constante)	-80728.025	24417.683

En este caso, la ecuación de dicho análisis de la representación de regresión lineal es  $y = -80728.025 + 40.707x$ ; la cual dicha ecuación se representa en la siguiente gráfica:



Gráfica 3. PIB en miles de dólares.

Y para observar las características de la correlación entre los valores, se realiza la siguiente tabla:

#### Resumen del modelo

R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
.805	.648	.589	79.460

La variable independiente es Año.

Por lo tanto, el coeficiente de correlación es de 0.805, lo cual expresa que existe un comportamiento alto positivo entre los datos; y el coeficiente de determinación es de 0.648, así que representa el 64.8% de la variabilidad de la muestra de las cantidades del Producto Interno Bruto del país en el periodo entre los años de 1988 a 1995.

Para saber cual es la precisión de los datos en el modelo, se realiza el análisis de varianza de la regresión, teniendo como hipótesis principal que los modelos no son adecuados para representar el fenómeno de comportamiento, contra su hipótesis alternativa que indica que los modelos son adecuados para representar el fenómeno:

#### ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	69597.002	1	69597.002	11.023	.016



Residuo	37883.338	6	6313.890		
Total	107480.340	7			

La variable independiente es Año.

Como resultado, se tiene que el modelo es adecuado para representar el comportamiento del porcentaje del ahorro externo del país durante ese periodo.

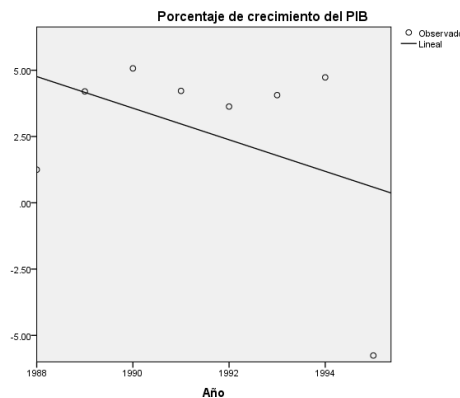
Al tomar el modelo lineal, en 2016, el producto interno de México sería de 1337.575 miles de millones de dólares, comparada con el producto interno bruto real que es de 1032.36 miles de millones de dólares.

Al hacer la comparación, el PIB actual está abajo más de 300 mil millones de dólares del PIB simulado en el modelo lineal, lo que significa que las relaciones económicas serían mejor con ese modelo. Para el crecimiento del PIB:

Tabla 10 Coeficientes

	Coeficientes no estandarizados	
	B	Error estándar
Año	-.596	.548
(Constante)	1189.04	1092.067

En este caso, la ecuación de dicho análisis de la representación de regresión lineal es  $y = 1189.04 - 0.596x$ ; la cual dicha ecuación se representa en la siguiente gráfica:



Gráfica 4. Porcentaje de crecimiento de PIB

Y para observar las características de la correlación entre los valores, se realiza la siguiente tabla:

Tabla 11. Resumen del modelo

R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación
.405	.164	.025	3.554

La variable independiente es Año.

Por lo tanto, el coeficiente de correlación es de 0.405, lo cual expresa que existe un comportamiento medio positivo entre los datos; y el coeficiente de determinación es de 0.164, así que representa el 16.4% de la variabilidad de la muestra de los porcentajes del crecimiento del Producto Interno Bruto del país en el periodo entre los años de 1988 a 1995 (Sistema de Información Económica, s.f.).

Al tomar el modelo lineal, en 2016, el porcentaje de crecimiento del producto interno de México sería del -11.92%, comparada con el porcentaje de crecimiento real que es del 2.3%.

En este caso, el porcentaje real es más preferente que el simulado, ya que habría un decrecimiento precipitado y alarmante en el PIB del país, causando desequilibrio económico y vulnerabilidad incurable (González A., 2014).

## CONCLUSIONES

Con lo visto en el análisis del error de diciembre, vimos cómo se afectó severamente la economía de todas las familias mexicanas debido a un mal manejo de la misma, que ocasionó que la moneda nacional se devaluara en un tiempo muy corto, con lo que los precios del dólar ya era más estable, cuando Ernesto Zedillo entro en diciembre y se toma la decisión de que el peso perdiera tres cero en su denominación hace que mucha gente perdiera sus patrimonios, y ahí fue cuando a ese fenómeno se le llamo el error de diciembre ya que los inversionistas agotaron la reserva y de ahí se llegó a toma esa decisión. El modelo lineal de regresión en cada uno de los casos refleja un comportamiento más próximo entre cada valor registrado, y con su utilización, se hace un cálculo a futuro en cada modelo, observando una diferencia en los datos estimados con dichos modelos con los datos reales capturados en la actualidad, exhibiendo que la situación actual en esos sectores está en pésimas situaciones en comparación con las condiciones actuales.

## Referencias

- González, A. (19 de diciembre de 2014). *El financiero*. Recuperado el 14 de mayo de 2017, de <http://www.elfinanciero.com.mx/economia/graficas-para-entender-causas-y-efectos-del-error-de-diciembre.html>
- González, M. A. (2000). *Fobaproa y sus Consecuencias Económicas, Políticas y Sociales*. Nuevo Leon.
- economia.com*. (s.f.). Recuperado el 4 de mayo de 2017, de [http://www.economia.com.mx/producto\\_interno\\_bruto.htm](http://www.economia.com.mx/producto_interno_bruto.htm)
- Sistema de Información Económica*. (s.f.). Recuperado el 04 de mayo de 2017, de <http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CE1&locale=es>
- Zepeda, C. (22 de 07 de 2016). *El financiero*. Recuperado el 14 de 05 de 2017, de <http://www.elfinanciero.com.mx/mercados/dinero/preocupa-al-mercado-mayor-ahorro-externo.html>

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 3

### LA MATEMÁTICA DETRÁS DE LA CRIPTOGRAFÍA DE LLAVE PÚBLICA

Franci del Rocio Almeida Torres. Asesor: Dra. Angelina Alvarado Monroy. Contacto:

*franci.almt@gmail.com*

Universidad Juárez del Estado de Durango. Facultad de Ciencias Exactas

Licenciatura

Criptografía, Llave pública, Matemática aplicada, RSA

En la actualidad con el avance de la ciencia y de la tecnología, se ha vuelto cada vez más indispensable proteger archivos e información de cualquier tipo para evitar la violación de confidencialidad. Para dar respuesta a esa necesidad, se buscan métodos más robustos que permitan resguardar tal contenido. Es ahí donde la matemática juega un papel fundamental, ya que proporciona el soporte teórico para lograr cumplir este objetivo a través del desarrollo y fortalecimiento de los sistemas criptográficos (SC). Este trabajo de investigación tendrá como propósito mostrar aquellos conocimientos matemáticos que respaldan a los SC de llave pública.

#### Introducción

La criptografía es un área en la cual la matemática abstracta ha encontrado la mayoría de sus aplicaciones, pues desde su invención ha estado en desarrollo para cubrir las necesidades que ha demandado la época. Durante mucho tiempo los contenidos tratados en álgebra abstracta o moderna fueron considerados como conocimientos de matemática pura sin que se pensara en posibles campos de aplicación. Actualmente la criptografía moderna ha tomado fuerza y relevancia, dado que se encarga de proteger la información de múltiples fuentes, y se encuentra casi en cualquier parte como lo es en bancos o al momento de registrar una cuenta en internet.

Los desarrolladores de sistemas criptográficos, se encargan de diseñar funciones o dispositivos, capaces de transformar mensajes legibles a mensajes cifrados de tal manera que esta función (cifrar) y su función inversa (descifrar) sólo puedan ser factibles con el conocimiento de una o más llaves.

En lo anterior descansa la principal motivación para realizar el presente trabajo de investigación. Dado que, como estudiante de una licenciatura en matemática aplicada este tema es de gran interés, puesto que, no sólo resulta atractivo, sino que también abarca un amplio conocimiento de teorías, áreas y conceptos fundamentales como: el concepto de función, el área de álgebra modular, teoría de grupos, de campos, de anillos, de matrices etc. que han encontrado una aplicación natural en la teoría de la información. Así que, para la autora de esta tesis incursionar en la criptografía ha sido una experiencia relevante al permitir repasar y ampliar los conocimientos matemáticos construidos y aprendidos en la licenciatura, pero sobre todo que han cobrado un especial sentido al estar vinculados a aplicaciones reales.

El objetivo principal de este trabajo es: mostrar la aplicación de contenidos matemáticos abstractos para proteger información relevante a través del uso de sistemas criptográficos.

Y en particular, comprender el concepto de llave pública, caracterizar sistemas criptográficos representativos de este concepto y comprender la matemática implícita en su desarrollo.

Como todo trabajo presenta sus limitaciones, la principal es que existen diversos sistemas criptográficos, sin embargo, sólo se abordarán ejemplos cercanos a los conceptos presentes en el currículum del nivel licenciatura.

### Marco teórico

La teoría de la información o teoría matemática de la información, es una propuesta iniciada por el matemático Claude Elwood Shannon en 1948. Es el estudio de la información y todo lo relacionado con ella. Esta rama de las ciencias se divide en: “Teoría de Códigos” y en “Criptología”. Y a su vez la Criptología se divide en Criptoanálisis y Criptografía.

La criptografía, se define como las técnicas utilizadas para cifrar y descifrar información utilizando técnicas matemáticas que hagan posible el intercambio de mensajes de manera que sólo puedan ser leídos por las personas a quienes van dirigidos. En contraparte, el criptoanálisis es la ciencia que estudia los métodos que se utilizan para, a partir de uno o varios mensajes cifrados, recuperar los mensajes en claro en ausencia de la(s) llave(s) y/o encontrar la llave o llaves con las que fueron cifrados dichos mensajes.

A su vez esta ciencia se clasifica en dos etapas por su desarrollo histórico la criptografía clásica y la criptografía moderna, la primera abarca todos los sistemas cifrado anteriores a la II Guerra Mundial, o lo que es lo mismo, al nacimiento de las computadoras electrónicas. Y la segunda que surge con la llegada de los computadores y la posibilidad de cálculo masivo de alta velocidad.

De acuerdo con Avella, Mendoza, y Sáenz, 2015 la criptografía moderna, además, estudia sistemas matemáticos (criptosistemas) que permitan resolver los problemas de privacidad y autenticación.

En general, un criptosistema es una quintupla

$$(M, C, K, E, D),$$

Donde  $M$  representa el conjunto de todos los mensajes sin cifrar;  $C$  es el conjunto de todos los mensajes cifrados;  $K$  el conjunto de claves que se pueden emplear;  $E$  es el conjunto de las funciones de cifrado, es decir, funciones

$$E_k: M \rightarrow C$$

Definidas para cada  $k \in K$ ; y finalmente,  $D$  denota el conjunto de las funciones de descifrado que deben verificar la siguiente condición

$$D_k(E_k(m)) = m, \quad \forall k \in K, \forall m \in M$$

Hay en esencia dos tipos de criptosistemas: los simétricos y los asimétricos.

La criptografía simétrica o de llave secreta es aquella que utiliza algún método matemático llamado sistema de cifrado para cifrar y descifrar un mensaje utilizando únicamente una llave secreta.

En particular nos interesa conocer la criptografía de llave pública la cual es, utilizada por numerosos algoritmos criptográficos y criptosistemas, cuyos caracteres distintivos con la utilización de algoritmos de llaves asimétricas, en lugar de (o además de), los algoritmos de llaves simétricas. La llave pública se utiliza para verificar las firmas digitales y para cifrar los mensajes.

En los sistemas de clave pública cada usuario tiene dos claves: una secreta conocida sólo por él y una pública conocida por todos. Este sistema es el que se usa actualmente por sus ventajas de proveer "firma digital" y hacer más seguro el proceso de intercambiar claves.

En este apartado se analizan los conceptos matemáticos detrás de la criptografía y los sistemas criptográficos con la finalidad de comprender el cómo y porqué de su funcionamiento. Los conceptos abordados, en su mayoría ya existe una noción previa, dado que son tratados a lo largo del currículo matemático del nivel licenciatura.

### Preliminares

Existen algunos conceptos básicos que son indispensables para comprender el proceso del trabajo criptográfico.

#### Definición 1.

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Una función (también llamado mapeo)  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada por  $f: A \rightarrow B$ , es un subconjunto  $F \subseteq A \times B$  tal que para cada  $a \in A$ , hay uno y solamente un par en  $F$  de la forma  $(a, b)$ . El conjunto  $A$  se llama el dominio de  $f$  y  $B$  se llama el rango de  $f$ .

#### Definición 2.

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, y sea  $f: A \rightarrow B$ , una función. Si  $f$  tiene inversa, entonces tiene por dominio el conjunto  $B$  y por rango al conjunto  $A$ , y se denota por  $f^{-1}: B \rightarrow A$ . Además  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

No todas las funciones poseen inversa y no todas permiten decodificar un mensaje de manera apropiada, y es por ello que en la criptografía es importante ser cuidadoso con las funciones a trabajar, un mínimo error podría cambiar o alterar el resultado. Un tipo especial de funciones de interés para la Criptografía son las funciones que garantizan mayor seguridad o resguardo del mensaje. Este tipo de funciones son conocidas como funciones de un sólo sentido y representan un gran desafío para lograr descifrar el mensaje.

#### Definición 3.

Una función  $f$  se dice de un *sólo sentido* si  $y = f(x)$  es de fácil cálculo conociendo  $x$ . Esto es, que se puede calcular en tiempo polinomial por medio de un algoritmo en función de la longitud de entrada, mientras que calcular  $x = f^{-1}(y)$  es computacionalmente imposible. No hay algoritmo probabilístico que en tiempo polinomial puede calcular la inversa de la función cuando  $x$  es escogido al azar.

### Congruencias

#### Definición 4.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , y sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Se dice que  $a$  es congruente a  $b$  módulo  $n$  si  $a - b = kn$  para algun  $k \in \mathbb{Z}$ . Y se denota por  $a \equiv_n b$ , ó  $a \equiv b \pmod{n}$ . En este caso la relación *clasifica* a cualquier entero  $a$  según el resto obtenido al dividirlo por el módulo  $m$ .



Llamaremos  $\mathbb{Z}_m$  al conjunto cociente de  $\mathbb{Z}$  respecto de la relación de congruencia módulo  $m$ . A la clase de equivalencia de un elemento  $a \in \mathbb{Z}$  se la denota por  $[a]_m$  o simplemente  $[a]$ .

*Proposición 1.*

Sean  $m \in \mathbb{N}$ , y  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tales que  $a \equiv b \pmod{m}$  y  $c \equiv d \pmod{m}$ . Entonces se cumple que:

- i  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- ii  $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

*Definición 5.*

En  $\mathbb{Z}_m$  podemos definir dos operaciones binarias internas:

$$+, \cdot : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$$

que llamamos suma y producto, y están definidas de la siguiente manera, para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a + b = a + b ; a \cdot b = ab$$

### Propiedades

- iii Son operaciones cerradas, conmutativas y asociativas
- iv Cumplen la propiedad distributiva
- v Tienen elemento neutro:  $0$  es el neutro para  $(\mathbb{Z}_m, +)$  y  $1$  es el neutro para  $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$

En el caso de  $(\mathbb{Z}_m, +)$  para cada  $a$  existe el elemento opuesto:  $-a$

También se tiene la propiedad de cancelación para  $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ : si  $a \cdot c \equiv b \cdot c \in \mathbb{Z}_m$  entonces  $a \equiv b$  en  $\mathbb{Z}_m / \text{mcd}(m, c)$ . Un caso especial es cuando  $\text{mcd}(m, c) = 1$ , ya que entonces se cumple la propiedad de cancelación para el producto en  $\mathbb{Z}_m$ : si  $a \cdot c = b \cdot c \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow a = b$  en  $\mathbb{Z}_m$

Si  $m$  es primo,  $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$  tendrá la propiedad de cancelación del producto para todo  $c$ .

En  $\mathbb{Z}_m$  se tienen los elementos invertibles o unidades. Se dice que  $a$  es invertible en  $\mathbb{Z}_m$  si existe un  $b \in \mathbb{Z}_m$  tal que  $a \cdot b \equiv 1$ . Ese elemento  $b$  será el inverso de  $a \in \mathbb{Z}_m$  y se denota como  $a^{-1}$ .

*Proposición 2.*

$a$  es invertible en  $\mathbb{Z}_m$ , si y sólo si existe  $b \in \mathbb{Z}_m$  tal que  $a \cdot b \equiv 1$  en  $\mathbb{Z}_m$ , si y sólo si existen  $b, k \in \mathbb{Z}_m$  tales que  $ab + km = 1$ , si y sólo si  $\text{mcd}(a, m) = 1$

### Números Primos

Como se ha visto el concepto de números primos está muy presente en el área criptográfica, pues es de ellos de donde han surgido los mecanismos más seguros usados actualmente para proteger la información.

*Definición 6.*

Sea  $p$  un número entero positivo con  $p \neq 1$  decimos que  $p$  es primo, si los únicos divisores positivos de  $p$  son  $1$  y  $p$ . Y se denota por  $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{Z}^+ | p \text{ es primo}\}$ . El resto de los números se denominan compuestos.

*Definición 7.*

Sean  $a$  y  $b$  números enteros. Se dice que  $a$  divide a  $b$  (o que  $a$  es un factor o divisor de  $b$ , o bien que  $b$  es un múltiplo de  $a$ ), si existe un entero  $c$  tal que  $b = ac$ . Se escribirá  $a \mid b$  si  $a$  no divide a  $b$ .

**Factorización de Números Enteros****Teorema Fundamental de la Aritmética**

Este teorema es de suma relevancia en la teoría de números, dado que establece que los números primos son los objetos a partir de los cuales se conformará un número entero.

*Teorema*

Todo número entero  $n > 1$  se puede escribir como producto primos  $n = P_1 P_2 \dots P_r$  con  $P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \dots \leq P_r$  y la descomposición es única. *Definición 2.9*

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ . un entero  $c$  se dice que es un divisor común de  $a$  y  $b$ , si  $c \mid a$  y  $c \mid b$ .

*Definición 8.*

Sean  $a$  y  $b$  enteros no ambos nulos. El máximo común divisor de  $a$  y  $b$  es el mayor elemento de los divisores comunes de  $a$  y  $b$ . Dicho máximo común divisor será denotado por  $(a, b)$  o bien por  $mcd(a, b)$ .

**Algoritmo de Euclides**

Sean  $a$  y  $b$  enteros positivos. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $b > a$ . Por el algoritmo de la división se tiene

$$b = aq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < a$$

Si  $r_1 = 0$  entonces  $a$  divide a  $b$  y por lo tanto  $(a, b) = a$  terminando el proceso. Si  $r_1 \neq 0$ , se divide  $a$  por  $r_1$ , obteniendo  $a = q_2 r_1 + r_2$ ,  $0 \leq r_2 < r_1 < a$ .

Nuevamente si  $r_2 = 0$  el proceso termina. Si  $r_2 \neq 0$ , se divide  $r_1$  por  $r_2$  obteniendo  $r_1 = q_3 r_2 + r_3$ ,  $0 \leq r_3 < r_2 < r_1 < a$ .

Este proceso continúa siempre y cuando el residuo obtenido sea distinto de cero. Como se tiene la secuencia decreciente de números enteros  $a > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$ , el proceso termina para algún  $n$ , y se tendrá que  $r_{n+1} = 0$ .

En tal caso, se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} b &= aq_1 + r_1 \\ a &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0 \end{aligned}$$

Donde  $0 \leq r_n < r_{n-1} < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < a$

Así en conclusión el último residuo distinto de cero ( $r_n$ ), es el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ .

*Definición 9.*

Se dice que dos números  $a$  y  $b$  son primos relativos o co-primos si no comparten divisores o si su máximo común divisor es 1. Esto es  $(a, b) = 1$  para cualquier  $a, b \in \mathbb{Z}$ , si  $a \nmid b$ .

### La Función de Euler

*Definición 10.*

Para cada  $m \in \mathbb{Z}^+$ , consideramos el conjunto

$$U_m := \{a \in \mathbb{Z}^+ : a \leq m \text{ y } (a, m) = 1\}$$

La función  $\phi: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , donde  $\phi(m)$  es por definición el cardinal del conjunto  $U_m$ , se le conoce como la *función  $\phi$  de Euler*. Esto es,  $\phi(m)$  es el número de enteros positivos que son menores o iguales a  $m$  y que además son primos relativos con  $m$ .

*Definición 11.*

Sea  $p$  un primo. Dado que todos los enteros positivos menores que  $p$  son primos relativos, se sigue que  $U_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$ ; y por lo tanto  $\phi(p) = p-1$

La función  $\phi$  es multiplicativa en el sentido de que si  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  y además  $(m, n) = 1$  entonces  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ .

### Planteamiento del problema

Desde tiempos antiguos se han diseñado sistemas criptográficos que han ido evolucionando hasta plantear sistemas cada vez más sofisticados. Tal evolución puede verse en función de la dificultad para romper con el cifrado al ser interceptado el mensaje emitido y recuperar el mensaje original. Existen métodos matemáticos respaldados en estructuras algebraicas que cada vez hacen que sea “casi imposible” romper el mensaje cifrado. Este tipo de sistemas criptográficos son los de interés para este trabajo.

Para ello el problema particular a trabajar a lo largo de esta investigación, consistirá en encriptar el mensaje “*PERFECTO COMO TU*” a través de SC de llave pública como lo es el RSA y el cifrado de la mochila.

### Metodología

#### El RSA

Funciona utilizando procedimientos matemáticos complejos que relacionan el documento firmado con información propia del firmante, y permiten que terceras partes puedan reconocer la identidad del firmante y asegurarse de que los contenidos no han sido modificados.

Es un criptosistema de llave pública basado en una exponenciación modular, donde las llaves son pares  $(e, n)$ , que consisten en un exponente  $e$  y un módulo  $n$ , producto de dos números primos  $p$  y  $q$  muy grandes,  $n = pq$ , además  $(e, \phi(n)) = 1$ .

*Algoritmo*

Para cifrar mensajes a través de una clave privada  $(e, n)$ , se debe trasladar un mensaje de texto claro  $M$  en secuencias de números enteros. Para ello, lo primero es traducir cada letra de un texto claro en números de dos dígitos, utilizando la misma traducción que se empleó para el cifrado de desplazamiento. Es decir, la letra A se traduce como 00, B en el 01 y así sucesivamente hasta Z en correspondencia con el 26. Se forman bloques o cadenas de dígitos de igual tamaño de dígitos  $2n$ .

Después de estos pasos habremos trasladado el mensaje  $M$  en una secuencia de números enteros  $m_1, m_2, \dots, m_k$  para algún entero  $k$ . El proceso de encriptación se hace mediante la transformación de cada bloque  $m_i$  en un cifrado de bloques  $c_i$ , a través de la función:

$$E(M) = C = M^e \pmod{d} \quad 0 \leq C < n$$

Para recuperar el mensaje original a partir del cifrado se realiza la siguiente operación:

$$D(C) \equiv C^d = (M^e)^d = M^{ed} = M^{k\phi(n)+1} \equiv (P^{\phi(n)})^k P \equiv P \pmod{n}$$

Donde  $ed = k\phi(n) + 1$  para algún entero  $k$ , debido a  $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$ , y por el teorema de Euler tenemos que  $P^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ , donde  $(p, n) = 1$ . Así pues la clave de descifrado es el par  $(d, n)$ .

#### EL CIFRADO DE LA MOCHILA

Inventado por Ralph Merkle y Martin Hellman en 1978, este criptosistema está basado en el problema de la mochila de decisión (un caso especial de la mochila de optimización): dados una secuencia de números y un número, determinar si existe un subconjunto de la secuencia cuya suma nos proporcione dicho número. Sin embargo, si la secuencia de números es supercreciente -- esto es, si cada elemento de la secuencia es mayor que la suma de todos los anteriores -- el problema es "fácil", y es posible resolverlo en tiempo polinómico con un simple algoritmo voraz.

Es un criptosistema asimétrico, esto significa que para la comunicación, se necesitan dos llaves: una llave pública y una privada. Otra diferencia con RSA, es que sirve sólo para cifrado, es decir, la llave pública es usada sólo para cifrar (no para verificar firma) y la llave privada es usada sólo para descifrar (no para firmar). De este modo, no se puede usar para tareas de autenticación por firma electrónica.

Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  una secuencia supercreciente y sea  $m$  un entero positivo con  $m > 2a_n$ . Sea  $w$  un entero positivo tal que  $(m, w) = 1$  con inverso  $\bar{w}$  módulo  $m$ . Es posible formar la secuencia  $b_1, b_2, \dots, b_n$  donde  $b_j \equiv wa_j \pmod{m}$  y  $0 \leq b_j < m$ . Esta técnica especial no puede usarse para resolver problemas de optimización del tipo  $S = \sum_{i=1}^n b_i x_i$  donde  $S$  es un entero positivo debido a que, la secuencia  $b_1, b_2, \dots, b_n$  no es supercreciente. Sin embargo, cuando  $\bar{w}$  es conocido es posible encontrar

$$\bar{w}S = \sum_{i=1}^n \bar{w}b_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{m}$$

Ya que  $\bar{w}b_j \equiv a_j \pmod{m}$ . De la ecuación anterior se observa  $S_0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  donde

$S_0$  es el último residuo positivo de  $\bar{w}b_j \pmod{m}$ . Como ya se sabe es fácil resolver una ecuación del tipo  $S_0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  porque  $a_1, a_2, \dots, a_n$  es una secuencia supercreciente. Es así que  $S = \sum_{i=1}^n b_i x_i$  puede resolverse ya que  $b_j \equiv wa_j \pmod{m}$  y  $0 \leq b_j < m$ .

*Algoritmo*

Se toma cualquier secuencia supercreciente  $(a_1, a_2, \dots, a_N)$  de números positivos de una longitud  $N$ , sea  $m$  el módulo a elegir con  $m > 2a_N$  y un multiplicador  $w$ , tal que  $(m, w) = 1$ . La secuencia transformada  $b_1, b_2, \dots, b_N$  es pública. Y si alguien desea enviar el mensaje  $P$  a alguien más, lo primero sería transformar cada letra del mensaje en una cadena de ceros y unos usando su equivalencia binaria, es importante que las cadenas sean de una longitud divisible entre  $N$ . Por cada bloque, se puede computar una suma usando la secuencia  $b_1, b_2, \dots, b_N$  con cada bloque  $x_1 x_2 \dots x_{nN}$  se puede definir  $S = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_N x_N$ . Finalmente esto generara cada bloque cifrado.

Para descifrar este tipo de SC cuando  $m$  y  $w$  son desconocidas se requiere resolver el problema  $S = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_N x_N$ . Sin embargo, cuando  $m$  y  $w$  son conocidas el problema optimización puede ser fácilmente transformado esto debido a que

$$\bar{w}S = \bar{w}b_1 x_1 + \dots + \bar{w}b_N x_N = \bar{w}a_1 x_1 + \dots + \bar{w}a_N x_N \pmod{m}$$

En el cual  $\bar{w}b_j \equiv a_j \pmod{m}$ , donde  $\bar{w}$  es un inverso de  $w$  módulo  $m$ , así que

$$S_0 = a_1 x_1 + \dots + a_N x_N.$$

Donde  $S_0$  es el menor residuo positivo de  $\bar{w}S$  módulo  $m$ . Es posible tener esta igualdad debido a que en ambos lados de la ecuación son enteros positivos menores a  $m$  que son congruentes módulo  $m$ .

**Resultados**

## El RSA

Se eligen dos números primos grandes  $p=211$  y  $q=131$ , obtenemos el módulo  $n=p*q=211*131= 27,641$  y proponemos  $e=11$  como el exponente de llave cifrado. Además  $(e, \phi(n)) = (11, 27300) = 1$ .

Para encriptar en mensaje: PERFECTO COMO TU, se trasladan a su equivalencia numérica y se agrupan en bloques de cuatro dígitos. Obteniendo

1604 1805 0402 2015  
0215 1202 2021

Para cifrar cada bloque de texto en un bloque de texto cifrado, se usa:

$$C \equiv P^{11} \pmod{27,641}$$

Entonces cuando se cifra el bloque 1604, se obtiene

$$C \equiv (1604)^3 \equiv 013695 \pmod{27,641}$$

Al cifrar todos los bloques, el mensaje queda de la siguiente manera:

013695 022757 013277 018713  
009119 017035 008031

Para el descifrar mensajes que han sido cifrados usando el método RSA, se debe encontrar la inversa de  $e=11$  módulo  $\phi(27,641) = 27,300$ .

Se busca un  $d$  tal que

$$11d = 27\,300k + 1$$

Donde  $k$  es un número entero, lo que es muy sencillo de resolver si se considera a esta ecuación como una ecuación en  $k$ ; esta es equivalente a la ecuación en  $\mathbb{Z}/11$

$$9k + 1 = 0$$

Porque  $27\,300 \equiv 9 \pmod{11}$ . La ecuación admite como solución  $k = 6$ , de donde

$$d = \frac{27\,300(6) + 1}{11} = 14891$$

Sea  $d=14,891$ .

Consecuentemente, para descifrar el bloque de texto C, se usa la relación

$$P \equiv C^{14,891} \pmod{27,641} \quad 0 \leq P < 27,641$$

Lo cual es válido debido  $C^{14,891} \equiv (P^{11})^{14,891} \equiv (P^{159290})P \equiv P \pmod{27,641}$  y por el teorema de Euler  $P^{\phi(27,641)} = P^{159291} \equiv 1 \pmod{27,641}$ , donde  $(P, 27\,641) = 1$ .

El cifrado de la mochila

Se toma la secuencia supercreciente  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}) = (2, 11, 14, 29, 58, 119, 241, 480, 959, 1917)$ . Se elige  $m = 3,837$  como el módulo de encriptación, además  $m > 2a_N = 3,834$ , y  $w = 1001$ , se observa que  $(m, w) = (3837, 1001) = 1$ . Aplicando la transformación  $b_j \equiv wa_j \pmod{m}$ , la secuencia queda de la forma  $(2002, 3337, 2503, 2170, 503, 172, 3347, 855, 709, 417)$ .

Para encriptar en mensaje: PERFECTO COMO TU, se trasladan a su equivalencia binaria de longitud cinco y se agrupan en bloques de dos letras. Obteniendo:

0111100100 1000100101 0010000010 1001101110

0001001110 0110001110 1001110100

Para formar la suma es necesario sumar los elementos de la secuencia  $(2002, 3337, 2503, 2170, 503, 172, 3347, 855, 709, 417)$  cuya posición corresponda al valor del dígito uno dentro de la cadena binaria. Así cuando se cifra el bloque 0111100100 habrá que sumar los números  $3337 + 2503 + 2170 + 503 + 855$  dando como resultado 9368.

Al cifrar todos los bloques el texto cifrado será:

9368 3777 2920 7584

7081 10751 5702

Para descifrar habrá que encontrar el menor residuo positivo  $x$  módulo 3837, en este caso  $\bar{w} = 23$  es el inverso de 1001 módulo 3837, que satisfaga  $9368 * 23 \equiv x \pmod{3837}$ , y posteriormente resolver el correspondiente problema de optimización con respecto a la secuencia supercreciente  $(2, 11, 14, 29, 58, 119, 241, 480, 959, 1917)$ .

Que en este caso particular sería  $9368 * 23 = 215464 \equiv x \pmod{3837}$  donde  $x = 592$ , entonces

$$592 = 2x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 29x_4 + 58x_5 + 119x_6 + 241x_7 + 480x_8 + 959x_9 + 1917x_{10}$$

La cual tiene solución según las reglas

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } S \geq a_n \\ 0 & \text{si } S < a_n \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } S - \sum_{i=j+1}^n a_i x_i \geq a_j \\ 0 & \text{si } S - \sum_{i=j+1}^n a_i x_i < a_j \end{cases} \text{ para } j = n-1, n-2, \dots, 1$$

Entonces

$$592 = 2(0) + 11(1) + 14(1) + 29(1) + 58(1) + 119(0) + 241(0) + 480(1) + 959(0) + 1917(0)$$

Es decir 0111100100, que corresponde a PE.

### Conclusiones

La matemática detrás de la criptografía de llave pública, es un documento de investigación donde se encontró un tema de interés en el ámbito de la matemática abstracta. Pese a las limitantes la elaboración del mismo, se desarrolló sin complicaciones y resultó ser muy satisfactorio pues se logró recopilar los conocimientos de los principales criptosistemas cuyo propósito es la protección de información.

Al inicio de este trabajo de investigación, se planteó como objetivo principal demostrar la aplicación de los contenidos matemáticos abstractos para la protección de información a través de sistemas criptográficos.

En general, durante la elaboración del documento, se proporcionaron diversas herramientas que permitieron cumplir el objetivo de esta investigación. Dichas herramientas contemplan el analizar un poco la historia y desarrollo de esta disciplina, los conceptos de conocimientos previos, y la ejemplificación de sistemas criptográficos modernos como lo es el RSA y el cifrado de la mochila. Es posible observar que esta última parte representa uno de los soportes fuertes de trabajo, pues muestra al lector la matemática implícita de una forma más gráfica, permitiendo con ello su comprensión. Hay muchas propuestas de SC modernos. En este caso ambos SC lograron cifrar de manera exitosa el mensaje propuesto dando entender lo sencillo que es el cifrar cuando se trabaja con números relativamente pequeños y cuando se conocen ambas llaves, sin embargo, en la realidad es común que se trabaje con números de hasta más de dos mil dígitos. En general se puede concluir que los SC son más seguros cuando a pesar de conocer las llaves que emplea surge la pregunta ¿Cómo calculo la inversa?

Este trabajo está pensado para aquellos estudiantes de nivel licenciatura que busquen dar aplicación a sus conocimientos enfocados a un ámbito computacional, al área de álgebra abstracta, o de la matemática en general a través de una manera un poco más didáctica.

### Referencias

- Avella, D., Mendoza, O., & Sáenz, C. (2015). *Grupos I*. México: Pápirhos.
- Hardy, D. W., & Walker, C. L. (2005). *Doing Mathematics with Scientific WorkPlace & Scientific Notebook Version 5.5*. MacKichan Software. Inc., Poulso, OK.
- American Psychological Association. (2010). *Publication manual of the American Psychological Association (6th Ed)*. Author.



- Gibrán, P. (2006). Introducción a la Criptografía. *Digital Universitaria*, 7 (7), 2-17
- Orozco, G y Nuñez , J. (2007). *Introducción a la criptografía*. Recuperado de <http://patux.net/downloads/crypto/crypto.pdf>
- Córtés, A., Díaz, S., David, J., Tapia, H., & Basurto, R. (2010). *Elementos de Criptografía Clásica*. Serie Matemática Aplicada y su enseñanza. México: SMM-CIMAT.
- Velasco, J. (2014). Breve historia de la criptografía. Recuperado de [http://www.eldiario.es/turing/criptografia/Breve-historia-criptografia\\_0\\_261773822.html](http://www.eldiario.es/turing/criptografia/Breve-historia-criptografia_0_261773822.html)
- Martínez, E.(2016). Fundamentos de la criptografía. Recuperado de <http://redyseguridad.fi-p.unam.mx/proyectos/criptografia/criptografia/index.php/1-panorama-general/12-historia-de-la-criptografia>
- Lehning, H. & Jakubowicz, D. (1985). *Matemáticas para la informática personal 1*. Paris: Masson.
- Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. Pearson Education.

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 4

### ¿ES SEGURO LO QUE COMES?

Dorely Diaz Centeno, Valeria Yaneth Flores Casas, Cyntia Mayte Salazar Rios, Karla Karina Sánchez Torres, Jonathan Bernadac Lozano, Victor Iván Sáyago Monreal, Denzel Bobadilla Calleros. Asesor: Dr. Saúl Névarez Nieto. Contacto: [havae\\_3@hotmail.com](mailto:havae_3@hotmail.com)  
Facultad de Ciencias Exactas y Facultad de Ciencias Químicas de la UJED

Licenciatura

ANOVA Bifactorial, Unidades Formadoras de [dorely\\_8919@hotmail.com](mailto:dorely_8919@hotmail.com);  
[havae\\_3@hotmail.com](mailto:havae_3@hotmail.com) ; [cynthia.salazar@hotmail.com](mailto:cynthia.salazar@hotmail.com) ; [karina\\_250695@hotmail.com](mailto:karina_250695@hotmail.com) ;  
[specimen\\_428\\_@hotmail.com](mailto:specimen_428_@hotmail.com); [victor\\_sayago95@hotmail.com](mailto:victor_sayago95@hotmail.com); [piolin.bob@hotmail.com](mailto:piolin.bob@hotmail.com)  
Colonias, alimentos preparados.

**Resumen:** Se realizó un análisis en tres distintas cafeterías de la UJED de un alimento preparado (burritos) para la determinación cuantitativa de Unidades Formadoras de Colonias (UFC en lo sucesivo) y coliformes totales apoyándose de las normas NOM-110-SSA1-1994 para la preparación de la muestra y el de la NOM-092-SSA1-1994 para el análisis microbiológico. Mediante el programa SPSS se determinó que la muestra sí influye en el número de UFC de este tipo de alimento, además se concluyó que los tres casos analizados, según las dos normas mencionadas, están dentro de lo estándares de calidad.

## Introducción

La presencia de bacterias en los alimentos es más común de lo que se cree, éstas se encuentran en el medio ambiente, lo que quiere decir, que están en contacto directo con los alimentos que consumimos y, más aún, cuando los alimentos no se preparan en casa, sino se adquieren de algún negocio ambulante o restaurante. Otras causas que provocan la propagación de estos microorganismos son la falta de higiene del personal que atiende tales lugares, el lavado inadecuado de manos o superficies y de los utensilios. Una especie muy común de bacterias detectadas son los coliformes fecales, que se encuentran principalmente en el intestino de los humanos y animales.

En este trabajo, se pretende determinar si las muestras de tres alimentos iguales (burritos), adquiridos en tres cafeterías diferentes de la Universidad Juárez del Estado de Durango (UJED) están contaminados con coliformes fecales y usar como indicadores los mesofílicos aerobios para estimar la carga microbiana que presentan las muestras. El valor de éstos últimos es reflejo de la calidad sanitaria, y más que, englobar un grupo taxonómico de bacterias se designa arbitrariamente de acuerdo con el método de análisis. En este caso, llamamos así a aquellas bacterias que se desarrollan en un medio de cultivo nutritivo a una temperatura de 33° a 37° C durante 24 a 48 horas de incubación.

La utilidad de las bacterias mesofílicas aerobias en la microbiología sanitaria se ha recomendado para los siguientes objetivos:

- Como indicador de la posible presencia de microorganismos patógenos,
- Como indicador del valor comercial de un alimento,
- Como indicador de la idoneidad de un ingrediente cuando se va a incorporar a un alimento,
- Para seguir la eficiencia de un proceso germicida o de preservación,
- Para predecir la vida de anaquel de un alimento.

La determinación de este grupo microbiano se basa en el método descrito en la Norma Oficial Mexicana NOM-092-SSA1-1994. Método para la cuenta de bacterias aerobias en placa.

### Marco Teórico:

Norma oficial mexicana NOM-092-SSA1-1994, bienes y servicios. Método para la cuenta de bacterias aerobias en placa.

Esta Norma Oficial Mexicana establece el método para estimar la cantidad de microorganismos viables presentes en un alimento, agua potable y agua purificada, por la cuenta de colonias en un medio sólido, incubado aeróbicamente.

Norma oficial mexicana NOM-110-SSA1-1994, bienes y servicios. Preparación y dilución

Esta Norma Oficial Mexicana establece el procedimiento para la preparación de diluciones para el análisis microbiológico de productos alimenticios.

Y la norma oficial Mexicana NOM-093-SSA1-1994, establece las especificaciones sanitarias que deben cumplir tanto la preparación de alimentos como el personal y los establecimientos fijos con el fin de proporcionar alimentos inocuos al consumidor, así

también establecen la Cédula de Verificación por medio de la cual se evaluará el cumplimiento de este ordenamiento.

### Bacterias mesofílicas

Bacteria que descompone la materia orgánica a temperaturas que oscilan entre 30 y 40 C. El agua es utilizada como medio de eliminación de excretas y otros desechos; puede también contener microorganismos patógenos de asiento no intestinales (flora de la piel por ejemplo); estos son las llamadas bacterias mesofílicas.

### Diseños factoriales con dos factores

Considere los factores A y B con a y b ( $a, b \geq 2$ ) niveles de prueba, respectivamente. Con ellos se puede construir el arreglo o diseño factorial  $a \times b$ , el cual consiste en  $a \times b$  tratamientos.

**Modelo estadístico e hipótesis de interés (Gutiérrez & De la Vara, 2008).** El modelo estadístico de efectos para este tipo de diseño está dado por:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, 3 \dots, a \quad j = 1, 2, 3 \dots, b \quad k = 1, 2, 3 \dots, n$$

Donde  $\mu$  es la media general,  $\alpha_i$  es el efecto debido al  $i$ -ésimo nivel del factor A,  $\beta_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor B,  $(\alpha\beta)_{ij}$  representa al efecto de interacción en la combinación  $ij$  y  $\varepsilon_{ijk}$  es el error aleatorio que se supone sigue una distribución normal con media cero y varianza constante  $\sigma^2$  ( $N(0, \sigma^2)$ ) y son independientes entre sí. Para que la estimación de los parámetros en este modelo sea única, se introducen las restricciones  $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$ ,  $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$  y  $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$ . Es decir, los efectos dados en el modelo son desviaciones relacionadas con la media global.

Las hipótesis de interés se pueden plantear con los efectos descritos en el modelo anterior

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$$

$$H_A : \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$$

$$H_A : \beta_j \neq 0 \text{ para algún } j$$

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ para todo } ij$$

$$H_A : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \text{ para algún } ij$$

Estas hipótesis se prueban mediante la técnica de análisis de varianza, que para un diseño factorial  $a \times b$  con  $n$  réplicas resulta de descomponer la variación total como,

$$SC_T = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_E$$

donde los respectivos grados de libertad de cada una de ellas son:

$$nab - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1) + ab(n - 1)$$

El factor  $(n - 1)$  en los grados de libertad de la suma de cuadrados del error ( $SC_E$ ) señala que se necesitan al menos dos réplicas del experimento para calcular este componente y, por ende, para construir una tabla de ANOVA. Recordemos que las sumas de cuadrados

divididas entre sus correspondientes grados de libertad se llaman *cuadrados medios* ( $CM$ ). Al dividir éstos entre el cuadrado medio del error ( $CME$ ) se obtienen estadísticos de prueba con distribución  $F$ . La información se resume en la Tabla 1.

Tabla 1: ANOVA para el diseño factorial a x b

$FV$	$SC$	$GL$	$CM$	$F_0$	Valor- $p$
Efecto $A$	$SC_A$	$a - 1$	$CM_A$	$CM_A/CME$	$P(F > F_0^A)$
Efecto $B$	$SC_B$	$b - 1$	$CM_B$	$CM_B/CME$	$P(F > F_0^B)$
Efecto $AB$	$SC_{AB}$	$(a - 1)(b - 1)$	$CM_{AB}$	$CM_{AB}/CME$	$P(F > F_0^{AB})$
Error	$SC_E$	$ab(n - 1)$	$CM_E$		
Total	$SC_T$	$abn - 1$			

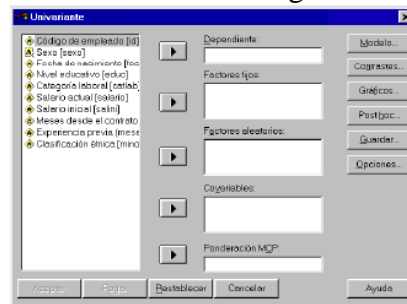
Si el valor- $p$  es menor al nivel de significancia a prefijado, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el correspondiente efecto está activo o influye en la variable de respuesta.

### Análisis de varianza de más de un factor en SPSS:

De acuerdo con (Pardo Antonio, 2000)

- Seleccionar la opción **Modelo lineal general > Univariante...** del menú **Anализar** para acceder al cuadro del dialogo *Univariante* que muestra la figura 1.

Figura 1: Cuadro de dialogo Univariante



- Seleccionar una variable cuantitativa y trasladar al cuadro **Dependiente**.
- Seleccionar dos o más variables y trasladarlas a la lista de **Factores fijos o Factores aleatorios**. Y dar clic en **Aceptar**.

### Comparaciones post hoc o posteriori:

Si alguno de los estadísticos  $F$  correspondientes a los efectos principales resulta significativo, puede interesar efectuar comparaciones post hoc (Pardo Antonio, 2000), para efectuar esta prueba:

- Pulsar el botón **Post hoc...** del cuadro de diálogo Univariante (Figura 1) para acceder al subcuadro del diálogo Univariante: Comparaciones múltiples post hoc que muestra la Figura 2.
- Seleccionar la opción de Scheffer y continuar.

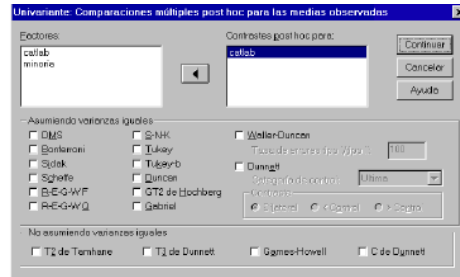


Figura 2: Subcuadro de dialogo Univariante. Comparaciones múltiples post hoc

## Planteamiento del problema

Para el desarrollo de este trabajo se tomaron 3 muestras de burritos de un mismo guiso, de diferentes cafeterías en las facultades pertenecientes a la Universidad Juárez del Estado de Durango zona sur, tomando en cuenta que las muestras fueron de un alimento que se ingiere comúnmente entre la sociedad estudiantil, con el objetivo de determinar si alguna de estas muestras estaba contaminada de coliformes fecales, específicamente, además de someterlas a incubación durante 48 horas para identificar si había existencia de otros microorganismos contables en UFC. Las muestras se someten a distinta diluciones con el propósito de ver si esto afecta con el resultado final de UFC, asimismo, si hay o no presencia de coliformes totales.

Esta investigación se hace con la intención de determinar si los alimentos que las cafeterías venden a los estudiantes se encuentran dentro de los estándares de sanidad establecidos por las diferentes instituciones dedicadas a la calidad de los alimentos en nuestro país. Dado que, de no ser así, dependiendo de las bacterias y su nivel de UFC, esto podría traer como consecuencia enfermedades, principalmente infecciones estomacales, entre otras.

## Metodología

En el transcurso de la presente investigación se realizó un trabajo de campo explicativo, mediante el método experimental, en el cual, se utilizó un enfoque matemático tomando en cuenta principalmente la estadística.

El experimento fue realizado en los laboratorios de microbiología de la Facultad de Ciencias Químicas por alumnos de la misma en conjunto con alumnas de la Facultad de Ciencias Exactas.

Se analizaron 3 burritos de distintas cafeterías que se encuentran en las facultades de la UJED ubicadas en la zona sur, con el principal objetivo de poder deducir la higiene con la que ha sido manejado cada uno de ellos, para ello se obtuvo la presencia de bacterias mesofílicas aerobias.

Así mismo, el método de análisis empleado es el descrito por la NOM-110-SSA1-1994 para la preparación de la muestra y el de la NOM-092-SSA1-1994 para el análisis microbiológico.

Contando con los datos obtenidos después de la prueba, se analizan en SPSS para obtener conclusiones acerca de las variables involucradas en dicha prueba.

Para aplicar un ANOVA Bifactorial en SPSS se introduce la base de datos se aplica un análisis de varianza de más de un factor.

Se plantean las hipótesis para cada variable o factor, así como la de la iteración:

$H_0$ : La muestra no influye en el número de UFC

$H_1$ : La muestra sí influye en el número de UFC

$H_0$ : La dilución no influye en el número de UFC

$H_1$ : La dilución sí influye en el número de UFC

$H_0$ : No hay interacción entre muestra y dilución

$H_1$ : Si hay interacción entre muestra y dilución

Después se hace una comparación post hoc o a posteriori ya que uno de las variables muestra medias diferentes.

### Resultados

Los resultados expuestos en la tabla 2 y 3 están representados en:

Número de Colonias por Caja (Colonias) y Unidades Formadoras de Colonias por gramo de muestra de alimento (UFC/g).

La tabla 2 muestra los resultados obtenidos después del análisis y la Tabla 3 muestra los datos organizados y ya multiplicados por su inverso como lo describe la NOM-092-SSA1-1994.

Al realizar un ANOVA Bifactorial a los datos organizados obtenemos que:

Según la tabla 5 “Pruebas de efectos inter-sujetos” presentada en Anexos se concluye que nuestra hipótesis nula se acepta, esto es que la interacción entre las variables de muestra y dilución no es significativa, es decir no hay interacción entre ambas.

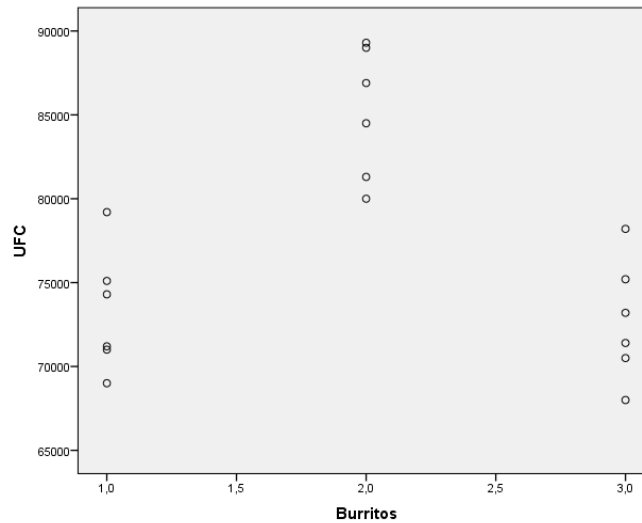
Con el entendido de que si la interacción NO es significativa, entonces hay evidencia de que los otros resultados son interpretables.

Así al analizar la variable de dilución se encuentra que nuestra hipótesis nula se acepta y la dilución no afecta en el número de UFC.

Pero respecto a la variable “Muestra” la cual se refiere al burrito 1, 2 y 3 la hipótesis nula no se acepta, entonces la prueba señala que la muestra sí afecta en el número de UFC.

Al realizar las pruebas de Scheffé y Tukey, estas encuentran, utilizando un nivel de confianza del 95%, diferencias significativas en las medias del burrito 1 y 2 y del burrito 2 y 3, mientras que el burrito 1 y 3 no presentan diferencia significativa alguna, por lo tanto podemos concluir que el burrito 2 presenta una cantidad mayor o menor de UFC con respecto al burrito 1 y 3. Para intentar determinar si la cantidad de UFC es mayor o menor en el burrito 2 utilizamos una gráfica de puntos, en la cual claramente se puede observar que la cantidad de UFC es mayor a la del burrito 3 y 1.

Gráfico



## Conclusiones

La adecuada manipulación de los alimentos desde que se producen hasta que se consumen, incide directamente sobre la salud de la población, esto demuestra la relación existente entre la inadecuada manipulación de los alimentos y la producción de enfermedades transmitidas a través de estos.

Las medidas más eficaces en la población de estas enfermedades son las higiénicas, ya que en la mayoría de los casos la persona encargada de la producción del alimento es la que interviene en la contaminación de estos.

En la prueba para el conteo de UFC en las 3 muestras analizadas obtenemos resultados que se encuentran muy por debajo de los 150,000 UFC/g, límite proporcionado según las normas de calidad de los alimentos, lo que quiere decir que los alimentos analizados son seguros para su consumo.

Es importante señalar que en esta investigación fueron realizadas pruebas para determinar la presencia de Coliformes Fecales en los alimentos analizados, dichas pruebas fueron realizadas por triplicado utilizando diferentes diluciones para obtener resultados más precisos.

Obteniendo resultados negativos ante esta prueba, lo cual indica que no se encontraron restos de contaminación fecal en ninguna de las muestras analizadas.

Con todo esto llegamos a que los alimentos de las cafeterías de las tres facultades de la Universidad Juárez del Estado de Durango, Ciencias Exactas, Psicología y Ciencias Químicas que fueron analizados, se encuentran dentro de los rangos de sanidad, es decir son consumibles sin riesgos de adquirir alguna enfermedad principalmente estomacal transmitida mediante estos alimentos.

## Bibliografía

A., P. (2000). *ANOVA factorial*. Obtenido de [http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/D\\_departamento/materiales/analisis\\_datosyMultivariable/15anova2\\_SPSS.pdf](http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/D_departamento/materiales/analisis_datosyMultivariable/15anova2_SPSS.pdf)



H., G., & De la Vara R. (2008). *Análisis y diseño de experimentos*. Interamericana.

Salud, S. d. (1995). *Diario Oficial de la Federación*. Obtenido de <http://www.salud.gob.mx/unidades/cdi/nom/092ssa14.html>.

### Anexos:

Tabla 2. Conteo de colonias de microorganismos mesofílicos (Colonias) a 48h y 37°C.

Burrito	Dilución		
	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$
<b>Muestra 1</b>	7920	751	71
<b>Muestra 2</b>	7430	712	69
<b>Muestra 3</b>	8450	893	80
	8130	869	89
	8930	714	68
	7050	752	78,2

Tabla 3. Base de datos

UFC	Muestra	Dilucion
79200	1	1
84500	2	1
73200	3	1
75100	1	2
89300	2	2
71400	3	2
71000	1	3
80000	2	3
68000	3	3
74300	1	1
81300	2	1
70500	3	1
71200	1	2
86900	2	2
75200	3	2
69000	1	3
89000	2	3
78200	3	3

Tabla 4:

**Factores inter-sujetos**

		Etiqueta de valor	N
Burritos	1	Muestra-1	6
	2	Muestra-2	6
	3	Muestra-3	6
Dilución	1	10-1	6
	2	10-2	6
	3	10-3	6

Tabla 5:

**Pruebas de efectos inter-sujetos**

Variable dependiente: UFC

Origen	Tipo III de suma de cuadrados	gl	Cuadrático promedio	F	Sig.
Modelo corregido	667061111 <sup>a</sup>	8	83382638,89	5,643	,009
Interceptación	1,069E+11	1	1,069E+11	7235,615	,000
Muestra	590587777,8	2	295293888,9	19,983	,000
Dilucion	16181111,11	2	8090555,556	,548	,597
Muestra * Dilucion	60292222,22	4	15073055,56	1,020	,447
Error	132995000,0	9	14777222,22		
Total	1,077E+11	18			
Total corregido	800056111,1	17			

a. R al cuadrado = ,834 (R al cuadrado ajustada = ,686)

Tabla 6:

**Pruebas post hoc****Burritos****Comparaciones múltiples**

Variable dependiente: UFC

(I) Burritos	(J) Burritos	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	Intervalo de confianza al 95%		
					Límite inferior	Límite superior	
HSD Tukey	Muestra-1	Muestra-2	-11866,67*	2219,401	,001	-18063,25	-5670,09
		Muestra-3	550,00	2219,401	,967	-5646,58	6746,58
	Muestra-2	Muestra-1	11866,67*	2219,401	,001	5670,09	18063,25
		Muestra-3	12416,67*	2219,401	,001	6220,09	18613,25
	Muestra-3	Muestra-1	-550,00	2219,401	,967	-6746,58	5646,58
		Muestra-2	-12416,67*	2219,401	,001	-18613,25	-6220,09
Scheffe	Muestra-1	Muestra-2	-11866,67*	2219,401	,002	-18342,22	-5391,11
		Muestra-3	550,00	2219,401	,970	-5925,55	7025,55
	Muestra-2	Muestra-1	11866,67*	2219,401	,002	5391,11	18342,22
		Muestra-3	12416,67*	2219,401	,001	5941,11	18892,22
	Muestra-3	Muestra-1	-550,00	2219,401	,970	-7025,55	5925,55
		Muestra-2	-12416,67*	2219,401	,001	-18892,22	-5941,11

Se basa en las medias observadas.

El término de error es la media cuadrática(Error) = 14777222,222.

\*. La diferencia de medias es significativa en el nivel 0,05.

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 5

### USO DE VARIABLES DICOTOMAS EN EL MODELO LINEAL GENERAL

Valeria Yaneth Flores Casas, Eduardo Reza Gurrola, Cyntia Mayte Salazar Ríos, Karla Karina Sánchez Torres. Asesora: Dr. Alejandra Soria Pérez. Contacto:  
*hvae\_3@hotmail.com*

Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango  
*hvae\_3@hotmail.co*<sup>1</sup>; *eduardoreza@hotmail.com*; *cyntia.salazar@hotmail.com*;  
*karina\_250695@hotmail.com*

Nivel: Licenciatura

*Palabras Clave:* Variables dicótomas, regresión, índice de masa corporal.

Resumen: Este proyecto de investigación se basó en la obtención de información correspondiente a: peso, estatura, si realiza alguna actividad física y el sexo de alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas. Con dicha información, se pretende determina la relación del peso con los demás datos. Mediante el uso del software Excel (XLSTAT) se encontró un modelo para representar dicha relación haciendo uso de variables dicotómicas para representar las variables de sexo y actividad física en dicho modelo.

#### Introducción

En esta investigación se trabaja con una relación entre variables cuantitativas y cualitativas, éstas últimas también llamadas variables dicótomas que, en esencia, son un recurso para clasificar datos en categorías mutuamente excluyentes y el modelo de regresión que puede contener variables explicativas exclusivamente dicótomas, por naturaleza es el de análisis de varianza (ANOVA). Sin embargo, el modelo que muestra la mezcla de ambas variables es el de análisis de covarianza (ANCOVA). Este análisis es apropiado para lograr dos objetivos específicos; como eliminar cualquier error sistemático fuera del control del investigador que puede sesgar los resultados; y tener en cuenta las diferencias en las respuestas debidas a las características propias de los encuestados.

Para el desarrollo de este trabajo se recopilan los datos de estatura, peso, sexo y si se realiza alguna actividad física, de 70 alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas (FACE en lo sucesivo), donde claramente podemos identificar que de las cuatro variables a analizar dos son de tipo cuantitativo (peso y estatura) y las otras dos son variables dicotómicas (sexo y actividad física), con el fin de observar cómo es que todas las variables influyen para la determinación de una variable dependiente que en este caso será el peso del estudiante.

Como una hipótesis inicial se podría llegar a pensar que un factor de influencia para la variable dependiente podría ser el hecho de realizar o no una actividad física, con mayor actividad física menos peso. Sin embargo, con el análisis de varianza el coeficiente de correlación nos indica que no existe una gran influencia por parte de esta variable.

El tema de este trabajo, se considera de gran importancia para la sociedad en general. Dado que, México ocupa uno de los primeros lugares en cuanto a países con problemas nutricionales, es interesante averiguar cómo los estudiantes adoptan un estilo de vida en su

etapa universitaria y cómo éste repercute en su salud. Con los datos recopilados se llega a ligar directamente con el índice de masa corporal (IMC) que no es más que la razón del peso y la estatura elevada al cuadrado del individuo, y que se clasifica de acuerdo a niveles determinados por la Organización Mundial de la Salud (OMS).

### Marco teórico

La expresión siguiente:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{i_1} + \alpha_2 X_{i_2} + \dots + \alpha_k X_{i_k} + u_i \quad (1)$$

Es conocido como el *Modelo Lineal General*, por ser una generalización del modelo de regresión lineal, donde:

- $u_i$  es una variable aleatoria continua con aproximación a una normal.
- $X_i$  es una variable fija.
- $\alpha_i$  es el parámetro a estimar

En este modelo se cuentan con las hipótesis siguientes:

- $E(u_i) = 0$ .
- $V(u_i) = \sigma^2$  ( $\sigma^2 > 0$ )
- $C(u_i, u_j) = 0$   $i \neq j$
- $X_j$ 's son linealmente independientes.

Si una o varias de las hipótesis anteriormente expuestas no se llegaran a cumplir se dice que el modelo es deficiente.

Las estimaciones de los parámetros se llevan a cabo de manera puntual calculando los mínimos cuadrados, los cuales consisten en tomar al modelo lineal general en una forma matricial:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

O bien

$$Y = X\alpha + U \quad (2)$$

$$U = Y - X\alpha$$

Lo que se busca con los mínimos cuadrados es que

$$\sum \hat{U}^2 = Y^t Y - 2Y^t X \hat{\alpha} + \hat{\alpha} X^t X \hat{\alpha}$$

Sea un mínimo es decir

$$\frac{\partial \sum \hat{u}^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0$$

Al hacer dichas operaciones véase [1], se obtiene la siguiente identidad

$$\hat{\alpha} = (X^t X)^{-1} Y^t X \quad (3)$$

Es demostrable que la estimación que nos explica (3) cumple con el *Criterio de Mejor Estimador Lineal Insesgado*, es decir, que cumple con las siguientes propiedades

- 1) El estimador es Insesgado [ $E(\hat{\alpha}_i) = \alpha_i$ ],
- 2) Es posible representar a los estimadores como una combinación lineal,
- 3) Posee varianza mínima.

Otra manera de estimar los parámetros es por medio de un intervalo de confianza, el cual varía dependiendo de si se conoce la varianza poblacional o no. En caso de no conocer la varianza se toma una estimación dada por

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{\sum \hat{u}^2}{n - 2}$$

Una pregunta que se hace es: ¿si el modelo se acerca o explica de manera adecuada los datos?, para responder tal cuestionamiento, se puede tomar el criterio del *coeficiente de determinación* del modelo. El cual, se calcula con la siguiente expresión (tomada de Gujarati, 2004):

$$R^2 := 1 - \frac{\sum \hat{u}^2}{\sum y^2}$$

La interpretación de dicho número nos da el porcentaje de datos que explica el modelo encontrado.

Otra manera de ver si el modelo es el adecuado es utilizando pruebas de hipótesis, contrastando con el estadístico t de Student, la cual se resuelve de la manera siguiente:

$$H_0: \alpha_i = a_i$$

$$H_1: \alpha_i \neq a_i$$

Se calcula el estadístico

$$t_0 := \frac{\hat{\alpha}_i - E(\hat{\alpha}_i)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 a_{ii}}}$$

Donde

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{\hat{u}^t \hat{u}}{n - k}$$

Y  $a_{ii}$  es el i-esimo término de la diagonal principal de la matriz  $(X^t X)^{-1}$ , después se obtiene de alguna tabla el valor crítico  $t_\alpha$  donde  $\alpha$  es la significancia con  $n - 1$  grados de libertad, si

$$t_0 < t_\alpha$$

La hipótesis nula se acepta, de lo contrario se rechaza. Este procedimiento viene explicado y demostrado en Johnson (1985).

Lo anterior, tiene el propósito de dar validez al modelo estimado. Otra técnica es usando un ANOVA de la regresión, con ella, en lugar de ver la significancia de manera individual, se ve si el modelo explica de manera adecuada los datos, o no.

#### *Variantes en la estructura del Modelo Lineal General*

El modelo puede contar con alguna o algunas de las siguientes variantes que alteran la estructura del modelo, sin embargo aun así se puede trabajar con él:

- 1) Linealizaciones de variables fijas
- 2) Estandarizaciones de Variables
- 3) Variables Cualitativas
- 4) Autorregresiones

En este reporte se trabajará un modelo que posee variables cualitativas, las cuales son *variables dicotómicas* que tienen dos posibles valores, (sí o no, hombre o mujer, etc.), y para trabajar con esto se emplea una escala de 0 para una opción y 1 para la otra.

En Pineda (1999), se indica que en presencia de variables dicotómicas el modelo toma la siguiente forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_i + u_i$$

Aunque también es posible, dada la situación, que exista interacción entre X y  $D_i$ , y en ese caso ahora el modelo es el siguiente

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_i + \beta_3 (XD_i) + u_i$$

Dentro de este trabajo se verá la relación de significancia entre el peso y la estatura de una persona.

### Información sobre la situación de aplicación

*El peso de un objeto* se define como la fuerza que la gravedad ejerce sobre un objeto de masa  $m$  y la relación matemática es la siguiente:

$$W = mg$$

La relación entre el peso y la altura de una persona se establece a partir del índice de masa corporal, el cual no se considera como variable en este caso. Sin embargo, marca una buena referencia de esta relación, la clasificación depende del género y la edad de la persona así como de su altura, esto hace que sea válida de manera intuitiva la relación que se establece en esta investigación.

### Planteamiento del problema

El objetivo de este reporte es conocer la relación que guarda el peso, la estatura, el sexo y el hecho de realizar alguna actividad física en datos obtenidos de los alumnos de la FACE y así determinar si hay una diferencia significativa en el peso de los estudiantes de acuerdo al sexo y si realizan alguna actividad física.

La presente investigación se justifica dada su finalidad, dado que, a partir de la interpretación de los resultados obtenidos, se pretende conocer el nivel de peso de los alumnos de la FACE, así como poder prevenir un desequilibrio en éste (obesidad, sobrepeso o bajo peso) tratando de obtener cual es el factor que influye más y darlo a conocer para aplicar una solución de ser necesaria.

Uno de los principales problemas que se presenta en nuestra sociedad es la obesidad por lo que es muy conveniente el desarrollo del trabajo por su enfoque a la determinación del factor que más influye en el peso y de este modo se tomarían medidas preventivas con dicho factor.

Entre los alcances y limitaciones se puede mencionar que la investigación se realiza con los alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas por su número pequeño de matrícula pero puede ser extendido a otras facultades, determinando una muestra considerable de acuerdo



al total de alumnos de la que obtendríamos las variables a trabajar y se cuenta con el programa necesario para hacer los cálculos.

### Metodología

Se realizó una investigación de campo explicativo, ya que se recolecta la información de 70 alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas en el semestre B de 2015, que incluye el peso en kilogramos, estatura en metros, si realiza alguna actividad física y el sexo.

Se utilizó el método de análisis ya que se determina la relación entre el peso con las demás variables.

La técnica y procedimiento para la recopilación de la información fue por medio de una encuesta, se seleccionó una muestra aleatoria del total de alumnos de la FACE, a los cuales se les tomó peso, estatura y se les preguntó si realizaban alguna actividad física haciendo distinción del sexo del alumno.

Se realizó un análisis estadístico, donde el principal objetivo era encontrar la ecuación que explicara el modelo de regresión lineal donde la variable dependiente es el peso. Como variables independientes se tienen dos cualitativas (sexo y si se practica alguna actividad física) y una variable cuantitativa (estatura).

Teniendo en cuenta la siguiente clasificación para poder trabajar con variables dicotómicas en el modelo de regresión:

- Sexo

0: Masculino

1: Femenino

- Practica de alguna actividad física.

0: Sí

1: No

Además se trabajó con una prueba t-student para variables significativas individuales donde se plantean como hipótesis:

$H_0$ : La variables es significativa en el modelo de regresión.

$H_1$ : La variable no es significativa en el modelo de regresión.

Esto con la finalidad de saber cuáles de nuestras variables independientes influyen en nuestra variable dependiente  $Y$ , la cual representa el peso de los alumnos.

### Resultados

#### Modelo de Regresión Lineal

Al utilizar XLSTAT obtenemos el siguiente modelo:

$$PESO = -58,2217293861757 + 72,2941311192084 * ESTATURA + 2,40185879080901 * EJERCICIO - 0 + 6,3802132917285 * SEX - 0$$

Con el cual se puede calcular el peso de un alumno tomando en cuenta su estatura, su sexo y si realiza alguna actividad física.

En estos resultados obtenemos un  $R^2 = 0,494$  lo cual nos dice que el modelo explica un 49.4% de los datos.

Se encuentra que las variables de estatura y sexo tienen significancia en el modelo mientras que la variable de ejercicio no tiene significancia para determinar el peso de los estudiantes de la FACE.

Lo anterior se puede verificar en la Tabla 1 y 2 incluidas en la sección Anexos.

### Conclusiones

Al principio de este trabajo estaba incluida la variable de Índice de Masa Corporal (IMC), la cual sería nuestra variable dependiente, y se trabajarían las variables de peso, estatura, sexo y actividad física como variables independientes apartir de las cuales se haría una estimación del IMC, pero el  $IMC = \frac{\text{peso}}{\text{estatura}^2}$  entonces al obtener la ecuación del modelo de regresión obtenemos colinealidad entre los datos, se decidió eliminar esta variable, por lo que la nueva variable dependiente sería el peso y se estima apartir de las variables restantes.

Al obtener la ecuación del modelo de regresión e interpretando la tabla 2 (ver anexo) se llegó a concluir que: realizar alguna actividad física o no, no tiene significancia en el peso de un estudiante, se esperaría que en realidad esta variable influyera demasiado en el peso, pero al realizar mucho ejercicio se debe contemplar que la grasa se convierte en músculo, el cual aporta peso y así se determina que el ejercicio no es factor influyente en el peso.

### Referencias

- Gujarati, D. (2004). *Econometría*. McGraw-Hill Interamericana,
- Loría, E. (2007). *Econometría con aplicaciones*. México: Pearson Educación.
- Maddala, G.S. (1985). *Econometría*. McGraw-Hill.
- Meyer, Paul. (1973). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. México: Fondo educativo interamericano.
- Pineda, Luis. (1999). *Métodos y modelos econométricos*. México: Limusa.
- Johnson, J. (1985). *Econometric Methods* (Tercera edición). McGraw-Hill Book Company.

### Anexos

Tabla 1: Estadísticos de bondad del ajuste (PESO):

<b>Observaciones</b>	<b>70,000</b>
<b>Suma de los pesos</b>	70,000
<b>GL</b>	66,000
<b>R<sup>2</sup></b>	0,495
<b>R<sup>2</sup> ajustado</b>	0,472
<b>MEC</b>	89,103
<b>RMSE</b>	9,439
<b>MAPE</b>	10,826
<b>DW</b>	2,445

<b>Cp</b>	4,000
<b>AIC</b>	318,166
<b>SBC</b>	327,160
<b>PC</b>	0,566

Tabla 2: Parámetros del modelo (PESO):

Fuente	Valor	Error estándar	t	Pr >  t	Límite inferior (95%)	Límite superior (95%)
<b>Intercepción</b>	-58,222	21,064	-2,764	<b>0,007</b>	-100,278	-16,165
<b>ESTATURA</b>	72,294	12,861	5,621	<b>&lt; 0,0001</b>	46,616	97,973
<b>EJERCICIO-0</b>	2,402	2,364	1,016	0,313	-2,317	7,121
<b>EJERCICIO-1</b>	0,000	0,000				
<b>SEXO-0</b>	6,380	2,536	2,516	<b>0,014</b>	1,316	11,444
<b>SEXO-1</b>	0,000	0,000				

Tabla 3. Base de datos

PESO	ESTATURA	EJERCICIO	SEXO
80	1,81	0	0
75	1,79	0	0
68	1,76	0	0
80	1,76	0	0
87	1,84	0	0
75,3	1,76	0	0
87	1,7	0	0
52	1,54	0	0
52	1,5	0	0
88	1,83	0	0
68,5	1,75	0	0
89,2	1,82	0	0
74	1,72	0	0
72	1,71	0	0
78	1,72	0	0
85	1,81	0	0
84	1,76	0	0
60	1,65	0	0
64	1,66	0	0
77	1,68	0	0
89	1,91	0	0
60	1,62	0	1
56	1,66	0	1

45,7	1,68	0	1
60	1,6	0	1
60	1,53	0	1
78	1,68	0	1
49	1,5	0	1
69	1,69	0	1
62	1,7	0	1
85	1,67	0	1
49	1,5	0	1
51,1	1,61	0	1
74	1,66	0	1
56	1,62	0	1
79	1,9	0	1
83,3	1,9	0	1
76	1,68	0	1
72	1,6	0	1
55	1,72	0	1
67	1,63	0	1
63	1,63	0	1
60	1,54	0	1
68	1,69	0	1
73	1,76	1	0
60	1,76	1	0
62,5	1,73	1	0
65	1,69	1	0
98,2	1,7	1	0
61	1,76	1	0
81	1,64	1	0
84,5	1,77	1	0
58,2	1,66	1	0
101	1,76	1	0
60	1,71	1	0
75	1,75	1	0
68	1,5	1	0
78,5	1,82	1	0
75	1,78	1	0
58	1,72	1	1
48,5	1,54	1	1
55,7	1,58	1	1
46,7	1,6	1	1
57,4	1,54	1	1
54	1,68	1	1
52,6	1,66	1	1
64,5	1,61	1	1
65	1,57	1	1

<b>60</b>	1,62	1	1
<b>75</b>	1,75	1	1

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 6

### BIOMASA

Yarim Alberto Vargas Flores, Fernando Fidel Ruiz Pérez, José Mario García Escobedo, José Francisco Hernández Castro, Víctor Hugo Cortez Quiñonez. Asesor: Saúl Nevárez Nieto. Contacto: *yalvafl\_27@hotmail.com*

Facultad de Ciencias Exactas

*yalvafl\_27@hotmail.com, fefy\_chapis@hotmail.com*

Licenciatura

Energía, Materia orgánica, especies de árboles

La biomasa es toda aquella materia orgánica disponible en el entorno, y susceptible de ser energía, gracias a las grandes extensiones de tierra que existe en Durango, además de las diferentes especies de flora que crecen en las sierras, es posible pensar en aprovechar la materia que se deshecha, o incluso cultivar alguna especie que tenga mejores resultados desprendiendo energía, el propósito es encontrar dicha especie, si es que la hay, y las características que favorezcan los propósitos de la investigación.

#### Introducción:

En este documento se presentan los resultados de un experimento en el que, mediante la quema de materiales orgánicos, se recopiló una base de datos de los diferentes componentes y variables de interés, el experimento consistió en, mediante una bomba de calor, medir la energía desprendida por diferentes especies de árboles en algunos sectores de Durango, el objetivo es saber cuál especie era la más apta para generar energía, con miras a convertir la materia de esta en biomasa.

Se tuvo la colaboración de docentes de la Facultad de Ciencias Químicas, quienes nos brindaron la base de datos para analizarlos y hacer las pruebas correspondientes, al igual que la ayuda de la maestra Rosa Angélica Zamora Ríos quien nos dio su apoyo sacándonos de problemas a la hora de estar haciendo las pruebas correspondientes.

#### Marco teórico:

La biomasa es toda aquella materia orgánica en el ambiente, muchas veces es susceptible de ser aprovechada energéticamente.

-¿Cómo funciona? Las plantas transforman la energía del sol en energía a través de la fotosíntesis, y parte de esta energía queda almacenada en forma de materia orgánica. La fotosíntesis es el proceso por el cual las células vegetales son capaces de formar sustancias orgánicas a partir del dióxido de carbono  $\text{CO}_2$  presente en el aire y de otras sustancias simples, y así formar otras sustancias tales como los carbohidratos, de los cuales se puede extraer energía quemándolas directamente o bien convirtiéndolas en un líquido combustible como el alcohol o el aceite o incluso transformándolas en gas.

-¿Para qué se utiliza? Generalmente para generar calor, y electricidad en la industria, aunque es un proceso más laborioso. Se pueden instalar calderas de biomasa en las viviendas, para obtener calefacción y calentar agua.

La biomasa que podemos usar como fuente de energía se encuentra principalmente, de dos formas, como cultivos con un aprovechamiento claramente orientado a la producción de energía, o como un residuo de los trabajos forestales y agrícolas, o de sus industrias asociadas.

Para facilitar la lectura del artículo son útiles las siguientes definiciones:

**Cultivos energéticos:** Las plantas que se cultivan con el fin de convertirlas en energía se llaman cultivos energéticos y como hay tantas plantas distintas pueden ser de tantas formas como uno se pueda imaginar. En la práctica, los cultivos energéticos se adaptan al clima y al suelo de cada lugar y así en lugares como los países nórdicos hay bosques orientados a producir madera que se quema en centrales eléctricas, mientras que en nuestras latitudes los cultivos energéticos se orientan a plantas herbáceas. Así, por ejemplo, cereales y oleaginosas como la colza son cultivados de forma expresa con el objetivo de producir, respectivamente, alcohol o aceite, que tras un tratamiento podrán ser empleados en motores de automóviles.

La mayoría de las plantas tienen un fin que no es el energético como por ejemplo alimentar el ganado o producir madera para los muebles. Pero de todos esos procesos siempre se genera un residuo que sí tiene un aprovechamiento energético, estos pueden ser:

**Residuos forestales:** los residuos de nuestros bosques son una fuente muy importante de recursos de biomasa. Entre ellos se encuentran restos de las podas, serrín, virutas, recortes y cortezas, que se generan tanto en el campo como en las industrias donde se aprovecha la madera, que son las principales consumidoras de este recurso con fines energéticos.

**Residuos agrícolas:** son de muchos tipos, desde las podas de olivos, vides y frutales hasta los residuos de cultivos herbáceos, como la paja de cereales. Parte de estos residuos se queda en el campo, para recuperar los nutrientes de la tierra, pero otra parte puede ser usada como combustible.

Por otra parte, los usos de los diferentes tipos de biomasa se pueden clasificar principalmente en dos: térmicos y eléctricos.

El uso eléctrico de la biomasa es la obtención de energía eléctrica a través de la quema de biomasa sólida, se realiza generalmente a gran escala, esto es debido principalmente a que las instalaciones necesarias requieren una gran inversión económica, además, los rendimientos globales obtenidos son mayores cuanto mayor sea la potencia generada.

El funcionamiento de una planta de biomasa para la generación de energía eléctrica consiste en la recepción de la biomasa, generalmente en forma de alpacas (paja ó astillas), posteriormente se colocan automáticamente en una cinta transportadora, que las conduce hasta la caldera. Allí, previamente desmenuzadas, caen a una parrilla vibratoria que favorece la combustión y la evacuación de inquemados. Dicha combustión calienta el agua que circula por las tuberías de las paredes de la caldera y por haces de tubos en el interior de la misma convirtiéndola en vapor sobrecalentado.

El vapor sobrecalentado mueve una turbina conectada a un generador que produce electricidad a una tensión determinada, transformándola posteriormente a otra tensión mayor para su incorporación a la red general.



Por último, los inquemados depositados en el fondo de la caldera, se trasladan a un vertedero autorizado, y las cenizas volantes, retenidas por un filtro, se aprovechan para fertilizantes agrícolas.

El uso térmico de la biomasa se refiere a la obtención de energía térmica a través de la quema de biomasa sólida se realiza con diferentes propósitos. Las aplicaciones térmicas con producción de calor y agua caliente sanitaria son las más comunes dentro del sector de la biomasa, aunque también es posible la producción de frío, esta última opción es más excepcional.

Las aplicaciones térmicas más comunes de la biomasa son en instalaciones industriales que producen biomasa y donde se requiere energía térmica en sus procesos. Sin embargo, también existen las instalaciones del sector doméstico y de servicios con elevada centralización, puesto que el coste de la instalación por unidad de energía producida disminuye significativamente con el tamaño de la misma. Entre otros casos en que las instalaciones de biomasa son rentables para el promotor y para el usuario.

También se puede hablar de un uso simultáneo térmico-eléctrico, en la actualidad, existen procesos para obtener simultáneamente energía térmica y eléctrica, con ello se optimiza el proceso obteniendo mayores rendimientos. Estos procesos se conocen con los nombres de Cogeneración y trigeneración. De hecho, el óptimo aprovechamiento de la biomasa es en este tipo de procesos, de cogeneración y trigeneración donde se obtienen producciones eléctricas este el 15 y el 20% y aprovechamientos térmicos que alcanzan una eficiencia total del 80%.

Planteamiento del problema:

Debido a la ubicación geográfica de Durango, es factible pensar en la producción de energía a partir de biomasa, en las sierras se pueden encontrar grandes extensiones de tierra repletas de desechos biológicos, además de pinos, coníferas, entre otros tipos de plantas que fácilmente pueden ser usados para la producción de biomasa.

El experimento se hizo en la Facultad de Ciencias Químicas, con ayuda de material y equipo proporcionado por dicha escuela, obtuvieron el índice de la energía que desprenden al quemarse 11 especies de árboles de Durango, y los dividieron por componente rama, corteza y tronco, se tomaron en cuenta la composición de agua, carbón y volátiles presentes en los diferentes componentes además de la ceniza desprendida, todo con la finalidad de obtener la mayor información posible sobre la especie con mejores condiciones para generar biomasa, para ello se tomaron 9 muestras de las 11 especies, 3 de cada componente, dando un total de 297 datos a evaluar.

El objetivo es en base a las pruebas determinar si es que existe diferencia entre las especies y/o componentes, además de verificar si existen relaciones entre algunas características del árbol, tales como el contenido en por ciento, de agua, volátiles y carbón en la composición del árbol y así identificar la especie con mejores condiciones para la obtención de energía.

Metodología:

El propósito del estudio es encontrar la especie y/o el componente que más energía libere, por lo tanto, es factible pensar en hacer una prueba ANOVA para encontrar si existe diferencia significativa entre los diferentes grupos, ya sea de especie o componente, para eso se llevó a cabo una prueba de normalidad, la cual establece lo siguiente:

La Prueba de normalidad genera una gráfica de probabilidad normal y realiza una prueba de hipótesis para examinar si las observaciones siguen o no una distribución normal.

Para esta prueba las hipótesis son:

H0: los datos siguen una distribución normal

H1: los datos no siguen una distribución normal

Lo más práctico es interpretarlo a partir del Valor de P, la regla práctica es que si dicho valor es mayor al nivel de prueba se acepta que los datos siguen una distribución normal.

Debido a la no normalidad de los datos (ver resultados), con los que se estuvo trabajando nos vimos obligados a trabajar con pruebas no paramétricas, y recurrimos a la prueba de Kruskal-Wallis y Jonckheere-Terpstra para comparar las medias y saber si existía diferencia entre los grupos, estas pruebas suponen lo siguiente:

La prueba de Kruskal-Wallis es el método más adecuado para comparar poblaciones cuyas distribuciones no son normales. Incluso cuando las poblaciones son normales, este contraste funciona muy bien. También es adecuado cuando las desviaciones típicas de los diferentes grupos no son iguales entre sí,

La hipótesis de la prueba de Kruskal-Wallis son:

H0: Las k medianas son todas iguales.

H1: Al menos una de las medianas es diferente.

Jonckheere-Terpstra: esta prueba sirve para el mismo propósito que la prueba de Kruskal Wallis, pero además ofrece un ordenamiento de los grupos de variables de acuerdo a su mediana.

H0: Las medianas son todas iguales

H1: Hay diferencia entre las medianas y se acomodan de la siguiente manera

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$$

Por último, se buscó si existía asociación y correlación entre el porcentaje de composición en agua, carbón, y volátiles con la energía desprendida, estas pruebas suponen lo siguiente:

Prueba de Correlación: La correlación de Spearman mide el grado de asociación entre dos variables cuantitativas que siguen una tendencia siempre creciente o siempre decreciente. Es más general que el Coeficiente de correlación de Pearson, la correlación de Spearman, en cambio se puede calcular para relaciones exponenciales o logarítmicas entre las variables.

H0: No hay relación entre las variables

H1: Hay relación entre las variables

Prueba de asociación:

H0: No hay asociación entre las variables

H1: Hay asociación entre las variables

Resultados:

Se comenzó por hacer una prueba de normalidad a las diferentes variables de interés en todos los casos excepto en el componente de agua, se obtuvo de los datos que no se comportan de manera normal al contrastar el valor de p, solo en el componente agua era mayor que el alfa 05, por lo tanto, se aceptó la hipótesis alternativa que las variables no se comportaban de manera normal, el resumen de la prueba se presenta a continuación.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		podercalorific o	ch	cv	carbon	cenizas	energia
N		297	297	297	297	297	297
Parámetros normales <sup>a,b</sup>	Media	4619,799697	4,9710	46,8692	38,0991	2,7950	19,3384
	Desviación estándar	320,1013744	,88263	14,55490	14,55666	1,41140	1,33829
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,185	,040	,159	,191	,059	,191
	Positivo	,141	,040	,140	,091	,052	,147
	Negativo	-,185	-,028	-,159	-,191	-,059	-,191
Estadístico de prueba		,185	,040	,159	,191	,059	,191
Sig. asintótica (bilateral)		,000 <sup>c</sup>	,200 <sup>e,d</sup>	,000 <sup>c</sup>	,000 <sup>c</sup>	,015 <sup>c</sup>	,000 <sup>c</sup>

En vista del comportamiento de los datos tuvimos que analizarlos haciendo uso de pruebas no paramétricas tales como la Kruskal Wallis y Jonhcehere Terpstra, en donde se usaron como factores de agrupación la especie y el componente dando como resultados la siguiente:

En esta prueba como podemos notar se utilizó como factor de agrupamiento la especie, que en total son 11, a cada una se le asignó un número del 1 al 11, en este caso se rechaza la hipótesis nula por lo tanto existe diferencia entre los grupos de especies y además de que las medianas se distribuyen de acuerdo a la prueba de Terpstra, obteniendo que la numero 9 P. ocarpa presenta mayor diferencia con respecto a las demás.

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de energía es la misma entre las categorías de componente.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,000	Rechace la hipótesis nula.
2	La distribución de energía es la misma entre las categorías de componente.	Prueba de Jonckheere-Terpstra de alternativas ordenadas para muestras independientes	,011	Rechace la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

A continuación, se procedió a hacer las mismas dos pruebas, pero en esta ocasión el factor de componente del árbol (raíz, tronco, corteza) y si obtiene los siguientes resultados que se

muestran en la tabla de abajo, para esta prueba se rechazó la hipótesis nula por lo tanto existe diferencia entre los grupos de componente del árbol.

### Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de Energia es la misma entre las categorías de Componente.	Prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes	,001	Rechaza la hipótesis nula.
2	La distribución de Energia es la misma entre las categorías de Componente.	Prueba de Jonckheere-Terpstra de alternativas ordenadas para muestras independientes	,000	Rechaza la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

Por último, se hizo pruebas de correlación y asociación no paramétricas entre el porcentaje de composición de agua, volátiles, carbón y restos de ceniza con respecto a la energía desprendida en búsqueda de encontrar si es que alguno de estos factores incide en la energía liberada.

Las pruebas de asociación y correlación arrojaron, en resumen, que existe una débil correlación negativa y asociación entre los volátiles y la energía que se desprende, además de una débil asociación positiva entre la composición de carbón y la energía desprendida, en cambio no existe correlación y asociación con la variable del resto de cenizas, y existe una correlación aún más débil entre la composición de agua y la energía que desprende, el resumen de las pruebas se presenta a continuación

Prueba para el carbón:

#### Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (2 caras)
Chi-cuadrado de Pearson	11568,646 <sup>a</sup>	11308	,042
Razón de verosimilitud	1891,142	11308	1,000
Asociación lineal por lineal	,199	1	,655
N de casos válidos	297		

a. 11610 casillas (100,0%) han esperado un recuento menor que 5. El recuento mínimo esperado es ,00.

#### Medidas simétricas

	Valor	Error estándar asintótico <sup>a</sup>	Aprox. S <sup>b</sup>	Aprox. Sig.	
Intervalo por intervalo	R de persona	-,026	,070	-,446	,656 <sup>c</sup>
Ordinal por ordinal	Correlación de Spearman	,156	,056	2,708	,007 <sup>c</sup>
N de casos válidos	297				

a. No se supone la hipótesis nula.

b. Utilización del error estándar asintótico que asume la hipótesis nula.

Prueba para las cenizas.

## Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (2 caras)
Chi-cuadrado de Pearson	8950,281 <sup>a</sup>	8844	,212
Razón de verosimilitud	1710,852	8844	1,000
Asociación lineal por lineal	1,114	1	,291
N de casos válidos	297		

a. 9090 casillas (100,0%) han esperado un recuento menor que 5. El recuento mínimo esperado es ,00.

## Medidas simétricas

		Valor	Error estándar asintótico <sup>a</sup>	Aprox. S <sup>b</sup>	Aprox. Sig.
Intervalo por intervalo	R de persona	,061	,038	1,056	,292 <sup>c</sup>
Ordinal por ordinal	Correlación de Spearman	,049	,060	,834	,405 <sup>c</sup>
N de casos válidos		297			

a. No se supone la hipótesis nula.

b. Utilización del error estándar asintótico que asume la hipótesis nula.

c. Se basa en aproximación normal.

## Prueba para el porcentaje de agua.

## Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (2 caras)
Chi-cuadrado de Pearson	8018,232 <sup>a</sup>	7480	,000
Razón de verosimilitud	1602,492	7480	1,000
Asociación lineal por lineal	2,713	1	,100
N de casos válidos	297		

a. 7695 casillas (100,0%) han esperado un recuento menor que 5. El recuento mínimo esperado es ,00.

## Medidas simétricas

		Valor	Error estándar asintótico <sup>a</sup>	Aprox. S <sup>b</sup>	Aprox. Sig.
Intervalo por intervalo	R de persona	,096	,046	1,652	,100 <sup>c</sup>
Ordinal por ordinal	Correlación de Spearman	,082	,061	1,411	,159 <sup>c</sup>
N de casos válidos		297			

a. No se supone la hipótesis nula.

b. Utilización del error estándar asintótico que asume la hipótesis nula.

## Prueba para el porcentaje de volátiles.

## Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (2 caras)
Chi-cuadrado de Pearson	11258,502 <sup>a</sup>	11000	,041
Razón de verosimilitud	1881,778	11000	1,000
Asociación lineal por lineal	,159	1	,690
N de casos válidos	297		

a. 11295 casillas (100,0%) han esperado un recuento menor que 5. El recuento mínimo esperado es ,00.

## Medidas simétricas

	Valor	Error estándar asintótico <sup>a</sup>	Aprox. S <sup>b</sup>	Aprox. Sig.
Intervalo por intervalo R de persona	-,023	,060	-,398	,691 <sup>c</sup>
Ordinal por ordinal Correlación de Spearman	-,184	,057	-3,216	,001 <sup>c</sup>
N de casos válidos	297			

a. No se supone la hipótesis nula.

b. Utilización del error estándar asintótico que asume la hipótesis nula.

En vista que existía asociación y correlación entre los volátiles y la energía, y el carbón con la energía, se decidió aplicar una prueba de Kruskal Wallis para saber si existía diferencia entre los grupos, pero se encontró que no la hay, la distribución de carbón y volátiles es la misma entre las 11 especies, por tanto no se puede hablar de una especie o componente con mejores características en cuanto a estos factores.

## Conclusiones:

En base a las pruebas realizadas se encuentra con que, de entre las 11 especies existe diferencia en la distribución, *P. ocarpa* es la especie que más energía desprende, por lo que sería lógico pensar en cultivar más de este tipo de especie, además de que el componente corteza presenta las mejores características para generar energía, esto quiere decir que arboles con mayor edad o incluso ya muertos pueden servir mejor, por ultimo de acuerdo a las pruebas de asociación los mejores candidatos presentan una composición abundante en cuanto a carbón, troncos y cortezas de gran tamaño, y poca presencia de componentes volátiles tales como la savia.

## Referencias:

José M. Fernández Salgado (2010). Guía completa de la biomasa y los biocombustibles. Editor Antonio Madrid Vicente.

<http://www.solarizate.org/pdf/castellano/fichasalumnos/ficha11.pdf>

[http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/D\\_departamento/materiales/analisis\\_datosyMultivariable/19nparam\\_SPSS.pdf](http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/D_departamento/materiales/analisis_datosyMultivariable/19nparam_SPSS.pdf)

[http://www.uv.es/innomide/spss/SPSS/SPSS\\_0802A.pdf](http://www.uv.es/innomide/spss/SPSS/SPSS_0802A.pdf)

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 7

### COMPARACIÓN DEL PH EN DISTINTAS MARCAS DE REFRESCOS

Franci del Rocio Almeida Torres, Brianda Estefanía Sáenz Fuentes, Eduardo Reza Gurrola.  
Asesores: Dr. Saúl Nevárez Nieto, Dr. Raúl Olvera. Contacto: *eduardoreza@hotmail.com*  
Facultad de Ciencias Exactas  
*franci\_z56@hotmail.com, esteff.saenz@gmail.com, eduardoreza@hotmail.com*  
Licenciatura  
CO<sub>2</sub>, PH, refresco

#### RESUMEN

La liberación de dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) al ambiente por parte de un refresco es un proceso químico que afecta su nivel de PH, se dice que entre más CO<sub>2</sub> se desprenda más alto será dicho nivel y más dulce será su sabor. En este trabajo de investigación se medirá con un potenciómetro el nivel de PH de 8 marcas de refrescos en intervalos de 3 minutos, y a través de pruebas estadísticas se podrá dar solución a las siguientes preguntas: ¿La marca o el sabor influyen en el valor del PH? ¿Cuál marca desprende más rápido el CO<sub>2</sub>?

#### INTRODUCCIÓN

El pH llamado potencial de hidrogeno es una medida de la acidez o la alcalinidad de una solución.

El pH representa el nivel en que una sustancia es ácido o base. Una bebida con el pH de cero a siete es un ácido y con un pH de siete a catorce es una base. Cuanto más extremo sea el nivel de pH, mas acida o básica es la sustancia.

La medición del pH de los alimentos es de gran importancia tanto en el producto final como durante el control de los diversos procesos de calidad.

El pH determinara que tipo de microorganismos son capaces de crecer en él. La mayoría de los alimentos son naturalmente ácidos, ya que sus valores de pH son menores de 7.

En la medida que el valor de pH de los alimentos disminuye (son más ácidos), los microorganismos tienen condiciones más difíciles de sobrevivir y crecer.

#### MARCO TEÓRICO

##### EL pH

Las propiedades ácido–básicas de los compuestos orgánicos son importantes para su función en los seres vivos; desde su distribución hasta su destino metabólico son determinados por el carácter ácido o básico, además la acidez del medio en que se encuentran también tiene efecto sobre ellos.

La acidez o alcalinidad de una solución están determinadas por la concentración de iones de hidrogeno (H<sup>+</sup>). En la mayor parte de las sustancias naturales comunes, estas concentraciones son muy bajas y resulta difícil expresarlas en forma decimal o exponencial



por lo que se emplea una transformación logarítmica de la concentración molar de protones a la que se denomina pH y se define como:

$$\text{pH} = \log \frac{1}{[\text{H}^+]} = -\log[\text{H}^+]$$

Como resultado de esta transformación, los números fraccionarios se convierten en números con enteros positivos, y como es inversa, mientras mayor es la concentración de  $\text{H}^+$ , el valor del pH es menor. Hoy en día el pH es la forma más común de expresar la acidez y la alcalinidad.

La concentración de  $\text{H}^+$  se puede medir directamente y se puede expresar en moles/litro, pero en la mayoría de los laboratorios se deduce la cantidad de  $\text{H}^+$  por comparación de la muestra estudiada con soluciones reguladoras de concentración conocida y el resultado se expresa en unidades de pH.

Esta relación se resume en la siguiente tabla:

Reacción	pH	$[\text{H}^+] \times 10^7$	$[\text{OH}^-] \times 10^7$	pOH	Ejemplos
Ácida	0	1	0.000 000 000 000 01	14	Ácido sulfúrico concentrado
	1	0.1	0.000 000 000 000 1	13	Ácido. Clorhídrico
	2	0.01	0.000 000 000 001	12	Jugo de Limón, Jugo gástrico
	3	0.001	0.000 000 000 01	11	Jugo de Naranja
	4	0.000 1	0.000 000 000 1	10	Lluvia ácida
	5	0.000 01	0.000 000 001	9	Café negro
	6	0.000 001	0.000 000 01	8	Orina, saliva
Neutra	7	0.000 000 1	0.000 000 1	7	Agua pura
Básica	8	0.000 000 01	0.000 001	6	Agua de mar
	9	0.000 000 001	0.000 01	5	Polvo de hornear
	10	0.000 000 000 1	0.000 1	4	Leche de magnesia
	11	0.000 000 000 01	0.001	3	Limpiadores caseros
	12	0.000 000 000 001	0.01	2	Agua de jabón
	13	0.000 000 000 000 1	0.1	1	Limpiadores de hornos
	14	0.000 000 000 000 01	1	0	Sosa cáustica

Fuente: Velázquez M & Ordorica M. (2009). *Ácidos, Bases, pH y Soluciones Reguladoras*. Mayo 03, 2017, de bioquímica dogsleep Sitio web: <http://www.bioquimica.dogsleep.net/Teoria/archivos/Unidad24.pdf>

En esta tabla resaltan algunas propiedades importantes del pH.

- Varía en forma inversa a la concentración de protones, a mayor concentración, mayor acidez, pero menor valor de pH.
- Es logarítmica, o sea un cambio de una unidad de pH, representa un cambio de diez veces en la concentración de protones
- El pH y el pOH son complementarios y en las soluciones acuosas deben sumar 14.

Medición de PH

Existen dos métodos para medir el pH de una sustancia, el colorimétrico y el potenciométrico. En ambos se usan soluciones de pH conocido que se comparan con soluciones problema. La diferencia radica en el método de comparación y la característica comparada

**Método Colorimétrico:**

Es el más sencillo pero no el más exacto. Está basado en el uso de sustancias llamadas indicadores. Los indicadores de pH son ácidos, bases o sales orgánicas, cuyas moléculas tienen un color cuando están disociadas y otro cuando están protonadas.

**Método Potenciométrico.**

El método potenciométrico se basa en la medición de la diferencia de potencial generado en las llamadas pilas o celdas de concentración. Al introducir un trozo de metal en una solución del mismo, los iones metálicos de la solución tienden a depositarse en el sólido y los átomos del sólido tienden a pasar a la solución. Por el mismo diseño del sistema, la concentración del metal en el sólido y la solución son diferentes y por tal motivo, la cantidad de átomos que entran y salen de la solución es diferente, esto genera una diferencia de potencial que es proporcional a la diferencia de concentración. Midiendo las diferencias de potencial en soluciones de concentración conocida, se calibra el aparato de medición para después determinar la concentración de la solución problema, midiendo su potencial. Para medir la concentración de protones, se usan electrodos que contienen sustancias capaces de intercambiarlos con el medio, estableciendo la diferencia de potencial.

**Soluciones reguladoras.**

Una solución reguladora, buffer o tampón, está formada por un ácido o base débil y su par conjugado correspondiente:



Esta combinación tiene la capacidad de minimizar el efecto de la adición o eliminación de  $\text{H}^+$  del medio. Cuando se agrega un ácido fuerte, la base conjugada reacciona con los  $\text{H}^+$ , aumentando la cantidad del ácido conjugado, pero como este es un ácido débil, se disocia poco y el pH del medio no cambia en forma importante. Si se añade una base fuerte, esta es neutralizada por el ácido débil que se transforma en su base conjugada más débil que la original, amortiguando el cambio de pH.

**Refresco.**

La gaseosa, refresco o bebida carbonatada, es una bebida saborizada, efervescente (carbonatada) y sin alcohol. Estas bebidas suelen consumirse frías para ser más refrescantes y para evitar la pérdida de dióxido de carbono, el cual le otorga la efervescencia. El agua con dióxido de carbono produce un equilibrio químico con el ácido carbónico.

Algunos de los ingredientes más comunes son: agua carbonatada —base esencial para la producción de cualquier gaseosa, en grandes fábricas primero de desmineraliza el agua y luego se le agregan minerales en cantidades predeterminadas—, aditivos, edulcorantes —le confieren un sabor dulce y podríamos separarlos en tres clases: naturales: sacarosa (azúcar de mesa) y fructosa, sintéticos (más baratos, pero pueden tener sabores no muy agradables (ciclato (E 952), acesulfamo K (E 950), aspartamo (E 951), etc.) y naturales, pero que no aportan glucosa—, acidulantes —proporcionan la acidez adecuada (ácido cítrico, ácido

fosfórico)—, estabilizantes de la acidez, colorantes, aromatizantes, conservantes, antioxidantes y espesante.

Composición nutricional:

	Por 100 g de porción comestible	Por vaso (200 g)	Recomendaciones día-hombres	Recomendaciones día-mujeres
<b>Energía (Kcal)</b>	42	84	3.000	2.300
<b>Proteínas (g)</b>	Tr	Tr	54	41
<b>Lípidos totales (g)</b>	0	0	100-117	77-89
AG saturados (g)	0	0	23-27	18-20
AG monoinsaturados (g)	0	0	67	51
AG poliinsaturados (g)	0	0	17	13
$\omega$ -3 (g)	0	0	3,3-6,6	2,6-5,1
C18:2 Linoleico ( $\omega$ -6) (g)	0	0	10	8
Colesterol (mg/1000 kcal)	0	0	<300	<230
<b>Hidratos de carbono (g)</b>	10,5	21,0	375-413	288-316
<b>Fibra (g)</b>	0	0	>35	>25
<b>Agua (g)</b>	89,5	179	2.500	2.000
<b>Calcio (mg)</b>	4	8,0	1.000	1.000
<b>Hierro (mg)</b>	Tr	Tr	10	18
<b>Yodo (<math>\mu</math>g)</b>	—	—	140	110
<b>Magnesio (mg)</b>	1	2,0	350	330
<b>Zinc (mg)</b>	Tr	Tr	15	15
<b>Sodio (mg)</b>	8	16,0	<2.000	<2.000
<b>Potasio (mg)</b>	1	2,0	3.500	3.500
<b>Fósforo (mg)</b>	15	30,0	700	700
<b>Selenio (<math>\mu</math>g)</b>	0	0	70	55
<b>Tiamina (mg)</b>	0	0	1,2	0,9
<b>Riboflavina (mg)</b>	0	0	1,8	1,4
<b>Equivalentes niacina (mg)</b>	0	0	20	15
<b>Vitamina B<sub>6</sub> (mg)</b>	—	—	1,8	1,6
<b>Folatos (<math>\mu</math>g)</b>	0	0	400	400
<b>Vitamina B<sub>12</sub> (<math>\mu</math>g)</b>	0	0	2	2
<b>Vitamina C (mg)</b>	0	0	60	60
<b>Vitamina A: Eq. Retinol (<math>\mu</math>g)</b>	0	0	1.000	800
<b>Vitamina D (<math>\mu</math>g)</b>	0	0	15	15
<b>Vitamina E (mg)</b>	—	—	12	12

Tablas de Composición de Alimentos. Moreira y col., 2013. (GASEOSAS). Recomendaciones:   Ingestas Recomendadas/día para hombres y mujeres de 20 a 39 años con una actividad física moderada. Recomendaciones:   Objetivos nutricionales/día. Consenso de la Sociedad Española de Nutrición Comunitaria, 2011. Recomendaciones:   Ingestas Dietéticas de Referencia (EFSA, 2010). 0: Virtualmente ausente en el alimento. —: Dato no disponible. Tr: Trazas.

Refresco de 600 ml	Gramos de azúcar	Cucharadas de azúcar
7 up	70 g	14
Coca Cola	63 gr	12
Delaware Punch	75 g	15
Dr. Pepper	62.4 g	12.48
Fanta	56 g	11

Refresco de 600 ml	Gramos de azúcar	Cucharadas de azúcar
Fanta sabor fresa	78 g	15.6
Fresca	53 g	10.6
Fuze tea	75 g	15
Mirinda	78 g	15.6
Orange Crush	21.3 g	4 *contiene sucralosa
Peñafiel sabor fresa	27.5 g	5.5 *contiene sucralosa
Pepsi	68 g	13.6
Sangría Señorial	66 g	13.2
Senzao Guaraná	63 gr	12
Sidral Mundet	60 g	12
Sprite	54 g	10

*Cantidad de azúcar en los refrescos mas comunes*, alianza salud. Sitio web:  
<http://alianzasalud.org.mx/2013/05/cantidad-de-azucar-en-los-refrescos-mas-comunes/>

Componentes ácidos de los refrescos

Ácido carbónico: Su estado de agregación es líquido e incoloro. Este ácido opera como buffer en la solución lograda para sanitizar el agua cuando es el único medio operante.

Ácido fosfórico: Es el acidulante más económico, y también porque es muy potente.

Ácido málico: Retarda la aparición de acidez, adicionalmente mejora el perfil de sabor de los edulcorantes artificiales.

Ácido tartárico: Es el acidificante y conservante natural que puede usarse como corrector de la acidez

Ácido cítrico: Este ácido se extrae de los frutos cítricos por lo que todas las bebidas que tienen sabores como limón, lima y piña, se acidifican con dicho ácido, que se usa en una solución de 48%

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿El tiempo que se deja destapado el refresco y su marca son factores que afectan su contenido de PH?

Justificación. El comprobar estadísticamente que a medida que el gas se desprende del refresco, el PH del mismo aumentará, es uno de los intereses científicos que más nos lleva a realizar esta investigación, a los muchos consumidores de bebidas gasificadas debería de

interesarles cual es la marca del refresco cuya cantidad de gas tarde más en volatizarse, el conocer eso les ayudará a una mejor selección de sus bebidas.

Hipótesis:

Las hipótesis de este trabajo son planteadas de la siguiente manera:

El tiempo que se deja destapado el refresco es un factor que altere el PH del mismo.

La marca del refresco es un factor que afecte su contenido de pH. Objetivos.

Generales:

Analizar si el tiempo y la marca afecta la variabilidad del PH en un refresco

Particulares

Comparar la variabilidad en el PH de los principales refrescos producidos por las compañías PEPSI y Coca Cola Company.

Aproximar el tiempo en que tarda en desprenderse el CO<sub>2</sub> del refresco.

Demostrar si existe una diferencia significativa entre el PH promedio de los refrescos de cola y otros sabores.

## METODOLOGÍA

Método a aplicar en la investigación:

En esta investigación el método que se utilizó para el desarrollo de esta fue el Método Cuantitativo, ya que este método se vale de la recolección de datos para probar hipótesis, (este) se basa en la medición numérica y el análisis del tipo estadístico para establecer patrones de comportamiento y probar teorías. Utilizamos este método, como es en nuestro caso, esto porque para aceptar o rechazar nuestra hipótesis se tuvo que medir el PH de una variedad de refrescos de marca a través del tiempo, y con ellos realizar pruebas estadísticas.

Instrumentos y materiales

Un potenciómetro

Tres cronómetros

8 vasos de precipitado

Agua destilada

8 botellas con refresco de 600 ml a temperatura ambiente.

Gasas

Muestreo

La manera de elegir los refrescos fue a convención, ya que, esos refrescos fueron adquiridos en un establecimiento que estaba al alcance de las posibilidades.

Desarrollo del experimento:

El lugar en el que se llevó a cabo el experimento fue en el laboratorio de prácticas generales en la Facultad de Ciencias Químicas de la UJED, esto garantiza que las condiciones del lugar sean las ideales para realizar cualquier experimento.

Se tiene que para exista cierta homogeneidad en las muestras, todos los refrescos sin excepción, fueran de la misma presentación, en este caso por ser la más consumida decidimos tomar refrescos en botella no retornable de 600 ml, todas a temperatura ambiente y lo menos agitados posible. Otra de las condiciones del experimento fue que se midiera el PH de un mismo volumen de bebida. A continuación se presentan los pasos que se siguieron en el desarrollo del experimento:

1. Se vertió en un vaso de precipitado la cantidad de 40 ml de un refresco (Coca-Cola)
2. Rápidamente se activó uno de los cronómetros
3. En el instante en que el cronometro comenzó a correr se introdujo el electrodo del potenciómetro y se anotó la medida de pH que indico.
4. Se limpió con agua destilada el electrodo y se secó con una gasa.
5. Con 1 minuto transcurrido después de haber tomado la medición al refresco 1, se vertió en un segundo vaso la misma cantidad antes señalada de refresco 2 (PEPSI).
6. Rápidamente se activó el segundo cronometro.
7. A la par se le tomó la medida de pH al refresco dos y se anotó.
8. Se enjuagó y secó el electrodo del potenciómetro.
9. Transcurrido un minuto se vertió en un tercer vaso se precipitado la misma cantidad antes mencionada del refresco 3 (Sprite).
10. Se activó el tercer y último cronómetro.
11. Se tomó y anotó la medida del pH indicada por el potenciómetro.
12. Se limpió debidamente el electrodo.
13. Un minuto después se le tomó una segunda medida del pH al refresco 1.
14. Se limpió el electrodo.
15. Un minuto después se midió y anotó el pH del refresco 2.
16. Se limpió el electrodo de forma adecuada.
17. Un minuto después se le midió el pH al refresco 3.
18. Se limpió debidamente el electrodo.
19. Se repitió a partir del paso 13 de tal manera que se completaran 6 mediciones para cada uno de los refrescos hasta ahora vaciados en los vasos.

Después se hizo lo mismo con otros tres refrescos (7up, Fanta y Mirinda),y por último, con los dos restantes (Manzanita y Lift). Se llenaron los datos recaudados en una tabla como la que se muestra a continuación:

Marca	Tiempo					
	0	3	6	9	12	15
Coca-Cola	2.64	2.86	2.98	3.11	3.2	3.26
PEPSI	2.61	2.7	2.8	2.93	3.02	3.12
Sprite	3.53	3.62	3.72	3.8	3.84	3.87
7up	3.3	3.4	3.6	3.74	3.79	3.83
Fanta	3.22	3.5	3.69	3.87	3.95	3.41
Mirinda	2.8	2.91	3.04	3.13	3.21	3.23
Manzanita	3.06	3.15	3.21	3.35	3.42	3.47

	Tiempo					
Marca	0	3	6	9	12	15
Lift	3.1	3.24	3.3	3.4	3.56	3.6

El tiempo se toma en base los minutos que han pasado desde que se vació el respectivo refresco en su correspondiente

## RESULTADOS

Realizaremos una prueba de normalidad para revisar si los datos obtenidos cumplen una distribución normal:

Pruebas de normalidad

	Marca	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
PH	COCA	.169	6	.200*	.951	6	.745
	PEPSI	.134	6	.200*	.971	6	.899
	SPRITE	.200	6	.200*	.930	6	.583
	7UP	.224	6	.200*	.899	6	.569
	FANTA	.159	6	.200*	.961	6	.831
	MIRINDA	.173	6	.200*	.927	6	.560
	MANZANI TA	.175	6	.200*	.947	6	.712
	LIFT	.176	6	.200*	.957	6	.793

\*. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

Corrección de significación de Lilliefors

Observamos que nuestros datos correspondientes al pH de los refrescos obtenidos durante el experimento tienen un comportamiento normal, por lo cual procedemos a hacer una prueba ANOVA

Para la prueba ANOVA se cuentan con las siguientes hipótesis

$H_0$ : El tiempo que tiene destapado el refresco no es un factor que afecta su cantidad de pH.

$H_1$ : El tiempo que tiene destapado el refresco es factor que altere el pH del mismo.

$H_0'$ : La marca del refresco no afecta en la variabilidad de su pH

$H_1'$ : La marca del refresco afecta la variabilidad del pH del mismo.

Se obtuvieron los siguientes resultados.



ANÁLISIS DE VARIANZA					
Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico para F
Marca del refresco	4.28983125	7	0.612833036	75.9850548	2.285235173
Tiempo	1.35866875	5	0.27173375	33.69221742	2.485143221
Error	0.28228125	35	0.008065179		
Total	5.93078125	47			

Al ser los valores críticos más pequeños que los estadísticos F entonces se concluye que ambas hipótesis nulas se rechazan, de manera que el tiempo y la marca son factores que alteran el pH

Ahora para la prueba de diferencia de dos medias veremos si existe diferencia significativa entre los promedios de pH de la Coca-Cola y la Pepsi, con un alpha de 0.05 y suponiendo varianzas poblacionales desconocidas.

Contamos con las hipótesis

$$H_0: \mu_c - \mu_p = 0$$

$$H_1: \mu_c - \mu_p \neq 0$$

Se tiene que el estadístico

$$t_0 = 1.172$$

Mientras que el valor crítico

$$t_{0,025,9} = 2.62$$

Así resumimos los datos obtenidos en la siguiente tabla:

Tipo	$\nu$	$t_0$	$t_{0,025,\nu}$
Pepsi-Coca	9	1.17274533	2.262
Sprite-7up	8	1.1497432	2.306
Fanta-Mirinda	8	4.12328519	2.306
Manzanita-Lift	9	-0.87793853	-2.262
Pepsi-Sabor	13	-4.52786469	-2.16
Coca-Sabor	10	-4.62201961	-2.22
Sin sabor-Sabor	25	-6.29647973	-2.06

Donde  $\nu$  son los grados de libertad calculados  $t_0$  es el valor crítico a comparar con el estadístico  $t_{0,025,\nu}$ . De este modo  $H_0$  se acepta para el caso de Coca-Cola y la Pepsi, Sprite-7up y Manzanita-Lift y  $H_0$  se rechaza para el caso de Fanta- Mirinda, Pepsi-y sus respectivos refrescos de sabor, Coca y sus respectivos refrescos de sabor, Refresco de Cola y refrescos de sabor.

CONCLUSIONES

En el caso del PH de la Coca Cola y la Pepsi, como el valor crítico es más pequeño que el estadístico entonces podemos concluir que no existe diferencia significativa entre los promedios de pH de ambas marcas de refresco. De este modo obtenemos mismos resultado de la comparación del Sprite-7up, Manzanita-Lift, en las cuales no hay diferencia significativa entre los promedios de pH.

En el caso del PH de la Fanta- Mirinda, como el valor crítico es más grande que el estadístico entonces podemos concluir que si existe diferencia significativa entre los promedios de pH de ambas marcas de refresco. De este modo obtenemos mismos resultado de la comparación Pepsi-y sus respectivos refrescos de sabor, Coca y sus respectivos refrescos de sabor, Refresco de Cola y refrescos de sabor en las cuales si hay diferencia significativa entre los promedios de pH ya que el valor crítico es más pequeña que el negativo del estadístico.

De los resultados y conclusiones antes obtenidas se pueden obtener algunas recomendaciones y concluir hecho de gran interés para el público en general, dichas conjeturas afectan a la salud de los consumidores. Un ejemplo muy notable es el hecho de la cantidad de azúcar que contiene el refresco es muy alta llegando a superar los 60 gr lo cual es demasiado si se tienen problemas como la diabetes. Debemos notar un hecho importante: podemos consumir una gran cantidad de azúcar por propiedad carbonatada de los refrescos ya que de otro modo causaría problemas estomacales, esto es, el cuerpo puede consumir grandes cantidades de sustancias acidas mas no de azucars.

Otra hecho importante es en nivel de ácido que se maneja en estas bebidas, el rango de pH obtenido fue como mínimo 2.64 y como máximo 3.53 lo cual son niveles altos de acides, y como se obtuvo que existe una diferencia entre los refrescos de sabor y los de cola podemos notar que si se padece enfermedades estomacales como acides es recomendable consumir de sabor.

## REFERENCIAS

- Guevara A(2015). *BEBIDAS CARBONATADAS*. mayo 03, 2017, de UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA Sitio web: <http://www.lamolina.edu.pe/postgrado/pmdas/cursos/dpactl/lecturas/SeparataBebidas%20carbonatadas.pdf>
- Cancino K. . (2014). *Gaseosa*. Mayo 03, 2017, de FACULTAD DE INDUSTRIAS ALIMENTARIAS Sitio web: [http://www.mapama.gob.es/es/ministerio/servicios/informacion/gaseosa\\_tcm7-315312.pdf](http://www.mapama.gob.es/es/ministerio/servicios/informacion/gaseosa_tcm7-315312.pdf)
- Velázquez M &Ordorica M. (2009). *Ácidos, Bases, pH y Soluciones Reguladoras*. MAyo 03, 2017, de bioquimica dogsleep Sitio web: <http://www.bioquimica.dogsleep.net/Teoria/archivos/Unidad24.pdf>
- Gutiérrez H, & De La Vara R. (2008). *Análisis y diseño de experimentos*. México, DF: Mc Graw Hill.
- Luis Pineda (1999). *Métodos y modelos econométricos*, Editorial Limusa S.A. de C.V.
- Erwin Kreyszig (1989), *Introducción a la estadística matemática, Principios y métodos*, Editorial Limusa, S.A. de C.V.

- Paul L. Meyer (1970), *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, Fondo educativo interamericano, S.A.
- Emanuel Parzen(1987), *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*, Editorial Limusa, S.A. de C.V.
- Velázquez M &Ordorica M. (2009). *Ácidos, Bases, pH y Soluciones Reguladoras*. MAyo 03, 2017, de bioquimica dogsleep Sitio web: <http://www.bioquimica.dogsleep.net/Teoria/archivos/Unidad24.pdf>
- Vargas Joel (2013), *Cantidad de azúcar en los refrescos más comunes* , alianza salud. Sitio web: <http://alianzasalud.org.mx/2013/05/cantidad-de-azucar-en-los-refrescos-mas-comunes/>

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 8

### EVOLUCIÓN DEL CONSUMO EN MÉXICO

Elsa Jezabel García Venegas, José Mario García Escobedo, María José Hernández Silva, Jassy Guadalupe Ramírez Esquivel, María Lucero Ríos Gurrola, Fernando Fidel Ruíz Pérez. Dra. Alejandra Soria Pérez. Contacto: [marilongha@hotmail.com](mailto:marilongha@hotmail.com)

Facultad de Ciencias Exactas

[elsa\\_gv.29@hotmail.com](mailto:elsa_gv.29@hotmail.com) [josemariogarciaescobedo@hotmail.es](mailto:josemariogarciaescobedo@hotmail.es) [marilongha@hotmail.com](mailto:marilongha@hotmail.com)  
[jassy21r@gmail.com](mailto:jassy21r@gmail.com) [rg\\_lucero130891@hotmail.com](mailto:rg_lucero130891@hotmail.com) [fefy\\_chapis@hotmail.com](mailto:fefy_chapis@hotmail.com)

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas 8vo. Semestre

Consumo privado, PIB, economía, gastos

#### Resumen

Una serie de tiempo es una secuencia de observaciones, medidas en determinados momentos de tiempo. La estacionariedad es una de las clasificaciones de la serie y se define cuando la media y la varianza son constantes en el tiempo. Se puede verificar visualmente con una gráfica, con la función de autocorrelación y con la raíz unitaria. El que no sea estacionaria implica que la tendencia y la variabilidad cambian con el tiempo. Analizada la gráfica de la serie se determina si la serie es estacionaria, para estimar parámetros del modelo ARIMA minimizando la suma de los cuadrados en los errores de ajuste.

#### Introducción

Existe una razón importante para el estudio del consumo ya que este representa el 69% del PIB en el año 2000 y por lo tanto si queremos comprender las fluctuaciones de la demanda agregada y el PIB es necesario entender las motivaciones del consumo. Por otra parte la economía obedece a la interacción entre la oferta y la demanda agregadas y los cambios que representan en los componentes de la demanda agregada pueden afectar el nivel de la actividad de la economía a corto plazo.

La economía mexicana ha estado expuesta a un cambio estructural que inicia en el año 1988 y que presenta como un punto importante de partida en el 1987 con la entrada de México al GATT con lo cual se empiezan a consolidar cambios que podemos ver a lo largo del periodo 1993 al año 2016 en el que se inicia una etapa diferenciada por lo cual lo tomamos como modelo de estudio. Por lo tanto se requiere analizar la evolución reciente del consumo en el marco de la evolución del PIB.

El propósito del presente trabajo es realizar un análisis de la evolución del consumo en México de 1993 al año 2016 realizando para ello una revisión de las cifras macroeconómicas de Cuentas Nacionales del INEGI.

Una vez realizada la revisión teórica se analizará dicho tema a través de una serie de tiempo.

Se utilizara el complemento de Excel XLSTAT al vaciar los datos nos arrojará resultados los cuales se trataran para dar los finales e interpretarlos.

### Marco Teórico

A lo largo de este capítulo se explican los conceptos básicos que se consideraron para la elaboración del análisis de la Evolución reciente del Consumo comparándola con la evolución del PIB (Producto Interno Bruto).

El consumo es la acción por la cual los diversos Bienes y servicios son usados o aplicados a los fines a que están destinados, ya sea satisfaciendo las necesidades de los individuos. La economía considera el consumo como el fin esencial de la actividad económica.

EL PIB es un indicador representativo que ayuda a medir el crecimiento o decrecimiento de la producción de bienes y servicios de las empresas de cada país, únicamente dentro de su territorio.

La Demanda Agregada de una economía en un periodo dado está determinada por el gasto total en consumo privado, el gasto público, inversión y exportaciones netas. Los componentes de la demanda agregada son los siguientes:

\*consumo privado, gastos públicos de bienes y servicios, inversión, exportaciones netas.

Enfoques macroeconómicos sobre el consumo. La macroeconomía moderna nació de la función en la teoría general de Keynes quien plantea un modelo de economía cerrada en el cual los componentes de la demanda son consumo e inversión. El enfoque keynesiano se concibe al consumo como una variable que depende del nivel de ingreso disponible. La observación que hacia Keynes era la siguiente. “cuando aumenta la ocupación aumenta también el ingreso global real de la comunidad, es tal que cuando el ingreso real aumenta el consumo crece pero no tanto como el ingreso a esto le llamo propensión marginal.

El consumo duradero y consumo no duradero dependen de la vida del producto que se compra. Otra forma de acercarnos a la evolución del consumo es a partir de la división en consumo de bienes duraderos y consumo de bienes no duraderos, con la intención de seguir la evolución de las pautas de consumo que resultan de esta clasificación y comparándolas con la evolución de la economía en general.

Antes de entrar en materia es preciso hacer una aclaración sobre los datos presentados de acuerdo a la clasificación del INEGI, los gastos en el mercado interior se componen de la suma de bienes duraderos más bienes no duraderos e incluyen las compras netas directas en

el mercado exterior. Por lo tanto estas se restan de los gastos en el mercado para obtener los gastos de consumo final privado lo que esquemáticamente podemos plantear de la siguiente manera.

Bienes duraderos

+ Bienes no duraderos

Gastos en el mercado interior

- Compras netas directas en el mercado exterior

Gastos de consumo final privado

Serie de Tiempo.

Una serie de tiempo es una secuencia de observaciones, medidas en determinados momentos de tiempo, ordenados cronológicamente y, espaciados entre sí. El principal objetivo de una serie de tiempo  $X_t$ , donde  $t = 1, 2 \dots n$  es su análisis para hacer pronósticos. Los componentes de una Serie de Tiempo se definen de la siguiente manera:

\*El componente tendencia se define como un cambio a largo plazo que se produce en la relación al nivel medio, o el cambio a largo plazo de la media. La tendencia se identifica con un movimiento suave de la serie a largo plazo.

\*Muchas series temporales presentan cierta periodicidad o dicho de otro modo, variación de cierto periodo (semestral, mensual, etc.), esto es el componente estacional.

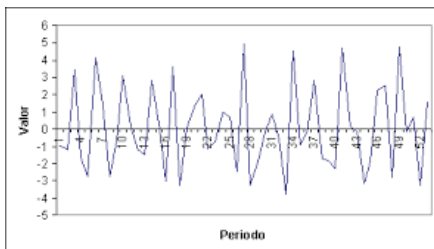
\*El componente aleatorio no responde a ningún patrón de comportamiento, sino que es el resultado de factores aleatorios que inciden de forma aislada en una serie de tiempo.

La serie de tiempo se denota:

$$X_t = T_t + E_t + I_t$$

Y su Clasificación es la siguiente:

\*Estacionarias: Una serie es estacionaria cuando es estable a lo largo del tiempo, es decir, cuando la media y varianza son constantes en el tiempo. Esto se refleja gráficamente en que los valores de la serie tienden a oscilar alrededor de una media constante y variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo.



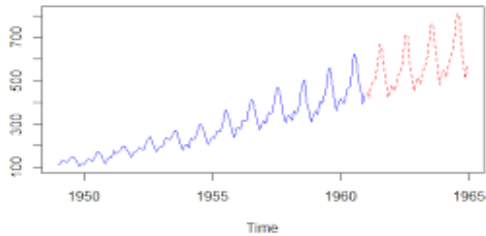
Una serie de tiempo  $X_t$  es estacionaria si cumple con estas propiedades:

$$\text{Media } E(X_t) = E(X_t + k) = \mu$$

$$\text{Varianza } V(X_T) = V(X_t + k) = \sigma^2$$

$$\text{Covarianza } \gamma_k = E[(X_t - \mu)(X_t + k - \mu)]$$

\*No estacionarias: Son series en las cuales la tendencia y/o variabilidad cambian en el tiempo. Los cambios en la media determinan una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, por lo que la serie no oscila alrededor de un valor constante



Continuando con las series estacionarias y no estacionarias existen pruebas que determinan el tipo de serie con el que se está trabajando y son las siguientes:

\*Análisis Gráfico: Nos facilita verificar visualmente, el tipo de Serie de Tiempo que estamos manejando.

\*Función de Autocorrelación: La autocorrelación mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos.

$$\rho_k = \frac{\text{covarianza del rezago } k}{\text{varianza}}$$

\*Prueba de Raíz Unitaria: El nombre de raíz unitaria se debe a que  $\rho = 1$ . Es un modelo de caminata aleatoria, funciona para probar que una serie no es estacionaria.

Ahora pasaremos a la construcción del modelo ARIMA, y los pasos para su construcción son los siguientes:

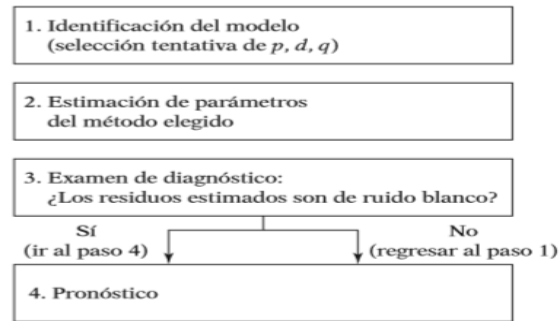
1. Identificación del modelo. Se hace la gráfica de la serie para determinar si la serie es estacionaria. Suponga que la serie Y se incrementa con el tiempo pero sus primeras diferencias cambian alrededor de un nivel fijo, en cuyo caso se puede aplicar un modelo ARIMA, el modelo es:

$$\Delta Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) = \phi_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1}$$

2. Estimación de los parámetros del modelo. Los parámetros de los modelos ARIMA se estiman al minimizar la suma de los cuadrados en los errores de ajuste. Los parámetros significativos (diferentes de CERO en las pruebas de hipótesis) se conservan en el modelo ajustado y sus valores t se interpretan como se hace usualmente. Los no significativos se eliminan del modelo.

3. Evaluación del modelo. Antes de usar el modelo para hacer pronósticos es necesario asegurarse de que es un modelo adecuado. Se considera un modelo adecuado aquel cuyos residuales se comportan aleatoriamente.

Metodología Box-Jenkins



1. identificación. Es decir, encontrar los valores apropiados de  $p$ ,  $d$  y  $q$ .
2. Estimación. Tras identificar los valores apropiados de  $p$ ,  $d$  y  $q$ , la siguiente etapa es estimar los parámetros de los términos autor regresivos y de promedios móviles incluidos en el modelo. Algunas veces, este cálculo se efectúa mediante mínimos cuadrados simples, pero otras hay que recurrir a métodos de estimación no lineal (en parámetros).
3. Examen de diagnóstico. Después de seleccionar un modelo ARIMA particular y de estimar sus parámetros, tratamos de ver si el modelo seleccionado se ajusta a los datos en forma razonablemente buena, pues es posible que exista otro modelo ARIMA que también lo haga. Es por esto que el diseño de modelos ARIMA de Box-Jenkins es un arte más que una ciencia.
4. Pronóstico. Una razón de la popularidad del proceso de construcción de modelos ARIMA es su gran pronóstico. En muchos casos, los pronósticos obtenidos por este método son más confiables que los obtenidos de modelos económicos tradicionales, en particular en el caso de pronósticos de corto plazo.

#### Técnicas de pronóstico

Dentro de esta categoría, existen técnicas cualitativas y cuantitativas. Aquí nos enfocaremos a estudiar fundamentalmente las cuantitativas. En este ámbito se encuentran las técnicas de series temporales y las causales o econométricas.

Así mismo, existen también las técnicas estadísticas (sujetas a error) y las no estadísticas (sin error).

#### Técnica de los promedios móviles simples

Esta técnica propone un término genérico definido como:

$$S_{t+1} = \frac{[X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-N+1}]}{N}$$

Donde “ $N$ ” corresponde a una porción o su muestra de la muestra total “ $n$ ” de datos históricos que estamos manejando en nuestra serie.

#### Técnica de los promedios móviles dobles

A partir del concepto de promedio móvil simple definido como:

$$S_{t+1} = \frac{[X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-N+1}]}{N}$$

Podemos introducir el concepto de promedio móvil doble en los siguientes términos:



$$S'_{t+1} = \frac{[S_t + S_{t-1} + S_{t-2} + \dots + S_{t-N+1}]}{N}$$

El ajuste para esta técnica se obtiene introduciendo dos parámetros “a” y “b” que se define como:

$$a = 2S_{t+1} - S'_{t-1}$$

$$b = \frac{2(S_{t+1} - S'_{t+1})}{N - 1}$$

Por lo que el pronóstico final ajustado adopta la forma:

$$S'_{t+m} = a + b \cdot m$$

Donde “m” representa el número de periodos futuros a proyectar.

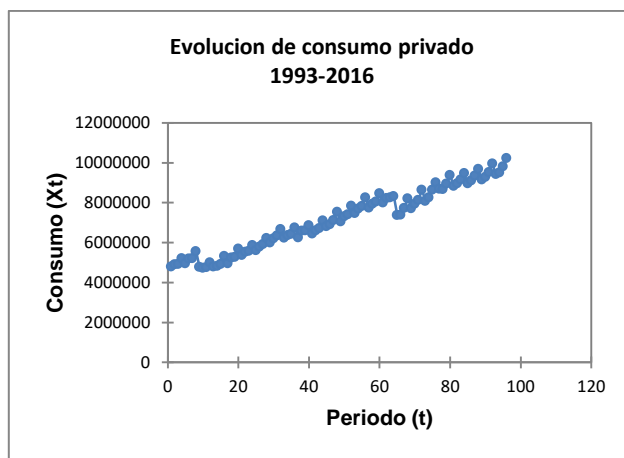
Modelo teórico.

\*El consumo en México ha ido evolucionando respectivamente a lo largo del periodo de 1988 al año 2016, es por ello que decidimos analizar dicha base de datos disponible en el Sistema de Cuentas Nacionales INEGI. Esto con el fin de analizar la evolución reciente del consumo comparándolo con la evolución del PIB.

Año	Periodo (t)	Consumo (Xt)	Año	Periodo (t)	Consumo (Xt)
1993	1	4 797 155	1999	25	5 601 213
	2	4 906 915		26	5 778 494
	3	4 920 059		27	5 907 760
	4	5 210 310		28	6 220 960
1994	5	4 945 212	2000	29	5 995 095
	6	5 188 262		30	6 196 050
	7	5 207 837		31	6 347 374
	8	5 562 701		32	6 670 850
1995	9	4 767 965	2001	33	6 229 080
	10	4 729 255		34	6 367 899
	11	4 757 389		35	6 433 825
	12	4 998 606		36	6 752 658
1996	13	4 783 966	2002	37	6 243 936
	14	4 817 505		38	6 582 101
	15	4 916 917		39	6 594 995
	16	5 313 513		40	6 862 565
1997	17	4 949 295	2003	41	6 437 158
	18	5 240 951		42	6 607 719
	19	5 279 719		43	6 716 956
	20	5 688 870		44	7 098 633
1998	21	5 372 197	2004	45	6 805 275
	22	5 527 138		46	6 914 371
	23	5 577 239		47	7 108 805
	24	5 860 592		48	7 527 090

Año	Periodo (t)	Consumo (Xt)	Año	Periodo (t)	Consumo (Xt)
2005	49	7 056 662	2011	73	8 071 797
	50	7 302 941		74	8 257 985
	51	7 410 962		75	8 636 949
	52	7 832 457		76	9 006 019
2006	53	7 467 221	2012	77	8 679 271
	54	7 696 690		78	8 663 111
	55	7 822 320		79	8 934 980
	56	8 249 628		80	9 373 946
2007	57	7 743 625	2013	81	8 833 488
	58	7 929 299		82	8 962 915
	59	8 042 407		83	9 150 347
	60	8 469 472		84	9 467 646
2008	61	7 999 978	2014	85	8 952 373
	62	8 221 816		86	9 095 386
	63	8 254 139		87	9 336 773
	64	8 319 406		88	9 685 197
2009	65	7 367 013	2015	89	9 149 618
	66	7 384 318		90	9 276 960
	67	7 717 137		91	9 525 284
	68	8 208 833		92	9 953 630
2010	69	7 712 083	2016	93	9 417 407
	70	7 930 947		94	9 505 826
	71	8 132 905		95	9 808 108
	72	8 639 742		96	10232 261

Comenzaremos por clasificar nuestra serie de tiempo, con el método gráfico, en la cual podemos observar a simple vista que nuestra serie de tiempo es no estacionaria.



A continuación se presenta las predicciones a corto plazo utilizando la técnica de los promedios móviles simple.

Año	Periodo (t)	Consumo (Xt)	Promedio N=5	Año	Periodo (t)	Consumo (Xt)	Promedio N=5
1993	1	4797 155		2005	49	7 056 662	7 090 835
	2	4906 915			50	7 302 941	7082440.79
	3	4 920059			51	7 410 962	7181974.0
	4	5 210310			52	7 832 457	7 281 292
1994	5	4 945212		2006	53	7 467 221	7426022.63
	6	5 188262	4955930.1		54	7 696 690	7414048.8
	7	5 207837	5 034 152		55	7 822 320	7 542 054
	8	5 562701	5094335.89		56	8 249 628	7645930.14
1995	9	4 767965	5222864.4	2007	57	7 743 625	7813663.3
	10	4 729255	5 134 395		58	7 929 299	7 795 897
	11	4 757389	5091204.1		59	8 042 407	7888312.19
	12	4 998606	5005029.5		60	8 469 472	7957455.7
1996	13	4 783966	4 963 183	2008	61	7 999 978	8 086 886
	14	4 817505	4807436.28		62	8 221 816	8036956.2
	15	4916917	4817344.3		63	8 254 139	8132594.4
	16	5 313513	4 854 877		64	8 319 406	8 197 562
1997	17	4 949295	4966101.45	2009	65	7 367 013	8252962.29
	18	5 240951	4956239.2		66	7 384 318	8032470.5
	19	5 279719	5 047 636		67	7 717 137	7 909 338
	20	5 688870	5140079.02		68	8 208 833	7808402.7
1998	21	5 372197	5294469.6	2010	69	7 712 083	7799341.5
	22	5 527138	5 306 206		70	7 930 947	7 677 877
	23	5 577239	5421775.11		71	8 132 905	7790663.79
	24	5 860592	5489032.6		72	8 639 742	7940381.3
1999	25	5 601213	5 605 207	2011	73	8 071 797	8 124 902
	26	5 778494	5587675.77		74	8 257 985	8097495.02
	27	5 907760	5668935.2		75	8 636 949	8206675.2
	28	6 220960	5 745 060		76	9 006 019	8 347 876
2000	29	5 995095	5873803.87	2012	77	8 679 271	8522498.4
	30	6 196050	5900704.4		78	8 663 111	8530404.2
	31	6 347374	6 019 672		79	8 934 980	8 648 667
	32	6 670850	6133447.9		80	9 373 946	8784065.9
2001	33	6 229080	6286065.9	2013	81	8 833 488	8931465.2
	34	6 367899	6 287 690		82	8 962 915	8 896 959
	35	6 433825	6362250.77		83	9 150 347	8953687.74
	36	6 752658	6409805.8		84	9 467 646	9051135.0
2002	37	6 243936	6 490 863	2014	85	8 952 373	9 157 668
	38	6 582101	6405479.7		86	9 095 386	9073353.74
	39	6 594995	6476083.9		87	9 336 773	9125733.4
	40	6 862565	6 521 503		88	9 685 197	9 200 505
2003	41	6 437158	6607250.93	2015	89	9 149618	9307475
	42	6 607719	6544151.0		90	9 276960	9243869.3
	43	6 716956	6 616 907		91	9 525284	9 308 787
	44	7 098633	6643878.58		92	9 953630	9394766.38

2004	45	6 805275	6744606.2	2016	93	9 417407	9518137.8
	46	6 914371	6 733 148		94	9 505826	9 464 580
	47	7 108805	6828590.79		95	9 808108	9535821.33
	48	7 527090	6928808.2		96	10232261	9642050.9

Como podemos observar si difiere en ocasiones bastante o poco las predicciones de los valores ya establecidos.

En seguida se muestran los pronósticos a corto plazo mediante la técnica de los promedios móviles dobles.

Se muestran los primeros 30 valores de la serie.

Observación (Xt)	(St+1)	(S`+1)	a	b
4 797 155				
4 906 915				
4 920 059	4995040.85			
5 210 310	5158600.16			
4 945 212	5158600.16	5076820.51	-163559.305	-40889.8263
5 188 262	5112799.75	5135699.95	45800.4133	11450.1033
5 207 837	5112799.75	5135699.95	45800.4133	11450.1033
5 562 701	4984106.43	5048453.09	128693.315	32173.3288
4 767 965	4984106.43	5048453.09	128693.315	32173.3288
4 729 255	4812390.31	4898248.37	171716.117	42929.0293
4 757 389	4812390.31	4898248.37	171716.117	42929.0293
4 998 606	4910489.08	4861439.7	-98098.7686	-24524.6922
4 783 966	4910489.08	4861439.7	-98098.7686	-24524.6922
4 817 505	5001937.71	4956213.39	-91448.6248	-22862.1562
4 916 917	5001937.71	4956213.39	-91448.6248	-22862.1562
5 313 513	5217274.31	5109606.01	-215336.6	-53834.1499
4 949 295	5217274.31	5109606.01	-215336.6	-53834.1499
5 240 951	5363990.81	5290632.56	-146716.499	-36679.1249
5 279 719	5363990.81	5290632.56	-146716.499	-36679.1249
5 688 870	5547119.94	5455555.37	-183129.135	-45782.2838
5 372 197	5547119.94	5455555.37	-183129.135	-45782.2838
5 527 138	5628305.49	5587712.72	-81185.5518	-20296.388
5 577 239	5628305.49	5587712.72	-81185.5518	-20296.388
5 860 592	5809431.76	5718868.63	-181126.269	-45281.5673
5 601 213	5809431.76	5718868.63	-181126.269	-45281.5673
5 778 494	5960188.17	5884809.96	-150756.404	-37689.1011
5 907 760	5960188.17	5884809.96	-150756.404	-37689.1011
6 220 960	6209756.91	6084972.54	-249568.745	-62392.1862
5 995 095	6209756.91	6084972.54	-249568.745	-62392.1862
6 196 050	6324970.33	6267363.62	-115213.415	-28803.3537

Al hacer la comparación entre las dos técnicas de pronóstico (promedios móviles simples y promedios móviles dobles) podemos observar que la primera técnica es más favorable que la segunda en relación a la precisión, además de que la técnica de los promedios móviles dobles requiere de mayor número de datos e información para poder realizar los cálculos correspondientes. A pesar de que la técnica de promedios móviles simples es más sencilla, se le puede atribuir más precisión.

### Método de raíz Unitaria

Utilizaremos el método de raíz unitaria para verificar si nuestra serie es o no estacionaria, utilizaremos el software XLSTAT, para facilitar los cálculos quedando de la siguiente manera nuestra hipótesis

Tau (Valor observado)	-15.729
Tau (Valor crítico)	-1.944
valor-p (unilateral)	< 0.0001
Alfa	0.05

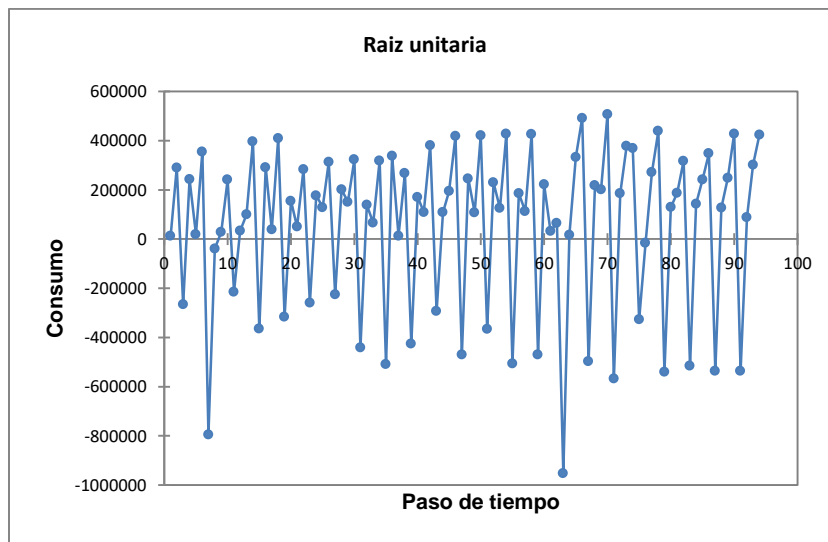
Interpretación de la prueba:

H0: Hay una raíz unitaria para la serie.

Ha: No hay raíz unitaria para la serie. La serie es estacionaria.

Puesto que el valor-p computado es menor que el nivel de significación  $\alpha=0.05$ , se debe rechazar la hipótesis nula H0, y aceptar la hipótesis alternativa Ha.

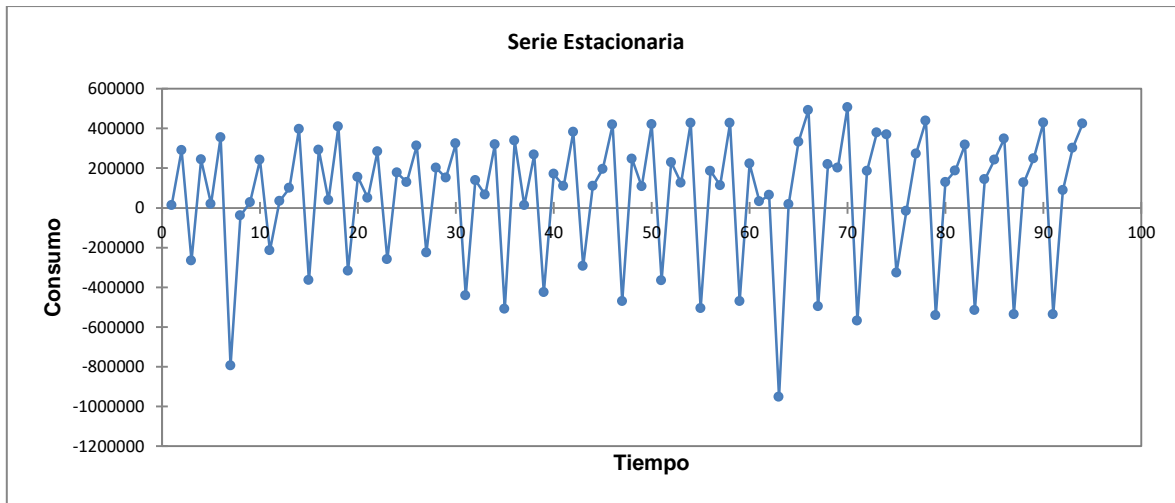
El riesgo de rechazar la hipótesis nula H0 cuando es verdadera es inferior al 0.01%.



Para poder transformar nuestra serie de tiempo a una serie de tiempo estacionaria, usamos el método de diferenciabilidad en nuestra base de datos lo cual se realizó manualmente aplicando la diferenciabilidad en los trimestres, con lo cual nos dio los siguientes resultados:

Periodo (t)	Consumo (Xt)	diferencias	Periodo (t)	Consumo (Xt)	diferencias
1	4 797 155		21	5 372 197	- 316 673
2	4 906 915	109 761	22	5 527 138	154 941
3	4 920 059	13 144	23	5 577 239	50 101
4	5 210 310	290 252	24	5 860 592	283 353

5	4 945 212	- 265 099	25	5 601 213	- 259 380
6	5 188 262	243 050	26	5 778 494	177 282
7	5 207 837	19 575	27	5 907 760	129 266
8	5 562 701	354 865	28	6 220 960	313 200
9	4 767 965	- 794 736	29	5 995 095	- 225 865
10	4 729 255	- 38 710	30	6 196 050	200 955
11	4 757 389	28 134	31	6 347 374	151 324
12	4 998 606	241 217	32	6 670 850	323 476
13	4 783 966	- 214 640	33	6 229 080	- 441 770
14	4 817 505	33 539	34	6 367 899	138 819
15	4 916 917	99 412	35	6 433 825	65 926
16	5 313 513	396 595	36	6 752 658	318 832
17	4 949 295	- 364 218	37	6 243 936	- 508 722
18	5 240 951	291 656	38	6 582 101	338 165
19	5 279 719	38 768	39	6 594 995	12 894
20	5 688 870	409 151	40	6 862 565	267 570
<b>Periodo (t)</b>	<b>Consumo (Xt)</b>	<b>diferencias</b>	<b>Periodo (t)</b>	<b>Consumo (Xt)</b>	<b>diferencias</b>
43	6 716 956	109 238	70	7 930 947	218 864
44	7 098 633	381 676	71	8 132 905	201 958
45	6 805 275	- 293 358	72	8 639 742	506 836
46	6 914 371	109 096	73	8 071 797	- 567 944
47	7 108 805	194 434	74	8 257 985	186 187
48	7 527 090	418 285	75	8 636 949	378 965
49	7 056 662	- 470 428	76	9 006 019	369 070
50	7 302 941	246 279	77	8 679 271	- 326 749
51	7 410 962	108 021	78	8 663 111	- 16 160
52	7 832 457	421 495	79	8 934 980	271 869
53	7 467 221	- 365 236	80	9 373 946	438 966
54	7 696 690	229 469	81	8 833 488	- 540 458
55	7 822 320	125 631	82	8 962 915	129 428
56	8 249 628	427 307	83	9 150 347	187 432
57	7 743 625	- 506 003	84	9 467 646	317 299
58	7 929 299	185 674	85	8 952 373	- 515 273
59	8 042 407	113 109	86	9 095 386	143 013
60	8 469 472	427 065	87	9 336 773	241 387
61	7 999 978	- 469 493	88	9 685 197	348 425
62	8 221 816	221 837	89	9 149 618	- 535 580
63	8 254 139	32 323	90	9 276 960	127 342
64	8 319 406	65 267	91	9 525 284	248 324
65	7 367 013	- 952 393	92	9 953 630	428 346
66	7 384 318	17 305	93	9 417 407	- 536 223
67	7 717 137	332 819	94	9 505 826	88 419
68	8 208 833	491 696	95	9 808 108	302 282
69	7 712 083	- 496 750	96	10 232 261	424 153



Ahora se empleará el modelo ARIMA para determinar la nuestra serie de tiempo, el cual se determinó utilizando el software XLSAT.

En el siguiente cuadro se muestran las estadísticas para nuestra serie. Estos índices nos permiten eventualmente comparar diferentes modelos entre sí.

Estadísticos de bondad del ajuste:

Observaciones	93
GL	86
SEC	2.0044E+12
MEC	2.1553E+10
RMSE	146810.149
Varianza RB	2.1553E+10
MAPE(Dif)	58.6184736
MAPE	81.8789451
-2Log(Vero.)	2486.22164
FPE	2.3491E+10
AIC	2500.22164
AICC	2501.53928
SBC	2517.94983
Iteraciones	501

A continuación se muestran los parámetros del modelo.

Parámetros del modelo:

Parámetro	Valor	Error típico Hess.	Límite inferior (95%)	Límite superior (95%)
Constante	0.000			



Parámetro	Valor	Error típico Hess.	Límite inferior (95%)	Límite superior (95%)	Error típico asint.	Límite inferior (95%)	Límite superior (95%)
AR(1)	-0.259	0.101	-0.458	-0.060	0.080	-0.417	-0.101
AR(2)	-0.225	0.089	-0.399	-0.051	0.081	-0.384	-0.065
AR(3)	-0.267	0.089	-0.442	-0.092	0.084	-0.432	-0.103
AR(4)	0.653	0.093	0.471	0.835	0.081	0.494	0.812
MA(1)	-0.758	0.123	-0.999	-0.518	0.108	-0.970	-0.546
MA(2)	-0.242	0.119	-0.475	-0.008	0.108	-0.454	-0.030

El modelo ARIMA quedaría de la siguiente manera:

$$Y(t) = 0.00 - 0.259(Z_t - 1) - 0.225(Z_t - 2) - 0.267(Z_t - 3) + 0.653(Z_t - 4) - 0.758(Z_t - 1) - 0.242(Z_t - 2)$$

Con  $Z(t)$  es un ruido blanco  $N(0, 0.001)$   $Y(t)=(1-B)(1-B^4)X(t)$ , y  $X(t)$  es la serie de partida.

La ecuación que permite calcular las previsiones para la serie

$$X(t) \text{ es: } X(t+1) = Y(t+1)+X(t)+X(t-93)-X(t-94)$$

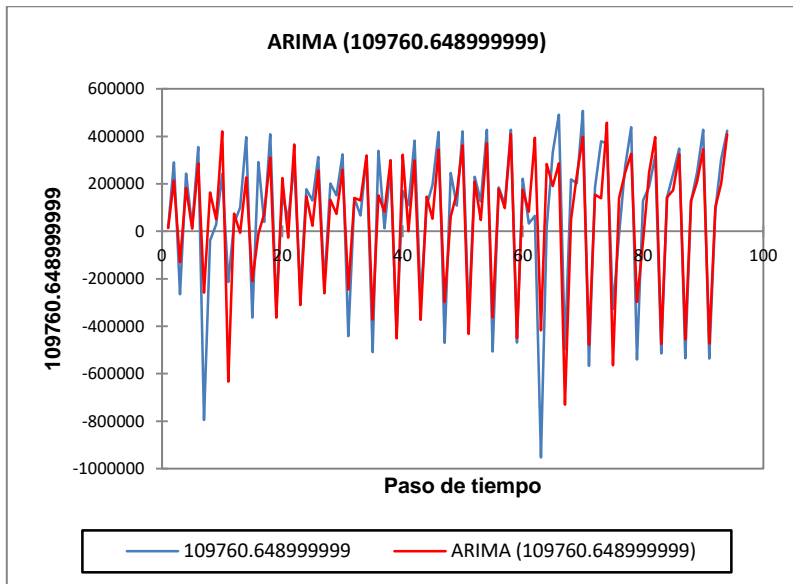
Después de mostrar el cuadro de los parámetros se muestra el cuadro que nos proporciona los resultados del ajuste, con la serie original y la serie del modelo ARIMA. A continuación se presentan las primeras 20 observaciones, donde claramente podemos ver que los datos arrojados por el modelo se ajustan a los datos ya establecidos.

Predicciones y residuos:

Observaciones	109760.6489999	ARIMA(109760.64899999	Residuos	Residuos estandarizados
s	99	9)		
1	13143.516	13143.516	0.000	0.000
2	290251.508	213049.022	77202.486	0.526
3	-265098.736	-129931.231	-135167.5	-0.921
4	243050.360	182875.681	60174.679	0.410
5	19574.884	11706.635	7868.249	0.054
6	354864.676	286771.962	68092.714	0.464
7	-794736.393	-258872.324	-535864.0	-3.650
8	-38709.934	162817.533	-201527.4	-1.373
9	28133.698	50310.957	-22177.25	-0.151
10	241217.347	421071.652	-179854.3	-1.225
11	-214640.143	-632906.314	418266.17	2.849
12	33539.315	74248.666	-40709.35	-0.277
13	99411.655	-6065.155	105476.81	0.718
14	396595.485	226780.271	169815.21	1.157
15	-364217.652	-210617.327	-153600.3	-1.046
16	291656.466	-9903.979	301560.44	2.054
17	38767.986	73304.285	-34536.29	-0.235

18	409150.562	310823.114	98327.448	0.670
19	-316672.817	-364192.648	47519.831	0.324
20	154940.861	224445.737	-69504.87	-0.473

En el gráfico que se muestra enseguida se muestra como las predicciones se ajustan bien a los datos ya establecidos.



### Conclusión

Como podemos observar nuestra serie de tiempo al compararla con el modelo ARIMA, el pronóstico es ajustado uno de la otra, dado esto y de nuestro periodo de tiempo la diferencia de un año hacia otro no es constante ya que nuestro estudio va de 1993 al 2016. A lo cual nuestro pronóstico no es exacto pero es aproximado hacia el consumo privado presenta una crisis financiera en 1995 del 10.9% como proporción del PIB y a partir de 1996 año tras año presenta una paulatina recuperación que alcanza su evolución en el año 2000 representada por el 17.5% como proporción del PIB. Durante el año 1998 los bienes de consumo obtuvieron un constante crecimiento en especial el año 2000 y 2014, en cuanto a la evolución del consumo distinguimos dos etapas en que este aumenta de manera importante de 1992 a 1996 la primera etapa y la segunda de 1997 a 2013, ambos casos se asocian a un comportamiento por la apreciación del peso por lo cual su constante evolución. Los datos presentados muestran que existe grande disparidad en la distribución lo cual concluimos que la mayor consecuencia viene dada por los gastos de consumo en dicha evolución.

### Bibliografía

Revista de la Facultad de Economía-BUAP. Año VIII Núm. 23

Gujarati, D., Porter, D. (2010). *Econometría* (5ta. Edición). EUA: Mcgraw-Hill. Pineda, L. (1999). *Métodos y modelos econométricos* (1era. Reimpresión). EUA.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 1

### LOS CUATRO CUATROS

Sebastián Morales Amaya, Luis Eduardo Bueno López

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 2

### BREVE INTRODUCCIÓN A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Juan José Díaz de León

Asesora: Dra. María del Carmen Olvera Martínez

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*juanjo9614@hotmail.com*

Área: Geometría y Cálculo.

La geometría euclidiana o plana, como su nombre lo indica, se debe a Euclides, y es la que trata la geometría de nuestro mundo diario. El libro 1 de los Elementos de Euclides, recoge los conocimientos de geometría plana de la época en 48 proposiciones, las cuales se deducen lógicamente de un conjunto de 23 definiciones, cinco axiomas y cinco postulados. Se dice que este es el primer tratado de la matemática pura.

Los cinco postulados que caracterizan a la geometría euclidiana son los siguientes:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta infinita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta que corte a otras dos, forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma sea menor que dos rectos.

Hoy en día, se utiliza como quinto postulado un enunciado equivalente conocido como *postulado de las paralelas* o *axioma de Playfair*. Este dice: *por un punto dado exterior a una recta sólo puede trazarse otra (única) paralela a ella* (Inciso a, Figura 1). Aunque este postulado parece intuitivamente claro, nadie ha sido capaz de demostrarlo.

Siglos después de que se escribieran los Elementos de Euclides, se llegó a la conclusión de que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro, lo cual generó la posibilidad de que existan geometrías en las que no se cumple este postulado. Surgieron sistemas de geometría que no están basados en el quinto postulado de Euclides y al conjunto de estos sistemas se les denomina geometría no euclidiana. Se distinguen dos tipos de geometría no euclidiana: hiperbólica y elíptica.

En la geometría de Bolyai-Lovachevsky-Gauss, también llamada geometría Lobachevskiana o hiperbólica, se suponen las definiciones, axiomas y los cuatro primeros postulados de la geometría euclidiana. Aunque muchos de los teoremas de la geometría

euclidiana siguen siendo válidos en la hiperbólica, ésta difiere en el quinto postulado, el cual menciona que, *por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que no cortan a la primera* (Inciso b, Figura 1).

La geometría elíptica, es otro modelo de geometría no euclidiana que satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides. En esta geometría, el quinto postulado menciona que. *dada una recta, de esta geometría, y un punto exterior a la misma, no existe ninguna recta paralela que no interseque a la primera* (Inciso c, Figura 1).

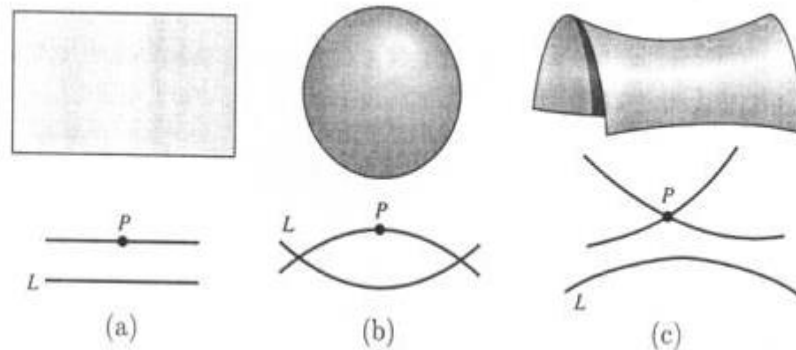


Figura 1. Quinto postulado visto desde las diferentes geometrías.

#### Referencias bibliográficas

Tejada, D. (2003). *Geometrías no-euclidianas*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Ongay, Fausto. (1990). Algunas curiosidades sobre geometrías en el plano. *Educación Matemática*, Vol. 2, Pag. 53-60.

Montes de Oca, L. & Solís, D. (2013). Los postulados de Euclides en Espacios Métricos. México: Universidad Autónoma de Yucatán.

*Geometría hiperbólica*. Recuperado el 19 de mayo de 2017 de [https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa\\_hiperb%C3%B3lica](https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_hiperb%C3%B3lica)

*Geometría elíptica*. Recuperado el 19 de mayo de 2017 de [https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa\\_el%C3%ADptica](https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_el%C3%ADptica)

[Programa general](#)

### Ponencia de Divulgación 3

#### GEOMETRÍA RIEMANNIANA Y LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Héctor Alfonso Sánchez Aragón, Silvia Janeth Solís Beltrán

Asesora: Dra. María del Carmen Olvera Martínez

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*poncho\_290@hotmail.com, janeth\_kltz\_89@hotmail.com*

Área: Geometría y Cálculo

Tres de los principales tipos de geometrías son: la geometría plana, hiperbólica y esférica o elíptica (Figura 1). La geometría euclidiana es aquella que satisface todos los axiomas de Euclides, así como sus cinco postulados. Una geometría que no satisface el quinto postulado, llamado postulado de las paralelas, se conoce como geometría no euclidiana.

La historia de la aparición de las geometrías no-euclidianas, corresponde a una época revolucionaria en la historia de la matemática, no solamente porque estas geometrías se desarrollaron prácticamente sin un apoyo en la "realidad" de ese momento; también, porque su aparición cuestiona lo que es un sistema axiomático, lo que es un axioma independiente y lo que significa la consistencia de una teoría matemática.

En la geometría de Riemann, también llamada geometría Riemanniana, elíptica o esférica, se suponen los postulados 1, 3 y 4, de la geometría euclidiana, respecto al segundo postulado, afirma que las líneas no se pueden extender indefinidamente; en el quinto postulado se menciona que por un punto exterior a una recta no pasan paralelas a la recta dada. En la Figura 2, se puede observar un diagrama que representa este último postulado, pues a partir de una recta dada se trazan dos perpendiculares diferentes que no son paralelas entre sí.

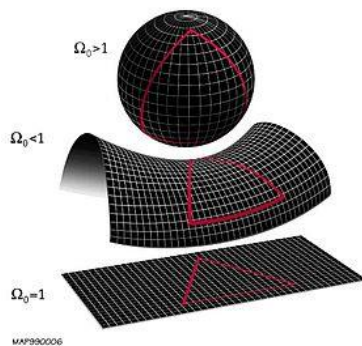


Figura 2. Principales tipos de geometrías.

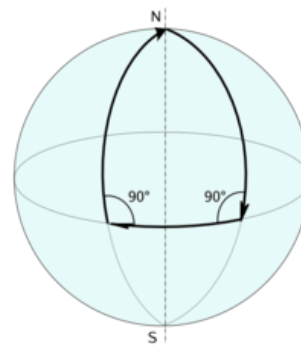


Figura 3. Ejemplo de dos rectas perpendiculares a otra que no son paralelas.

La genialidad de Riemann se da al concebir, aunque intuitivamente, espacios de  $n$  dimensiones ( $n$ -variedades) dotados de una métrica relativa al punto de localización en el espacio. Asignarle a cada punto una métrica es darle "rigidez" a la  $n$ -variedad. Una métrica determina las geodésicas (Figura 3), es decir, las líneas más cortas entre dos puntos y, también, hace posible medir sobre la variedad longitudes de curvas; distancias entre puntos lejanos; ángulos entre curvas; áreas, volúmenes, etc.

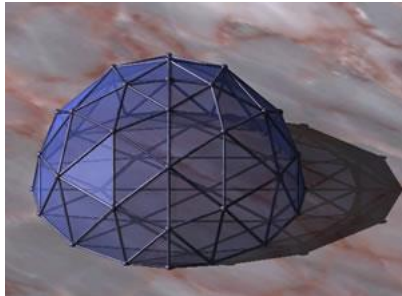


Figura 3. Ejemplo de geodésicas.

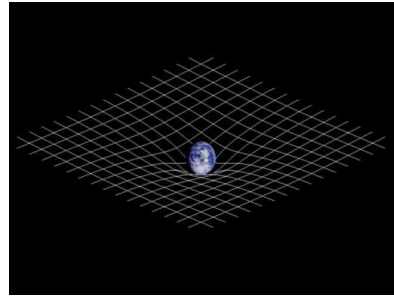


Figura 4. Representación de la teoría General de la relatividad.

En la Teoría General de la Relatividad se explica la gravitación como una fuerza en sí misma. Cerca de un cuerpo de gran masa las longitudes son más pequeñas y por eso los cuerpos parecen acelerarse hacia ella. Sin entrar en las motivaciones de la teoría, lo cierto es que explica algunas desviaciones infinitesimales respecto a lo que predice la teoría de la gravitación creada por Newton que permaneció inamovible durante más de dos siglos.

La Teoría General de la Relatividad de Einstein es un ejemplo del uso de la imaginación matemática para reflejar la conducta del universo físico. Para que su teoría tuviese fortaleza necesitaba fundamentarla matemáticamente. La Geometría Euclidiana no le servía, pues necesitaba una geometría que fuera relativa a cada observador, necesitaba una geometría que variara de un lugar a otro en el espacio según la concentración de la materia presente en el lugar del observador. Para lo anterior, la geometría riemanniana era la apropiada.

En 1916, Einstein propuso un espacio no-euclidiano, es decir, un espacio que se deforma en presencia de grandes masas y en el que el tiempo también se distorsiona (Figura 4). Se concibe un espacio-tiempo, concepto matemático que más adelante serviría para el descubrimiento de los hoyos negros. Con la Teoría General de la Relatividad, Einstein nos muestra la importancia de los modelos matemáticos en el conocimiento de la realidad. Una vez más entran en conexión dos mundos que avanzan en estrecha relación: el mundo de las ideas matemáticas y el mundo de la realidad física. Esta relación se afianzará a medida que avanza el siglo XX.

Para la formulación geométrica de la Teoría General de la Relatividad, son necesarios solo algunos prerequisites de álgebra lineal elemental. Sin embargo, los ingredientes geométricos que intervienen en esta teoría son bastante más avanzados, y requieren al menos de los conceptos básicos de la geometría esférica como variedades diferenciales, métricas, conexiones, etc.

### Referencias

- Tejada, D. (2009). Geometrías no-Euclidianas. *Boletín de Matemáticas*, 16, 145-158.
- Girbau, J. (2001). *Geometría diferencial y relatividad*. España: Universidad Autónoma de Barcelona.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 4

### EL CÁLCULO MENTAL

Jesús Alejandro López Montiel

Asesora: Dra. Alejandra Soria Pérez

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*alejandro\_sant@hotmail.com*

Área: Aritmética

“Existen tres tipos de personas: las que saben contar y las que no”.

Desarrollar la habilidad del cálculo no sólo es de importancia para el aprendizaje de las matemáticas, sino también para desarrollar aspectos tales como la memoria, la concentración, la atención, la agilidad mental, etc., además es uno de los mejores y más útiles ejercicios de gimnasia cerebral que puede haber. Pitágoras de Samos ya nos decía en el siglo VI a. C. que “los números gobiernan el mundo”. Si bien esta afirmación respondía a cuestiones cuasi místicas, esta frase no ha dejado de ser cierta en ningún momento a lo largo de la historia.

Haremos, a lo largo de la presentación, algunas operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división. Sugerimos sumar siempre de izquierda a derecha, no de derecha a izquierda, que vaya de lo grande a lo pequeño, ya que ésta es la forma en la que nuestro cerebro opera con mayor facilidad. Imagínate que quieres sumar  $54+33$ . La mejor estrategia es aproximar uno de los sumandos a número exacto y sumarlo por bloques:

$$54 + 33 = 54 + (30 + 3)$$

$$54 + 30 = 84$$

$$84 + 3 = 87$$

Al igual que en la suma, en la resta también es importante la repetición, ejercitar continuamente hasta conseguir hacerlo más rápido. La mejor técnica para hacer restas de números de dos dígitos menos números de dos dígitos vendrá dada por la descomposición del sustraendo en dos partes. Vamos a restar  $67 - 42$

Hacemos este proceso mental:  $67 - (40+2)$

Mentalmente llegamos al  $67-40=27$

Y quitamos otros 2:  $27-2=25$

Para la multiplicación, el método consiste en descomponer la multiplicación en operaciones más sencillas y realizarlas de izquierda a derecha. Imagina que tenemos que multiplicar  $63 \times 7$ . Lo haremos de la siguiente forma:

$$63 \times 7 = 60 \times 7 + 3 \times 7$$

$$60 \times 7 = 420$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$420 + 21 = 441$$



Siempre hay que descomponer la multiplicación en operaciones más sencillas. Imagina que tenemos que dividir 465 entre 8. Lo primero que debemos hacer es una valoración del posible resultado. Dado que  $8 \times 10$  es 80, y  $8 \times 100$  es 800, la respuesta va a ser un número de dos dígitos (un número entre 10 y 100). Ahora recurrimos a nuestra memorizada tabla de multiplicar de un dígito por un dígito y vemos que  $8 \times 5$  es 40 (400 es menor que 465), y que  $8 \times 6$  es 48 (480 es mayor que 465). Como el resultado tiene dos dígitos, va a ser un número entre 50 y 60. Tenemos hecha la aproximación, ya tenemos algo muy importante, no lo olvidemos. Ahora restamos  $465 - 400 = 65$ , y lo dividimos entre 8:  $65/8=8$  (con resto de 1).

Para la suma de dos números uno de ellos termina en 8 o 9:

Vamos a sumar  $26 + 9$ .

Como 9 es próximo a 10, podemos sustituir el 9 por  $(10 - 1)$ . De esta manera, nos queda  $26 + 10 - 1$ .

Ahora sumamos  $26 + 10 = 36$ , y nos queda 1 por restar:  $36 - 1 = 35$ .

Por lo tanto, nos queda que  $26 + 9 = 35$ .

Para la suma de dos números donde uno de ellos termina en 1 o 2:

Vamos a sumar  $24 + 11$ .

Como 11 es próximo a 10, podemos sustituir el 11 por  $10 + 1$ . De esta manera queda  $24 + 10 + 1$ .

Ahora sumamos  $24 + 10 = 34$ . Por último, sumamos el 1 que quedaba:  $34 + 1 = 35$ .

Por lo tanto,  $24 + 11 = 35$ .

En la resta de dos números con el sustraendo terminado en 8 o 9:

Vamos a restar  $54 - 28$ .

Como 28 es próximo a 30, escribimos el 28 como  $30 - 2$ . De esta manera queda  $54 - (30 - 2)$ .

Al haber un signo negativo delante de un paréntesis, la operación resultante es  $54 - 30 + 2$ .

Ahora restamos  $54 - 30 = 24$ . Por último, sumamos  $24 + 2 = 26$ .

Por lo tanto,  $54 - 28 = 26$ .

Para la resta de dos números con el sustraendo terminado en 1 o 2:

Vamos a restar  $37 - 11$ .

Como 11 es próximo a 10, podemos escribir el 11 como  $10 + 1$ . De esta manera queda  $37 - (10 + 1)$ .

Al haber un signo negativo delante de un paréntesis, la operación quedaría  $37 - 10 - 1$ .

Ahora restamos  $37 - 10 = 27$ . Por último, restamos  $27 - 1 = 26$ .

Por lo tanto,  $37 - 11 = 26$ .

Resta de dos números con el minuendo terminado en 8 o 9:

Vamos a restar  $29 - 14$ .



Como 29 es próximo a 30, podemos escribir el 29 como  $30 - 1$ . De esta manera queda  $30 - 1 - 14$ .

Ahora empezamos restando  $30 - 14 = 16$ . Por último, restamos el 1 que nos quedaba  $16 - 1 = 15$ .

Por lo tanto,  $29 - 14 = 15$ .

Resta de dos números con el minuendo terminado en 1 o 2:

Vamos a restar  $32 - 24$ .

Como el 32 es próximo a 30, podemos escribirlo como  $30 + 2$ . De esta manera queda  $30 + 2 - 24$ .

Ahora restamos  $30 - 24 = 6$ . Por último, sumamos el 2 que quedaba  $6 + 2 = 8$ .

Por lo tanto,  $32 - 24 = 8$ .

Bibliografía

Coto García, Alberto; Matemáticas, Trucos y estrategias para ejercitar tu mente; ST Editorial; Edo. de México; 2011.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 5

### LOS LADRILLOS DE EULER

Gabriel Fernández Barneth

Asesora: Dra. Alejandra Soria Pérez

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED

*fernandezgabriel885@gmail.com*

Área: Geometría

Todo el mundo sabe la forma que tiene un ladrillo, pero ¿alguien ha visto un ladrillo perfecto? Los matemáticos no.

Ese fue uno de los sueños del matemático suizo Leonhard Euler. Pero, ¿Quién es este personaje y a qué nos referimos con un ladrillo perfecto?

Euler nació en Basilea (Suiza). Hijo de Paul Euler, un pastor calvinista. Poco después de su nacimiento, su familia se trasladó de Basilea al cercano pueblo de Riehen, en donde Euler pasó su infancia.

La educación formal de Euler comenzó en la ciudad de Basilea, donde le enviaron a vivir con su abuela materna. A la edad de 13 años se matriculó en la Universidad de Basilea y en 1723 recibió el título de maestro de Filosofía tras una disertación comparativa de las filosofías de René Descartes e Isaac Newton. Por entonces, Euler tomaba lecciones

particulares con Johann Bernoulli todos los sábados por la tarde, quien descubrió rápidamente el increíble talento de su nuevo pupilo para las matemáticas.

Euler se dedicaba a estudiar teología, griego y hebreo, siguiendo los deseos de su padre, y con la vista puesta en llegar a ser también pastor. Johann Bernoulli intervino para convencer a Paul Euler de que Leonhard estaba destinado a ser un gran matemático. En 1726 Euler finalizó su Doctorado con una tesis sobre la propagación del sonido bajo el título *de Sono* y en 1727 participó en el concurso promovido por la Academia de las Ciencias francesa por el cual se solicitaba a los concursantes que encontraran la mejor forma posible de ubicar el mástil en un buque. Ganó el segundo puesto, detrás de Pierre Bouguer, que es conocido por ser el padre de la arquitectura naval. Más adelante Euler conseguiría ganar ese premio hasta en doce ocasiones.

Euler llegó a la capital rusa el 17 de mayo de 1727. Fue ascendido desde su puesto en el departamento médico de la Academia a otro en el departamento de matemáticas, en el que trabajó con Daniel Bernoulli, a menudo en estrecha colaboración. Euler aprendió el ruso y se estableció finalmente en San Petersburgo a vivir. Llegó incluso a tomar un trabajo adicional como médico de la Armada de Rusia.

Fue el precursor de la utilización de la letra  $e$  para denotar la base de los logaritmos neperianos. En un escrito sobre ciertos experimentos relacionados con disparos de cañones, ya utilizaba la letra  $e$  en este sentido (quizás por ser la primera letra de exponencial).

Popularizó la utilización de la letra  $\pi$  para denotar la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Fue Euler quien al adoptar también dicho símbolo extendió su uso, dada la popularidad de sus escritos.

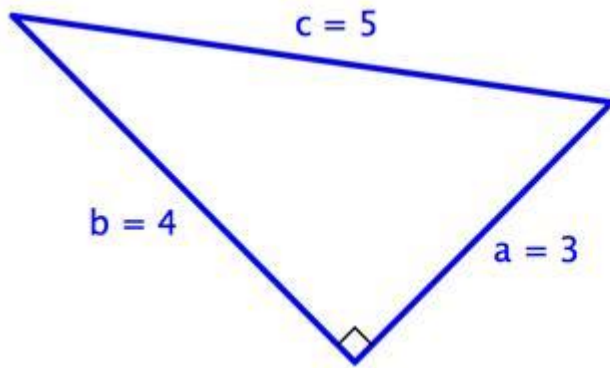
Introdujo la notación  $i$  para raíz de  $-1$ . Euler había utilizado el símbolo  $i$  para denotar lo que podríamos llamar un número infinito.

Notación sobre lados y ángulos la utilización de la letra  $a$ ,  $b$  y  $c$  los utilizó para indicar los lados de un triángulo y las letras  $A$ ,  $B$  y  $C$  para designar los lados opuestos a los mismos, fue introducida por Euler.

Uno de los aportes más importantes de Euler a la notación matemática fue la utilización de  $f(x)$  como forma para denotar el valor de una función  $f$  al aplicarla a un valor  $x$ .

Euler también introdujo la notación moderna de las funciones trigonométricas, el símbolo  $\sum$  para denotar una sumatoria y  $\ln$  para denotar logaritmo de  $x$ .

Regresando a los ladrillos, es fácil dibujar un rectángulo en el que los dos lados sean números enteros. Se hace algo más difícil si queremos que la diagonal sea también un número entero. En un cuadrado de 1 cm de lado, la diagonal tiene 1.41 cm aproximadamente (haciendo uso del Teorema de Pitágoras). Lo mismo ocurre con todos los cuadrados: si los lados son números enteros, la diagonal no puede serlo. Esto es igualmente válido para muchos rectángulos, pero hay algunos que sí satisfacen esa condición. Uno de 3 cm de ancho y 4 cm de alto tiene una diagonal de 5 cm exactos. Otro tiene los lados de 5 cm y 12 cm y la diagonal de 13 cm.

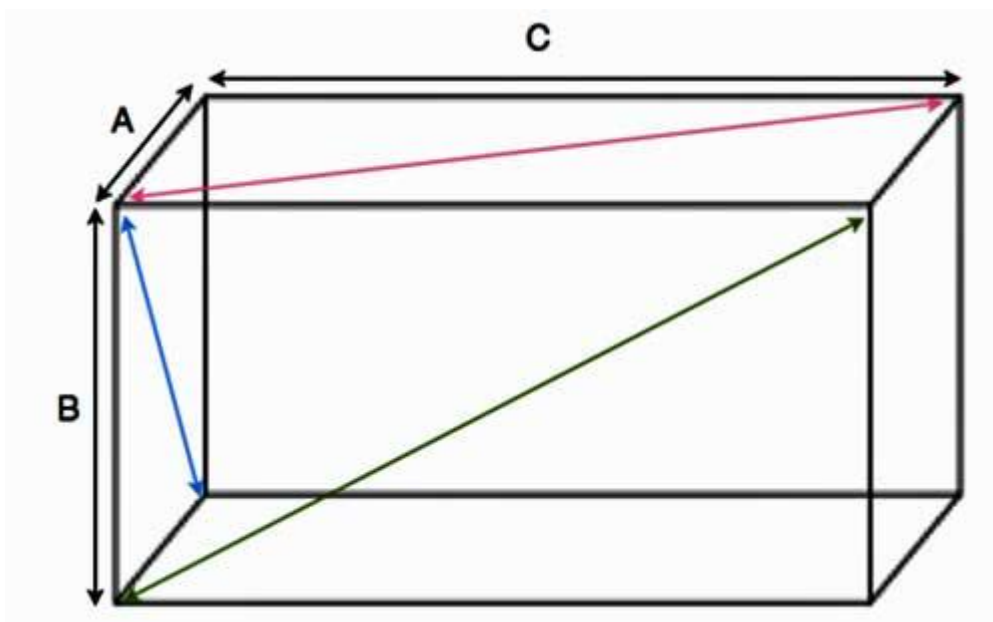


$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(3)^2 + (4)^2 = (5)^2$$

$$9 + 16 = 25$$

Generalizando ésta ideal, el sueño de Euler era un ladrillo (ortocadro) en el que todas las aristas y las diagonales de las caras fueran números enteros. El primero de ellos fue descubierto por Paul Halcke en 1719. Tiene una altura de 44 unidades, una anchura de 117 unidades y una longitud de 240 unidades, con lo que las diagonales de sus caras son 125, 244 y 267. Desde entonces se han descubierto otros. Queda todavía un reto: que la diagonal interna (la que va de un vértice al otro opuesto) sea también un número entero. Un ladrillo así recibiría el nombre de perfecto. Por desgracia, nadie ha encontrado hasta ahora un ladrillo de Euler perfecto y, de hecho, no sabemos si existe.



Tanto si existen como si no, no hay ejemplos “pequeños” de ladrillos perfectos. Con el uso de los ordenadores, los matemáticos han determinado que, si existe un ladrillo perfecto, uno de sus lados deberá tener una longitud de más de  $1 \times 10^{12}$  unidades. Lo más próximo que se ha encontrado son paralelepípedos perfectos, formados por rectángulos y paralelogramos (cuadriláteros no-rectángulos pero con los dos pares de lados paralelos), con todas las dimensiones y diagonales enteras.

#### Bibliografía

R. Brown, R. Elwes, R. Fathauer, J. Haigh, D. Perry, J. Pommersheim; 50 Teorías Matemáticas Creadoras e Imaginativas; Blume; Barcelona, 2012.

Programa general

## Ponencia de Divulgación 6

### APLICACIONES A PROBLEMAS FISICOS Y BIOLOGICOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO TRANSFORMADA DE LA PLACE

Omar Dozal Alcántar

Asesor: Dr. Saúl Nevares Nieto

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*VI\_blackblood\_IX@hotmail.com*

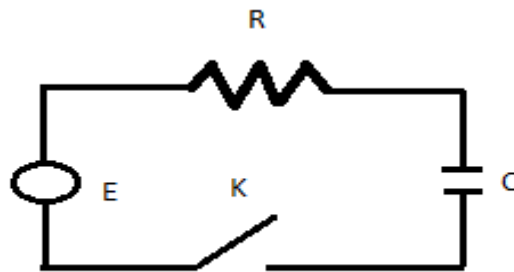
Área: Ecuaciones diferenciales

Una aplicación circuitos eléctricos

#### Ejemplo 1

Un cierto circuito eléctrico consiste de una resistencia de  $R$  ohmios en serie con un condensador de capacitancia  $C$  faradios, un generador de  $E$  voltios y un interruptor. En el tiempo  $t = 0$  el interruptor se cierra. Asumiendo que la carga en el condensador es cero en  $t = 0$ , encontrar la carga y corriente en cualquier tiempo más tarde.

Asuma que  $R$ ,  $C$ ,  $E$  son constantes.



Formulación matemática: Si  $Q$  e  $I = \frac{dQ}{dt}$

Son la carga y la corriente a cualquier tiempo  $t$  entonces por la ley de Kirchhoff

#### La ley de corriente de Kirchhoff

*La suma de todas las corrientes que fluyen hacia adentro de un nodo es igual a cero.*

Ley de voltaje: En un circuito serie el voltaje de la fuente de alimentación es igual a la suma de los voltajes de cada uno de los componentes que conforman el circuito.

Ley de corriente: en un circuito en paralelo la corriente que entrega la fuente es igual a la sumatoria de las corrientes que fluyen a través de cada una de las resistencias que conforman el circuito.

Tenemos:

$$RI + \frac{Q}{C} = E \quad (1)$$

Con condición inicial  $Q(0) = 0$ .

Solución Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de (1) y usando la condición inicial, tenemos, si  $q$  es la transformada de Laplace de  $Q$ ,

$$R\{sq - Q(0)\} + \frac{q}{c} = \frac{E}{s}$$

Usando fracciones parciales:

$$q = \frac{CE}{s(RCs + 1)} = \frac{ER}{s\left(\frac{s+1}{RC}\right)}$$

$$\frac{ER}{RC} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\} = CE \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\}$$

Entonces tomando la transformada inversa de Laplace encontramos:

$$Q = CE \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

## Ejemplo 2

Para el caso donde el generador de  $E$  voltios se reemplaza por un generador con voltaje dado como una función del tiempo por

$$E(t) = \begin{cases} E_0, & 0 < t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$$

Formulación matemática. Remplazando  $E$  en el Ejemplo 1 por  $E(t)$  obtenemos la ecuación diferencial requerida

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = E(t) \quad (2)$$

Con condición inicial  $Q(0) = 0$ . La ecuación (2) también puede expresarse en términos de la función unidad como:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = E_0[1 - H(t - T)] \quad (3)$$

Solución. Método 1

Tomando las transformadas de Laplace de ambos lados de (2) o (3) y usando la condición inicial encontramos

$$\begin{aligned}
 R\{sq - Q(0)\} + \frac{q}{c} &= \frac{Eo(1 - e^{-sT})}{s} \\
 q &= \frac{Eo}{R} - \frac{(1 - e^{-sT})}{s(\frac{s+1}{RC})} = \frac{Eo}{Rs(\frac{s+1}{RC})} - \frac{Eo}{Rs(\frac{s+1}{RC})} e^{-sT} \\
 &= CEO \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{s+1}{RC}} \right\} - CEO \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{\frac{s+1}{RC}} \right\} e^{-sT} \\
 Q &= CEO \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) - CEO \left( 1 - e^{-\frac{(t-T)}{RC}} \right) H(t - T) \\
 &= \begin{cases} CEO \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), & t < T \\ CEO \left( e^{-\frac{(t-T)}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} \right), & t > T \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para  $t = T$  tenemos

$$Q = CEO \left( 1 - e^{-\frac{T}{RC}} \right)$$

Y

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Solución método 2

Usando convolución Sea  $e(s)$  la transformada de Laplace de  $E(t)$ . Entonces como antes tenemos

$$R \left\{ sq - Q(0) + \frac{q}{C} = e(s) \right\}$$

Puesto que  $Q(0)$ .

$$q = \frac{e(s)}{R \left( \frac{s+1}{RC} \right)}$$

Ahora

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{R \left( \frac{s+1}{RC} \right)} \right\} = \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{R}, \quad L^{-1}\{e(s)\} = E(t)$$

Así por convolución

$$Q = L^{-1}(q) = \frac{1}{R} \int_0^t E(u) e^{-\frac{(t-u)}{RC}} du$$

Para  $0 < t < T$

$$Q = \frac{1}{R} \int_0^t Eo e^{-\frac{(t-u)}{RC}} du = CEO \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$\text{para } t > T \text{ tenemos } Q = \frac{1}{R} \int_0^T Eo e^{-\frac{(t-u)}{RC}} RC du = CEO \left\{ e^{-\frac{(t-T)}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} \right\}$$

Concordando con el resultado del método 1

### Una aplicación biológica:

Un líquido transporta una droga en un órgano de volumen  $V \text{ cm}^3$  a una tasa de  $a \text{ cm}^3/\text{seg}$  y sale a una tasa de  $b \text{ cm}^3/\text{seg}$ , donde  $V$ ,  $a$ ,  $b$  son constantes. En el tiempo  $t = 0$  la concentración de la droga es cero y crece linealmente a un máximo de  $k$  en  $t = T$ , en este tiempo el proceso se detiene. ¿Cuál es la concentración de la droga en el órgano en cualquier tiempo  $t$ ?

$$C(t) = f(x) = \begin{cases} \frac{Kt}{T}, & 0 < t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$$

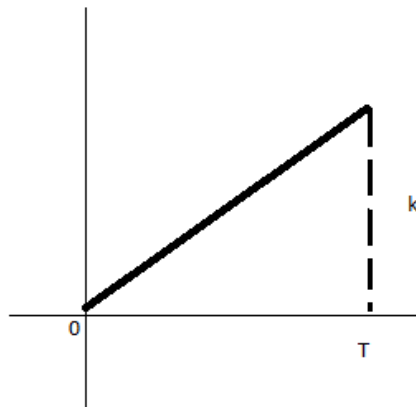
Denotando la concentración instantánea de la droga en el órgano por  $x$ , tenemos así

$$\frac{d}{dt}(xV) = aC(t) - bx, \quad x(0) = 0$$

(4)

Solución Usaremos el método de convolución (Método 2 del Ejemplo 2) para resolver el problema de valor inicial (4) Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial llamando  $L\{x\} = \vec{x}$  y  $L\{c(t)\} = c(s)$  tenemos

$$V\left\{s\left(\vec{x}\right) - x(0)\right\} = ac(s) - b\left(\vec{x}\right)$$



$C(t)$

Luego usando  $x(0) = 0$  produce  $\vec{x} = \frac{ac(s)}{V(s+b)}$

Ahora

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{V(s+b)}\right\} = \frac{a}{V} e^{-\frac{bt}{V}}, \quad L^{-1}\{c(s)\} = C(t)$$

Así por convolucion

$$x = L^{-1} \frac{a}{x} = \frac{a}{V} \int C(u) e^{\frac{-b(t-u)}{V}} du$$

Para  $0 < t < T$  tenemos

$$x = \frac{a}{V} \int_0^t k u e^{\frac{-b(t-u)}{V}} du = \frac{ka}{b} t - \frac{Vka}{b^2} (1 - e^{\frac{-bt}{V}})$$

Para  $t > T$ , tenemos

$$x = \frac{a}{V} \int_0^T k u e^{\frac{-b(t-u)}{V}} du = \frac{Vka}{b^2} e^{\frac{-bt}{V}} + \left(\frac{Vka}{b^2}\right) e^{\frac{-b(t-T)}{V}}$$

El valor de  $x$  para  $t = T$  se encontró al hacer  $t = T$  en cualquiera de estos. Interpretación. Del último resultado notamos que cuando  $t$  aumenta más allá de  $T$  la droga gradualmente desaparece. Sigue que la concentración de la droga en el órgano alcanzará un máximo en algún tiempo que este tiempo está dado por  $t = T$  y que este máximo el cual llamaremos la concentración pico de La droga está dado por

$$\frac{kaT}{b} - \frac{Vka}{b^2} (1 - e^{\frac{-bt}{V}})$$

En la práctica el tiempo de la concentración pico de la droga ocurrirá más tarde que  $T$  debido al hecho de que la droga no entra al órgano instantáneamente, como en el modelo

Bibliografía:

Ecuaciones diferenciales aplicadas. MURRAY R. SPIEGEL. Tercera edición.

Capitulo seis. Solución de ecuaciones diferenciales por transformada de Laplace.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 7

### LA CATENARIA

Candy Jazmín Soto Betancourt, Edwin Bladimir García Velarde

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 8

### EL NÚMERO “e” COMO LÍMITE DE SUCESIONES

Noé Montes López

[Programa general](#)



## Ponencia de Divulgación 9

### LA LOTERÍA, UNA COMPUTADORA Y EL NÚMERO “e” Abraham Duvany Mora Sarabia, Erick Gustavo Torres Ávila

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 10

### EL SELLO DE DIOS

Cecilia Ruíz Morales

Asesor: M.C. Enrique Vargas Betancourt

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*cecy0209@outlook.es*

Área: Geometría, trigonometría, aritmética, álgebra.

El tema a exponer puede ser nombrado de diferentes maneras: razón extrema y media, media aurea, razón dorada, razón aurea, número de oro, proporción aurea, divina proporción...o el más conocido de todos: número áureo. Este número irracional representado por la letra griega  $\varphi$  (phi) (en minúscula) o  $\Phi$  (Phi) (en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias.

La ecuación se expresa de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948$$

Este famoso número algebraico posee muchas propiedades muy interesantes lo que ha maravillado a los matemáticos durante siglos, siendo este descubierto desde la antigüedad. Y nace no como una expresión aritmética, sino como una relación o proporción entre dos segmentos de una recta, es decir, una construcción geométrica.

En la antigüedad se cree que se utilizó para la construcción de diferentes obras arquitectónicas de Babilonia y Asiria, sin embargo, esto no ha sido demostrado ya que puede que ellos no lo conocieran o no lo manejaran conscientemente. El primero en hacer un estudio formal sobre este número fue el matemático griego Euclides quien lo definió de la siguiente manera:

*“Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor”.*

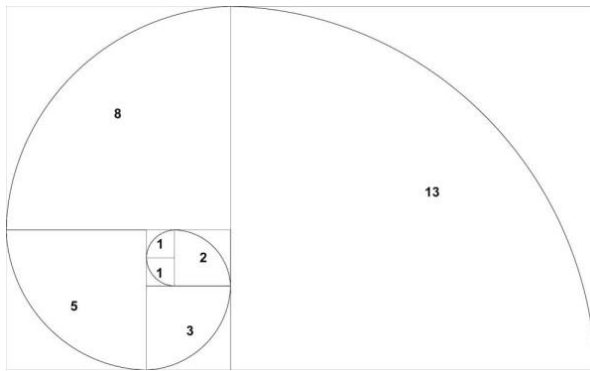
Euclides Los Elementos Definición 3 del Libro Sexto

Otro matemático que contribuyó bastante fue Leonardo De Pisa más conocido como Fibonacci, quien creo la “Sucesión de Fibonacci” la cual está muy relacionada y lleva implícito al número áureo, ya que estriba en que al dividir cada número con el anterior de la serie se obtiene una cifra cada vez más cercana a 1.61803, quedando el resultado alternativamente por debajo y por encima del número preciso, sin llegar nunca a alcanzarlo absolutamente.

Analizando detenidamente este tema, conviene distinguir tres componentes distintos en la historia del número áureo:

- ✚ El número de oro
- ✚ La divina proporción
- ✚ La sucesión de Fibonacci

Los tres ya fueron mencionados y como nos podemos percatar cada uno se dio por separado pero tienen al final de cuentas una estrecha relación como la tiene también (se maneja implícitamente en la sucesión de Fibonacci la cual permite su construcción) *la espiral áurea o espiral de Fibonacci*, que es la representación geométrica de la sucesión.



*Representación geométrica de la sucesión de Fibonacci conocida como “La Espiral Áurea”*

Con el paso de los siglos se fueron haciendo más estudios sobre esta proporción descubriendo que posee varias cualidades y tiene presencia en varios ámbitos y ciencias volviéndolo un baúl de curiosidades y maravillas. Se atribuye belleza a todo aquello que lo posee volviendo perfecto a su dueño. Por lo cual, siendo phi sinónimo de estas dos cualidades y estando presente en la creación se le ha llegado a llamar, y no de manera muy conocida pero si bien acertada, *El Sello de Dios*.

#### Referencias Bibliográficas

##### Libros

Ghyka, Matila (1992), El Número de Oro, Barcelona: Poseidón, S.L..ISBN 9788485083114

Pacioli, Luca (1991), La Divina Proporción, Tres Cantos: Ediciones Akal, S.A.. ISBN 9788476007877

##### Artículos

[http://www.elconfidencial.com/tecnologia/2014-10-14/treinta-cosas-que-no-sabias-sobre-el-numero-aureo\\_231903/](http://www.elconfidencial.com/tecnologia/2014-10-14/treinta-cosas-que-no-sabias-sobre-el-numero-aureo_231903/)

<http://www.abc.es/20100415/ciencia-tecnologia-matematicas/numero-aureo-belleza-matematica-201004151848.html>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 11

### LA MATEMÁTICA EN RELACIÓN CON LOS ELECTROCARDIOGRAMAS

Erick Assael Beltrán Hernández

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 12

### CUBRIENDO EL PLANO CON POLÍGONOS

Eyvette Mercado Favela

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*eyvette\_mercado@hotmail.com*

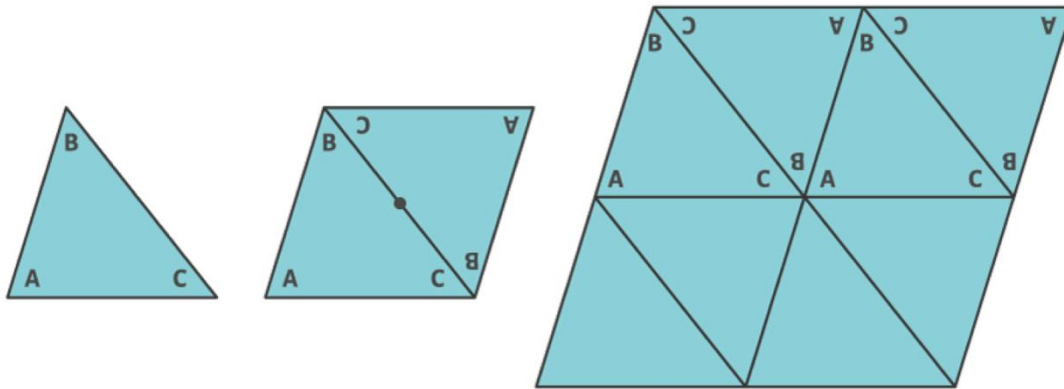
Área: Geometría

El problema de determinar cuáles son los polígonos o combinaciones de polígonos que pueden cubrir el plano sin superposiciones es uno de los más bellos de la matemática. A pesar de su formulación elemental, que permite que hasta el más inexperto investigador pueda trabajar en él, se trata de un problema complejo y profundo, con ramificaciones hacia varias líneas de la matemática y otras ciencias, y permanece aún abierto en muchas direcciones.

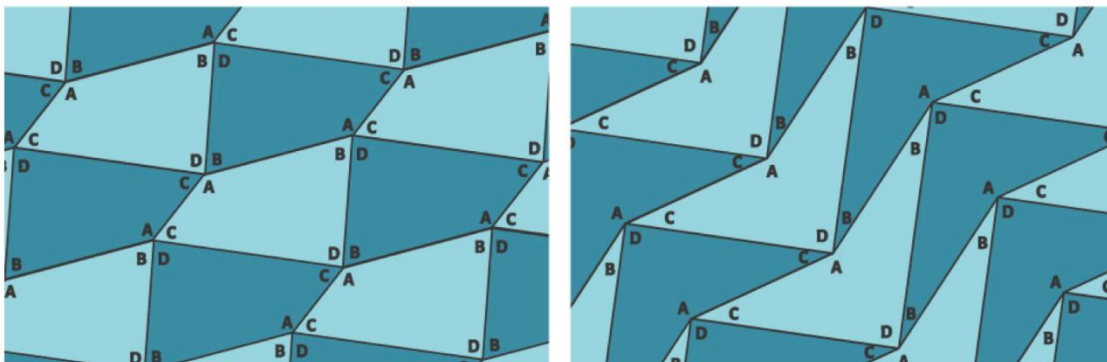
El tema atrajo obviamente la atención desde tiempos remotos. Por ejemplo, era muy conocido en la antigüedad que, entre los polígonos regulares, sólo los triángulos, cuadrados y hexágonos pueden embaldosar el plano, quedando imposibilitados los polígonos de más de seis lados por “razones de espacio” y el pentágono por ser un “caso exótico”. Más tarde, Johannes Kepler se interesó en determinar las combinaciones de distintos polígonos regulares que permiten cubrir el plano.

El problema se vuelve más interesante cuando se considera polígonos irregulares, siendo ya el caso de los polígonos convexos suficientemente complejo. En esta dirección, en 1978, Ian Niven I. dio una sencilla y hermosa demostración de que ningún conjunto finito de polígonos convexos de más de seis lados puede embaldosar el plano. De hecho, el resultado de Niven se aplica a conjuntos infinitos siempre que estos no incluyan sucesiones de polígonos cuya geometría “degenere”, haciéndose cada vez más “achatados”.

Restringamos, entonces, la discusión a embaledos por un único polígono de no más de seis lados. Como veremos más adelante, cualquier triángulo cubre el plano si se le dispone de manera astuta. Lo mismo sucede con cualquier cuadrilátero, sea convexo o no.



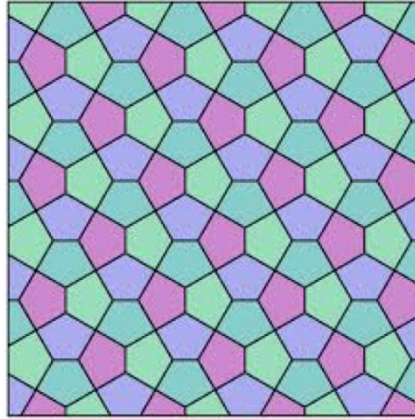
Puesto que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es  $180^\circ$ , una disposición adecuada de éste permite tapizar el plano.



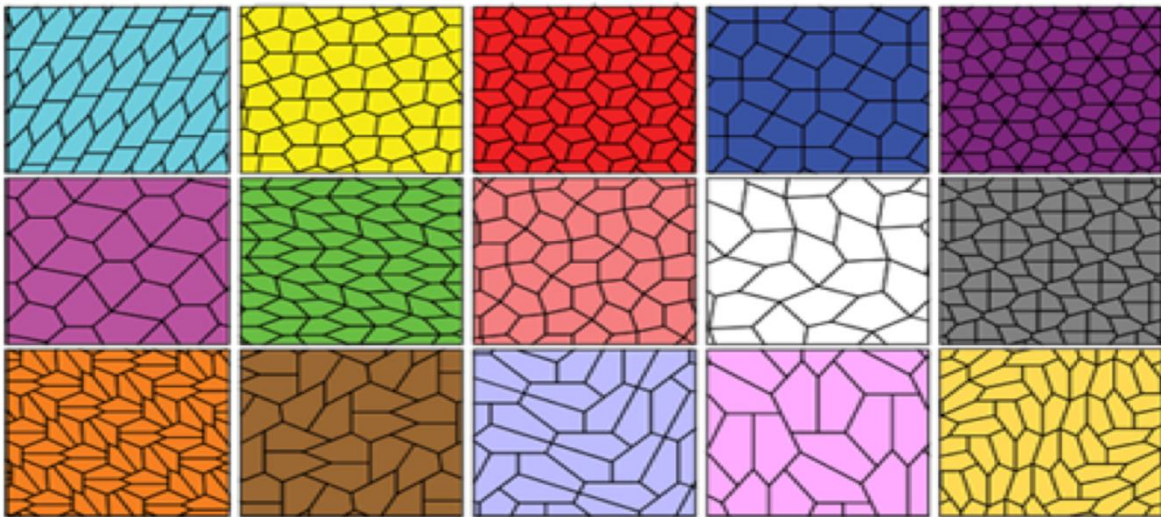
Embaledos por cuadriláteros, el segundo de los cuales se obtiene gracias a una feliz “coincidencia total de cóncavo y convexo”.

Históricamente, el tratamiento del problema de los hexágonos convexos que embaledan el plano precedió al de los pentágonos. Para los primeros, todas las diferentes posibilidades fueron descritas por Karl Reinhardt en su tesis doctoral de 1918, de cuya comisión examinadora formó parte nada menos que David Hilbert. Lamentablemente, este trabajo es muy extenso y complejo. De acuerdo a uno de los especialistas del tema, Branko Grünbaum, “tanto la tesis de Reinhardt como trabajos posteriores en este tema específico son tremendamente complicados, y muy probablemente incompletos; sería muy útil retomarlos hasta obtener una simplificación que sea digerible”.

La historia del problema de determinar cuáles son los pentágonos convexos que embaledan el plano, aún inconclusa, es de lo más insólito en la matemática reciente. Tras décadas de trabajo, la solución fue anunciada por Richard Kershner en 1968. Según él, habría sólo ocho tipos de pentágonos que logran cubrir el plano. Cabe señalar que no se trata de pentágonos en particular, sino más bien de grupos conformados por pentágonos con características particulares comunes. Por ejemplo, el plano es cubierto por todo pentágono de lados  $a, b, c, d, e$  y ángulos  $A, B, C, D, E$  en el que  $b$  y  $c$  tengan la misma longitud,  $d$  y  $e$  midan lo mismo, y  $B$  y  $D$  sean ángulos rectos.

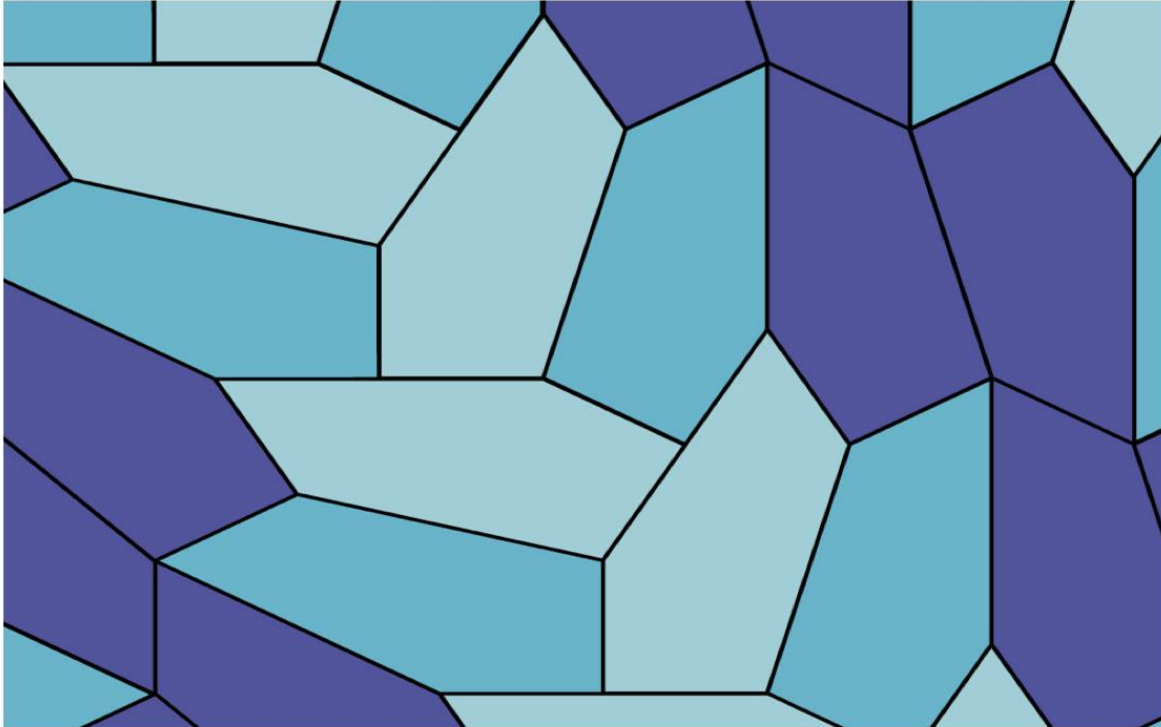


Algunos años más tarde, en 1985, Rolf Stein dio con un embalado pentagonal más . La particularidad del pentágono asociado es que no pertenece a una familia grande, sino que tiene medidas angulares muy precisas ( $A=90^\circ$ ,  $B\sim 145.34^\circ$ ,  $C\sim 69.32^\circ$ ,  $D\sim 124.66^\circ$ ,  $E\sim 110.68^\circ$ ). Hasta ese instante, la lista quedaba en 14 tipos de pentágonos. El problema quedaría prácticamente enterrado y sin ningún avance por mucho tiempo.

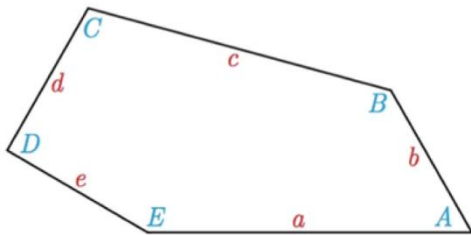


Hubo que esperar 30 años para que un nuevo pentágono aflorara. Usando un algoritmo computacional, el equipo formado por Case Mann, Jennifer McLoud y David von Derau logró dar, en 2015, con un decimoquinto embalado pentagonal, ilustrado al final del cuadro más arriba y reproducido en detalle a continuación.





Nuevamente se trata de un pentágono muy preciso y sorprendentemente sencillo. De hecho, tal como se observa más abajo, ni las medidas de sus ángulos ni las proporciones entre las longitudes de sus lados son extraordinariamente exóticas. Este pentágono hubiese podido perfectamente ser descubierto décadas antes.



$$A = 60^\circ, B = 135^\circ, C = 105^\circ, D = 90^\circ, E = 150^\circ$$

$$a : b : c : d : e = 2 : 1 : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} : 1 : 1$$

Pero este descubrimiento no cierra en absoluto el problema. Por el contrario, lo vuelve aún más interesante. ¿Se podrá agregar aún otro pentágono a la lista? ¿Se podrán agregar infinitos? Tan difícil es adivinar la respuesta como arriesgado es aventurar una conjetura al respecto.

### Referencias

- 1.- Niven. Convex polygons that cannot tile the plane. American Math. Monthly 54 (1978), 785-792.
- 2.- B. Grünbaum. Comunicación personal.
- 3.-D. Schattschneider. Tiling the plane with congruent pentagons. Math. Magazine 51 (1978), 29-44.
- 4.- [Euclidean tilings by convex regular polygons](#), artículo de Wikipedia.

## Ponencia de Divulgación 13

### INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MATEMÁTICA

Josué Isaac Soto Odriozola, Jonathan Iván Torres Valenzuela

Asesora: Dra. Alejandra Soria Pérez

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*josue\_isaac\_24@hotmail.com, prococo\_love@outlook.com*

Área: Historia de la Lógica Matemática

El origen de la lógica como ciencia formal, se remonta a los tiempos de Aristóteles (siglo IV a.C.) quien fue su creador, con el nombre de analítica, formulando sus principios enlistados en el *Órganon* [2].

La palabra “lógica” proviene del griego *logos* que significa razón, o razón fundamental o formula racional que define el “que es”. Lógica es el estudio de los principios y métodos utilizados para distinguir un razonamiento correcto y uno que no lo es.

La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. El razonamiento lógico se emplea en Matemáticas para demostrar teoremas, sin embargo, se usa en forma constante para realizar cualquier actividad en la vida [1].

La lógica matemática ha estado presente a lo largo de la historia del hombre. Gracias a eso el hombre ha podido simplificar procesos en tareas simples, al razonar y aplicar métodos para la solución de problemas y así, facilitar sus actividades.

Sólo desde hace algunos años se han establecido relaciones sistemáticas entre la Lógica y la Matemática. En la mente de todos los matemáticos modernos está el concepto de axioma y la deducción de teoremas a partir de axiomas. No se puede poner en duda la importancia en la matemática moderna, de la teoría de la demostración y de la metodología en la deducción de teoremas a partir de axiomas. Sin embargo, el desarrollo de la destreza en los razonamientos deductivos, ha sido considerado como de interés secundario en los planes de enseñanza de especialización matemática [3].

Cuando razonamos usamos argumentos para apoyar nuestras ideas o conclusiones. Los argumentos están constituidos por premisas las cuales son oraciones que afirman o niegan algo, estas pueden ser verdaderas o falsas.

Si las premisas de un argumento son verdaderas, entonces se garantiza que la conclusión sea verdadera, a su vez, confirma que el argumento es válido.

Al utilizar las matemáticas, necesitamos ordenar nuestro pensamiento, y así, darle una solución lógica a los problemas o trabajos que tengamos que realizar, además de permitirnos la concepción de nuevas ideas, teniendo siempre en cuenta a la lógica en el momento de formularlas para evitar contradicciones o paradojas con el conocimiento ya establecido y así, generar nuevo conocimiento.

La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática. Es considerada una oración declarativa que puede ser calificada como verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. Toda proposición consta de tres partes: un sujeto, un verbo y un complemento referido al verbo. Por ejemplo, México se encuentra en Europa,  $15-6 = 9$ ,  $2x - 3 > 7$ ,  $x=6$ , Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año.

Una proposición categórica es una oración declarativa que relaciona dos clases, conjuntos, o categorías. Las dos clases, en cualquier proposición categórica, se colocan en una relación de sujeto-predicado. Algo es predicado, o dicho acerca de un sujeto. Lo que se dice es que una clase (el término sujeto) está incluida o excluida de la clase del predicado (término predicado). Por ejemplo, “Ningún soltero está casado”. Ésta proposición establece que la clase de los solteros (el sujeto) está completamente excluida de la clase de los casados (el predicado). De manera semejante, decir que “Todos los chimpancés son primates” es afirmar que cualquier sujeto que sea un chimpancé estará incluido en la clase de los primates (el predicado).

Existen cuatro clases de proposiciones categóricas.

**A.** Universal afirmativa: Todo S es P

**E.** Universal negativa: Ningún S es P

**I.** Particular afirmativa: Algún S es P

**O.** Particular negativa: Algún S no es P

En el estudio de la lógica se establecen los silogismos, que son una forma de razonamiento que consta de 2 premisas; una mayor y una menor y una conclusión. En este tipo de razonamiento para ser válido, la conclusión debe de inferirse en base a lo que afirman o niegan sus 2 premisas.

Las figuras son las formas que reviste el silogismo según la posición que el término medio ocupe en las premisas. Hay cuatro figuras posibles, puesto que el término medio puede ser: 1° sujeto de la mayor y predicado de la menor; 2° predicado de la mayor y de la menor; 3° sujeto de la mayor y de la menor; 4° predicado de la mayor y sujeto de la menor.

Los modos del silogismo son las configuraciones de cada figura, según las proposiciones sean A, E, I, O; es decir, tomando en consideración la cantidad y cualidad de las proposiciones. Son 19 casos lícitos o aptos para concluir. Los lógicos medievales los denominaban con reglas mnemotécnicas: cada caso legítimo recibe un nombre cuyas tres vocales indican el tipo de proposición de la premisa mayor, la menor y la conclusión.

### Por ejemplo:

Ferio indica que partiendo de dos premisas E-I, se concluye O. Los modos que concluyen con corrección formal son:

**1ª figura:** barbara, celarent, darii, ferio.

**2ª figura:** Cesare, Camestres, Festino, Baroco.

**3ª figura:** Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison.

**4ª figura:** Bamalip, Camenes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Por otro lado, en la lógica se busca evitar a las paradojas y a las falacias.



Una paradoja, del latín *paradoxus* (que, a su vez, tiene su origen en la lengua griega), es una figura retórica que consiste en la utilización de expresiones que envuelven una contradicción. Esto quiere decir que, más allá de las condiciones contradictorias, los factores presentados resultan válidos, reales o verosímiles.

Un ejemplo clásico es la llamada paradoja de “El barbero de Russell”, la cual se describe enseguida:

Un forastero preguntó en una ocasión a un barbero si tenía mucha competencia. “Ninguna en absoluto” contestó el barbero. “De todos los hombres del pueblo, naturalmente que no afeito a los que se afeitan solos, pero afeitado a todos los que no se afeitan solos”.

Esta observación parece muy inocente hasta que nos paramos a pensar en el caso del barbero mismo. ¿Se afeita él solo o no? Supongamos que sí; entonces hay que clasificarlo entre los que se afeitan solos. Pero el barbero no afeita los que se afeitan solos. Por lo tanto, no se afeita solo. Bien, pues supongamos que no se afeita solo; entonces hay que clasificarlo con los que no se afeitan solos, pero como el barbero afeita a todos los que no se afeitan solos, resulta que sí se afeita solo.

He aquí una situación verdaderamente embarazosa, ya que si el pobre barbero se afeita solo, resulta que no se afeita, y sin no se afeita, resulta que sí se afeita. ¡Ni dejándose crecer la barba podrá salir de este lío!

Por otro lado, una falacia lógica es un razonamiento aparentemente correcto, pero que en realidad no lo es. Ejemplos de falacias son: “Eres un criminal si cortas a personas. Los cirujanos cortan personas. Por tanto, los cirujanos son criminales”.

La conclusión no tiene porqué ser falsa, pero el razonamiento es incorrecto, por lo que sí es cierta, es casualidad. Las falacias lógicas tratan de justificar ideas que usando la razón son injustificables. Son explotadas a menudo por políticos y medios de comunicación para engañar a la gente. Puede que en algún momento incluso tú, inconscientemente, las hayas utilizado. Por suerte, las falacias lógicas están identificadas y clasificadas, ejemplos de ellas tenemos:

**Apelación a la Autoridad:** El argumento se da por cierto ya que es defendido por una autoridad.

**Apelación a la Multitud:** El argumento se da por cierto porque "todo el mundo lo hace".

**Causa Falsa:** Se ha confundido correlación con causalidad.

**Continuo:** No se pueden distinguir casos extremos cuando hay casos intermedios de clasificación ambigua.

**Contra el hombre:** Se ataca a la persona en lugar de al argumento.

**Hombre de Paja:** Se ha tergiversado el argumento para que sea más fácil de atacar.

**Falsa Dicotomía:** De todas las opciones posibles, se han tenido en cuenta sólo dos.

**Inconsistencia:** Los argumentos no podrían ser ciertos todos a la vez.

**No se sigue:** Los argumentos dados son irrelevantes.

En conclusión, la lógica es fundamental a la hora de expresar correctamente nuestras ideas, ya que tenemos que apoyarlas con argumentos válidos.

Por lo tanto, en la práctica matemática se debe seguir el mismo procedimiento para hacer las cosas correctamente. Es necesario expresar correctamente nuestras ideas y fundamentarlas con razonamientos validos evitando falacias y paradojas.

### **Bibliografía**

- [1] Copi Irving, Introducción a la lógica, “Limusa”; Editorial. Pp.4
- [2] Dr. Becerra, José Manuel, Matemáticas Básicas, Lógica Matemática, pp. 1
- [3] Lalande André, Vocabulario técnico y crítico de la filosofía, Argentina, “El Ateneo” Editorial,1966, pp. 586
- [4] Suppes Patrick, Hill Shirley, Primer curso de lógica matemática, Colombia “Reverté” Editorial pp. 5
- [5] <http://falaciaslogicas.com/>
- [6] <http://definicion.de/paradoja/>
- [7] <http://www.abc.com.py/articulos/proposiciones-categoricas-702478.html>
- [8] <http://recursostic.educacion.es/bachillerato/proyectofilosofia/web/A3-4c.htm>

### Programa general

## **Ponencia de Divulgación 14**

### **TEOREMA DE PICK A TRAVÉS DEL TEOREMA DE MINKOWSKI**

Brayam Antonio Moreno González, Celene Yajahira Conde Ramírez

Asesor: M.C Adriana Escobedo Bustamante

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*brayam02@gmail.com, celenekonde15@gmail.com*

*Área: Geometría*

El Teorema de Pick fue demostrado por Georg Alexander Pick (1859 - 1942). Pick nació en Viena, Austria. Estudió matemáticas y física en la Universidad de Viena. Su trabajo matemático fue extremadamente amplio, alrededor de 67 documentos de muchos temas. Sin embargo, parte de su popularidad se debe al teorema que lleva su nombre, el cual apareció en el año de 1899, en un artículo llamado “Geometrisches zur Zahlenlehre” publicado en Praga. Pick moría los 82 años en un campo de concentración nazi tras la invasión de lo que hoy en día se conoce como Republica Checa.

Abordaremos resultados que fueron estudiados por Hermann Minkowski, creador y uno de los impulsores de la denominada geometría de números dedicada al estudio de los cuerpos convexos en el contexto de la teoría de retículas. En dichos resultados estudiaremos tan importantes como la relación existente entre el volumen de los poliedros y la cantidad de puntos de la retícula que poseen.

## Redes de Puntos

Algunas definiciones básicas, necesarias para el desarrollo del tema.

**Definición 1.** Un punto  $P$  de coordenadas  $(x,y)$  se llaman enteros si  $x,y$  son números enteros, es decir, si  $x,y \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 2.** Una red de puntos  $M$  (red reticular  $M$ ), es aquella que está formada por puntos enteros (**reticulares**) en el plano cartesiano.

**Definición 3.** Una red poligonal  $P$  (retículo poligonal  $P$ ), es un polígono simple, cuyos vértices son enteros (reticulares).

Un polígono  $P$  es simple si los vértices no coinciden unos con otros, ninguno de los vértices cae en uno de los lados del polígono y dos lados cualesquiera no se cortan.

**Definición 5.** Un triángulo es primitivo (o elemental) si no tiene puntos enteros en el interior y sus vértices son los únicos puntos enteros que tiene en su frontera.

## Teorema de Pick

El teorema establece que el área  $P$  de toda red poligonal es:

$$P = I + \frac{B}{2} - 1$$

Donde  $I$  el número de puntos enteros interiores a  $P$  y  $B$  es el número de puntos enteros de la retícula sobre la frontera de  $P$ .

La estructura de la demostración es: primero probar que la fórmula de Pick es válida para rectángulos y triángulos. Luego, probar que si la fórmula de Pick vale para dos redes poligonales con interiores disyuntos y con un lado en común, entonces vale para la unión finalmente demostrar que toda red poligonal se puede triangularizar, es decir, descomponer en triángulos disyuntos. Finalmente se probará el teorema de Pick mediante el teorema de Minkowski.

**Notación:** En adelante, se notara  $A(Q)$  el área de un polígono  $Q$  y  $P(Q)$  a la fórmula de Pick para el polígono  $Q$

**Fórmula de Pick válida para rectángulos.**

Sea  $R$  una red rectangular, con lados paralelos a los ejes, entonces  $A(R) = P(R)$ .

**Demostración.** Sea  $R$  una red rectangular, de  $m \times n$ , entonces  $R$  tiene un total de  $T = (m+1)(n+1)$  puntos. El lado de distancia  $m$  tiene  $m+1$  puntos y el de distancia  $n$  tiene  $n+1$  puntos, luego los puntos de la frontera de  $R$  son:

$$B = 2(m+1) + 2(n+1) - 4 = 2m + 2n$$

Se restó cuatro ya que se contaron dos veces los puntos de las "esquinas". Luego los puntos interiores son:

$$\begin{aligned} I &= T - B \\ &= (m+1)(n+1) - (2m+2n) \\ &= mn + m + n + 1 - 2m - 2n \\ &= mn - m - n + 1 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(R) &= I + B/2 - 1 \\ &= (mn - m - n + 1) + (2m + 2n)/2 - 1 \\ &= mn = A(R) \end{aligned}$$

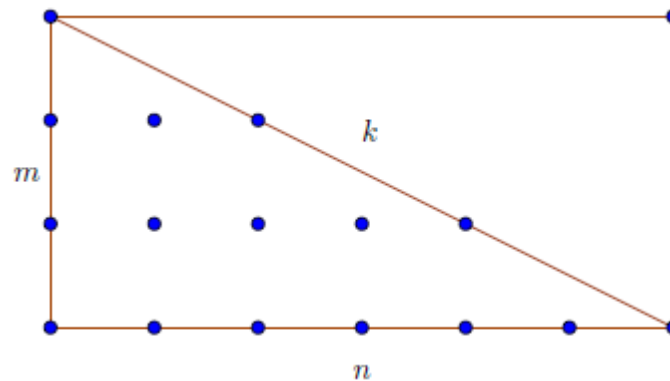
Así la fórmula de Pick se cumple para los rectángulos con lados paralelos a los ejes.

### Fórmula de Pick válida para triángulos.

Sea  $\Delta$  un triángulo rectángulo sobre una red, con un cateto vertical (y por lo tanto el otro horizontal), entonces  $A(\Delta) = P(\Delta)$ .

**Demostración.** Sea un triángulo rectángulo de catetos  $m$  y  $n$ . Así los lados  $m$  y  $n$  tienen respectivamente  $m + 1$  y  $n + 1$  puntos. Sea  $k$  los puntos de la diagonal (sin contar los extremos) entonces

$$B = (m + 1) + (n + 1) + k - 1 = m + n + k + 1$$



Sea  $\Delta$  el rectángulo formado uniendo  $\Delta$  y su simétrico respecto a la hipotenusa, es decir que el total de puntos interiores en  $R$  es  $mn - m - n + 1$ .

Si a estos se restan los  $k$  puntos de la diagonal, entonces, el número de puntos interiores a cada lado de la diagonal, que es igual al total de puntos interiores de  $\Delta$  son:

$$I = \frac{(mn - m - n + 1 - k)}{2}$$

Aplicando el Teorema de Pick, se obtiene que:

$$\begin{aligned} P(TR) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \frac{mn - m - n + 1 - k}{2} + \frac{m + n + k + 1}{2} - 1 \\ &= \frac{mn + 2}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2} \\ &= A(\Delta) \end{aligned}$$

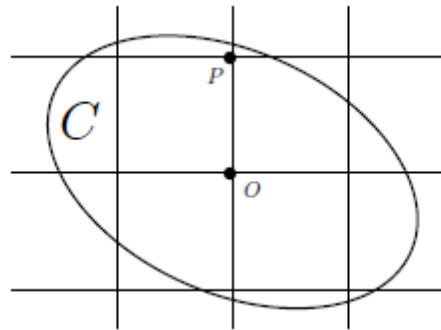
Así la fórmula de Pick se cumple para los triángulos rectángulos con algún cateto vertical.

### Teorema de Minkowski

El teorema de Minkowski señala que dada una región  $C$  acotada, convexa y simétrica respecto a un punto reticular  $O$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si el volumen de  $C$  es más mayor que  $2^n$ , entonces  $C$  contiene al menos un punto reticular diferente de  $O$ .

### Observación

En dos dimensiones el teorema, muy intuitivo, se puede enunciar de la siguiente manera: Sea  $C$  una figura convexa y simétrica respecto a un punto reticular  $O$ . Si el área de  $C$  es mayor que 4 veces el área de una celda del retículo, entonces, en el interior de  $C$  hay al menos un punto reticular diferente de  $O$ .



**Demostración. (Teorema de Minkowsky a  $\mathbb{R}^n$ )** Sin pérdida de generalidad, por simetría, podemos suponer  $O = (0, 0)$ . Sea la función  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \frac{C}{2} = \left\{ \frac{y}{2} : y \in C \right\} \\ 0 & \text{De otra manera} \end{cases}$$

Ahora definimos la función  $\varphi(x)$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x + \lambda)$$

La función  $\varphi$  es acotada e integrable en  $[0,1]^n$  (ya que  $\frac{C}{2}$  es acotado y  $x + \lambda \in \frac{C}{2}$  un numero finito de veces), así

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} \varphi(x) dx &= \int_{[0,1]^n} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x + \lambda) dx = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} \varphi(x + \lambda) dx \\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx &= \text{vol} \left( \frac{C}{2} \right) = \frac{\text{vol}(C)}{2^n} > 1 \end{aligned}$$

Dado que  $\varphi$  es una función entera y la integral es superior a 1 resulta que  $\varphi(x) \geq 2$  en algún punto  $x$ . Es decir, hay dos puntos en  $\frac{C}{2}$ ,  $x + \lambda_1$  y  $x + \lambda_2$ , la diferencia de los dos es que tiene coordenadas enteras y diferentes a  $(0,0)$  ya que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Sean  $\frac{P_1}{2} = x + \lambda_1$  y  $\frac{P_2}{2} = x + \lambda_2$  con  $P_1, P_2 \in C$ , estos puntos (ya que  $\frac{P_2 - P_1}{2} = \lambda_1 - \lambda_2$  es un punto reticular de diferente de cero). Como  $P_2 \in C$ , por simetría tenemos que  $-P_2 \in C$ , y como  $P_1 \in C$ , por

convexidad tenemos  $\frac{P_2 - P_2}{2} \in C$ . Por tanto  $\frac{P_2 - P_2}{2}$  es un punto reticular de  $C$ , diferente de cero, como queríamos demostrar.

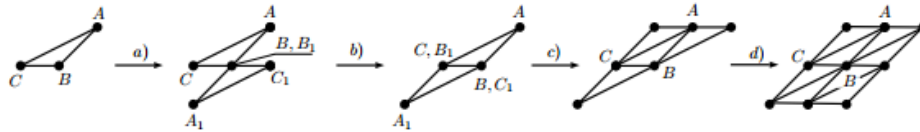
Ahora utilizaremos el teorema de Minkowsky para demostrar que el área de un triángulo elemental es  $\frac{1}{2}$ .

**Lema: El área de un triángulo elemental es  $\frac{1}{2}$ .**

**Demostración:**

Sea  $ABC$  un triángulo elemental. Si lo rotamos  $180^\circ$  obtenemos el triángulo  $A_1, B_1, C_1$ . Ahora hagamos una traslación sobre  $A_1, B_1, C_1$ , de manera que el lado  $B_1C_1$  coincida con el lado  $CB$  del triángulo original.

Dado que los únicos puntos reticulares de  $ABC$  son los vértices, la nueva figura sólo tiene como puntos reticulares a los vértices. Si repetimos el último proceso para los demás lados de  $ABC$ , obtenemos una figura triangular sin puntos reticulares en el interior. Si rotamos este triángulo  $180^\circ$  obtenemos una figura acotada, convexa y simétrica respecto a  $B$ .



El único punto reticular de esta figura es  $B$ , que por simetría podemos tomar como el origen de coordenadas. Por el teorema de Minkowsky, esta figura tiene área de 4 como máximo y, dado que la figura contiene 8 veces el área de  $ABC$  deducimos que el área de  $ABC$  es  $\frac{1}{2}$  como máximo.

Si ahora demostramos que el área de  $ABC$  es  $\frac{1}{2}$  como mínimo, ya habremos demostrado el teorema. Sea  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  las coordenadas de  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente, el área de  $ABC$  es el valor absoluto es el determinante

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Notar que todas las coordenadas son enteras, el valor absoluto del determinante ha de ser igual o superior a 1 y, por lo tanto, el área de  $ABC$  es  $\frac{1}{2}$  como mínimo, como queríamos demostrar.

### Referencias Bibliográficas

*C. Blatter, Another proof of Pick's theorem, Math. Mag. 70 (1997) 200.*

*Bogomolny, A proof of Pick's theorem, "Cut-the-Knot" website, [http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick\\_proof.shtml](http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick_proof.shtml).*

*M. Brion and M. Vergne, Lattice points in simple polytopes, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997) 371–392.*

- R. Diaz and S. Robins, *Pick's formula via the Weierstrass  $\wp$ -function*, this MONTHLY 102 (1995) 431–437.
- The Ehrhart polynomial of a lattice polytope*, *Annals of Math.* 145 (1997) 503–518.
- E. Ehrhart, *Sur un probl`eme de g´eom´etrie diophantienne lin´eaire I*, *J. Reine Angew. Math.* 226 (1967) 25–49.
- Sur un probl`eme de g´eom´etrie diophantienne lin´eaire II*, *J. Reine Angew. Math.* 227 (1967) 25–49.
- R. Fritsch, *Georg Pick und Ludwig Berwald—zwei Mathematiker an der Deutschen Universit¨at in Prag*, *Schr. Sudet.dtsch Akad. Wiss. K¨unste Forsch.beitr. Nat.wiss.* 22 (2001) 9–16.
- W. W. Funkenbusch, *From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem*, this MONTHLY 81(1974) 647–648.
- H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig-Berlin (1896); reprinted by Chelsea, New York, 1953.
- M. R. Murty and J. Esmonde, *Problems in Algebraic Number Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2005.
- G. Pick, *Geometrisches zur Zahlentheorie*, *Sitzungber. Lotos (Prague)* 19 (1899) 311–319.
- J. E. Reeve, *On the volume of lattice polyhedra*, *Proc. London Math. Soc.* 7 (1957) 378–395.
- R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, Dover, New York, 1999.
- D. E. Varberg, *Pick's theorem revisited*, this MONTHLY 92 (1985) 584–587.

### Referencias Electronicas.

<http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/76483/memoria.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Ultima Fecha Visitada (25 de mayo del 2017 11:07 pm.)

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 15

### FUNCIONES CONTINUAS, ¿SON TODAS DERIVABLES EN TODOS LOS PUNTOS?

Juan Antonio Aguilar García

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

Existen distintos tipos de funciones dentro de las matemáticas, una de ellas son las funciones continuas que, intuitivamente, son aquellas para las cuales los puntos cercanos del dominio se



producen pequeñas variaciones en los valores de la función; aunque en rigor, en un espacio métrico como en variable real, significa lo contrario, que pequeñas variaciones de la función implican que deben estar cercanos los puntos.

Cuando un estudiante acaba de ingresar a la carrera, incluso en los primeros semestres creemos que todas las funciones continuas son diferenciables, o por lo menos que son diferenciables excepto en un número finito de puntos, como es el caso de la función valor absoluto, Esta situación no solo es algo que nos ocurre a los estudiantes. A principios del siglo XIX, los matemáticos pensaban que una función continua en un intervalo era derivable en “casi todos” los puntos de ese intervalo. Aun más, en 1806, el científico André Marie Ampere intentó, sin éxito, demostrar esta conjetura.

Fue hasta 50 años más tarde que Karl Theodor Wilhelm Weierstrass publicó el primer ejemplo de una función continua y diferenciable en ninguna parte.

Lo interesante de estas funciones no acaba aquí, pues algo mucho más sorprendente, es que este tipo de funciones son “más abundantes” que las funciones continuas y diferenciables en algún punto, desde el punto de vista topológico.

Dentro de estas funciones podemos presentar algunos ejemplos de continuidad, pero no diferenciable.

### Contemplaciones para este tipo de funciones:

#### Límite

La función  $f$  **tiende hacia el límite  $l$  en  $a$**  significa: para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$ , si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

#### Límites unilaterales

Límite unilateral por la derecha:

Sea  $f$  una función definida en todos los números del intervalo abierto  $(a, c)$ . Entonces, el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a “ $a$ ” por la derecha es  $L$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , sin importar cuan pequeña sea, existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Límite unilateral por la izquierda:

Sea  $f$  una función definida en todos los números del intervalo abierto  $(d, a)$ . Entonces, el límite de  $f(x)$ , cuando  $x$  se aproxima a “ $a$ ” por la izquierda es  $L$ , y se escribe  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

si para cualquier  $\epsilon > 0$ , sin importar cuan pequeña sea, existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Pero si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y es igual a  $L$  si y solo si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y son iguales a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  entonces  $f$  es derivable y  $f'$  existe. O más bien dicho si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ .

#### Continuidad de una función

Una función se dice que es **continua** si es continua en cada uno de los puntos de su dominio.

Se dice que una función  $f(x)$  es **continua en un punto  $a$** , si y sólo, si se verifican las condiciones siguientes:

Una función  $f$  se dice que es continua en “ $a$ ” si



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- Ver si el límite existe.
- Checar si el limite sean iguales tanto en  $f(x)$  y  $f(a)$ .

Cuando no se cumple alguna de las anteriores condiciones, se dice que la función es **discontinua** en el punto.

Por otra parte, se considera que la función es **continua en un intervalo**  $(a, b)$  cuando es continua en todo punto  $x$ , tal que  $a < x < b$ .

Derivabilidad

Una función  $f$  es derivable en “ $a$ ” si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe.

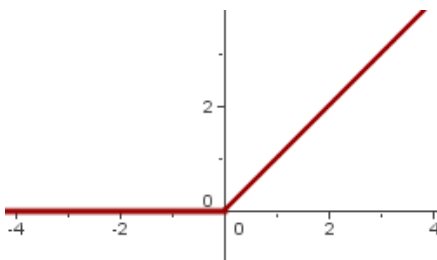
En este caso el limite se denomina por  $f'(a)$  y recibe el nombre de derivada de  $f$  en “ $a$ ”.(Decimos tambien que  $f$  es derivable si  $f$  es derivable en “ $a$ ” para todo “ $a$ ” del dominio de  $f$ .)

### Función continua pero no derivable en un punto

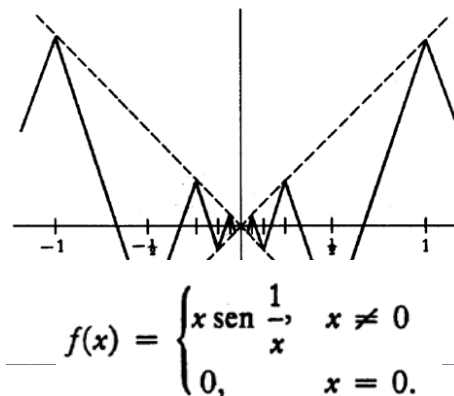
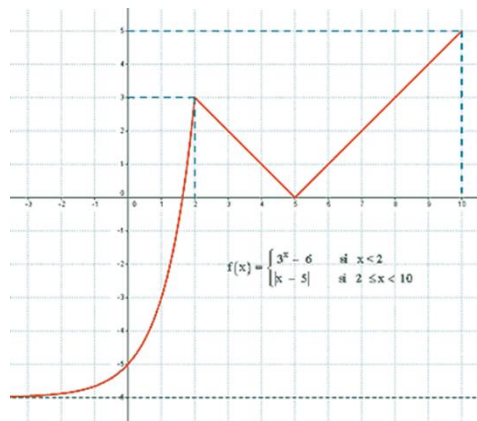
Para poder entender gráficamente el significado de la derivabilidad de una función, tendremos en cuenta que cuando una función es continua, pero no es derivable, querrá decir que la función en ese punto tendrá un pico; mientras que en el caso en el que sea continua y derivable será un punto cualquiera de la curva  $f(x)$ .

Como podemos apreciar en la gráfica de la función del valor absoluto en el punto  $x=0$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$



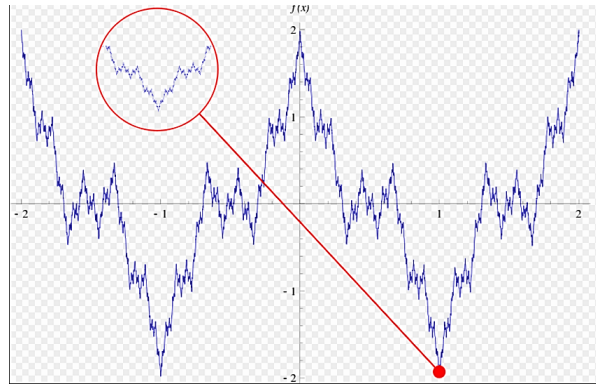
### Función continua pero no derivable en más de un punto



## Función continua pero no derivable en ningún punto

### Función de Weierstrass

La función de Weierstrass es una función definida por el matemático Karl Weierstrass. Está definida en la recta y toma valores reales. Es una función continua en todo punto y no es derivable o diferenciable en ninguno. Además:



La función de Weierstrass fue la primera conocida con esta propiedad. De este modo, Weierstrass mostró que era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados.

La función, tal como la definió Weierstrass, es la siguiente:

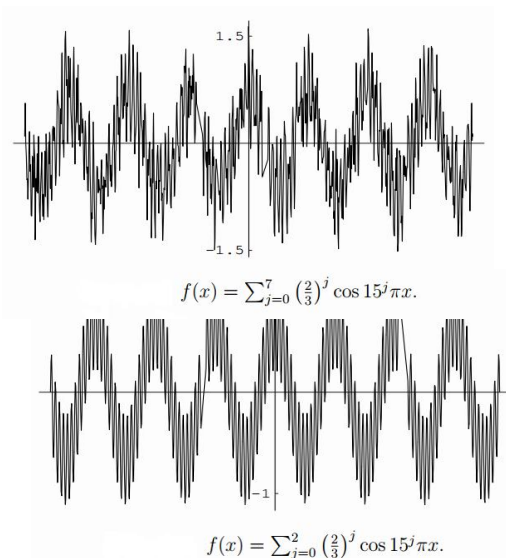
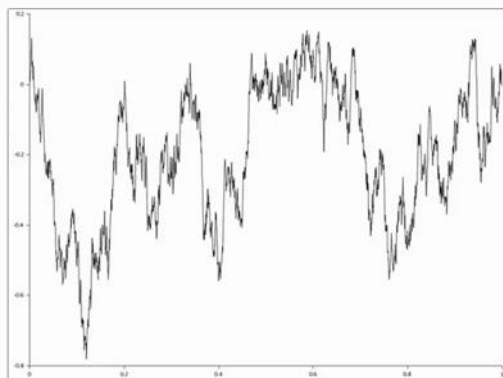
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde  $0 < a < 1$ ,  $b$  es un entero impar y positivo y cumplen que

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

### Movimiento browniano

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sqrt{2} \sin(k\pi t)}{k\pi}$$



### Bibliografía

Vitutor, 2014, Derivabilidad y continuidad. Citada en mayo de 2017, de [http://www.vitutor.com/fun/4/a\\_7.html](http://www.vitutor.com/fun/4/a_7.html)

- Navarro B., M.; Mayo 21, 2008, Existencia y Construcción de Funciones Continuas y Diferenciables en Ninguna Parte, Citada en mayo de 2017, de [http://lic.mat.uson.mx/tesis/129\\_Marysol\\_Navarro\\_B.pdf](http://lic.mat.uson.mx/tesis/129_Marysol_Navarro_B.pdf)
- Laura, 26 de Febrero de 2013, Derivabilidad de una función, Citada en mayo de 2017, de <http://matematica.laguia2000.com/general/derivabilidad-de-una-funcion>
- Abia Vian, J. A.; sin año, Funciones derivables, Citada en mayo de 2017, de [http://www.ma.uva.es/~antonio/Industriales/Apuntes\\_09-10/MatI/12\\_Tema-10\\_09-10.pdf](http://www.ma.uva.es/~antonio/Industriales/Apuntes_09-10/MatI/12_Tema-10_09-10.pdf)
- Beltrán, J; sin año, Límites unilaterales, Citada en mayo de 2017, de [http://ed21.webcindario.com/LimitesYContinuidad/limites\\_unilaterales.htm#por la derecha](http://ed21.webcindario.com/LimitesYContinuidad/limites_unilaterales.htm#por%20la%20derecha).
- Calculo infinitesimal. 1981. Michael Spivak. Segunda edición. Editorial revelté, S. A. Impreso en México.

### Programa general

## Ponencia de Divulgación 16

### ENCONTRANDO PRIMOS

Alondra Valdez Hernández, Jesús Alfredo Lerma Domínguez

Asesor: M.C. Adriana Escobedo Bustamante

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*alondra\_100pre\_sexy@hotmail.com; jesuserma.jld@gmail.com*

Llamamos números primos a los números enteros mayores que 1 que sólo son divisibles por 1 y por ellos mismos. Los números primos han fascinado a los matemáticos durante más de dos milenios. Alrededor del año 300 a. C., Euclides demostró que no existe un número “numero primo mayor”, es decir que existe un número infinito de ellos.

### ¿Cómo podemos saber que un número es primo?

En el año 240a.C., el matemático griego Eratóstenes desarrollo la primera prueba conocida para determinar números primos. Se conoce a este procedimiento como la criba de Eratóstenes. La criba puede utilizarse para encontrar todos los números primos que hay antes de un número determinado.

### La criba de Eratóstenes

Procedimiento:

- 1) Encierra el número 2. Determina todos los múltiplos de 2, y tacha todos los múltiplos de 2 (excepto el 2).
- 2) Encierra el número 3. Encuentra todos los múltiplos de 3; algunos ya fueron marcados. Tacha ahora todos los múltiplos de 3 (excepto el 3).
- 3) Encierra el número 5. Halla todos los múltiplos de 5; algunos ya fueron marcados. Tacha todos los múltiplos de 5 (excepto el 5).

4) encierra el número 7. Halla todos los múltiplos de 7; algunos ya fueron marcados. Tacha todos los múltiplos de 7 (excepto el 7).

5) por último, encierra en círculos cada uno de los números que no fueron tachados. Estos son los números primos menores que 100.

Fue suficiente tachar los múltiplos de primos hasta 7 para que quedaran todos los primos menores que 100, porque si  $m < 100$ , y  $m = pq$ , entonces al menos uno de los dos factores  $p$  o bien  $q$  debe ser menor que  $\sqrt{100} = 10$ .

El procedimiento se muestra en la Figura 1.

2	3	4	5	6	7
9	8	10	11	12	13
15	14	16	17	18	19
21	20	22	23	24	25
27	26	28	29	30	31
33	32	34	35	36	37
39	38	40	41	42	43
45	44	46	47	48	49
51	50	52	53	54	55
57	56	58	59	60	61
63	62	64	65	66	67
69	68	70	71	72	73
75	74	76	77	78	79
81	80	82	83	84	85
87	86	88	89	90	91
93	92	94	95	96	97
99	98	100			

Figura 1. La criba de Eratóstenes para encontrar números primos.

Como todos los números primos quedaron en la antepenúltima columna o la última columna excepto el 2 y el 3. Como hay seis columnas y los números de la penúltima columna son múltiplos de 6, estos primos difieren en 1 de un múltiplo de 6. Si continuamos la tabla indefinidamente ¿será posible que todos los demás primos se encuentren en esas columnas?

### Conjetura

Si  $p$  es un número primo ( $p > 3$ ), entonces  $p$  se puede expresar en la forma  $p = 6n + 1$ , o bien  $p = 6n - 1$ . La criba realizada antes sugiere la forma de demostrar la conjetura: si el número no está en la última columna o en la antepenúltima, entonces no es primo. En la columna que empieza con 2,4,6 todos los números son divisibles entre 2, y en la columna que empieza con 3 todos los números son divisibles entre 3.

### Demostración

Cualquier número entero mayor o igual a 5 se puede expresar en exactamente una de las siguientes formas, con  $n \geq 1$ :

$$p = 6n - 1, p = 6n, p = 6n + 1, p = 6n + 2, p = 6n + 3, p = 6n + 4$$

Se tiene entonces que:

$p = 6n$ ,  $p = 6n + 2$  y  $p = 6n + 4$  no son primos ya que son divisibles entre 2

$p = 6n + 3$  no es primo ya que es divisible entre 3

Por lo tanto, si  $p$  es un primo y,  $p > 3$ , las únicas posibilidades son  $p = 6n + 1$  o  $p = 6n - 1$ .

### El número $2^{756839} - 1$ es primo

El teólogo y matemático francés Marin Mersenne (1588-1648), quien también sintió la atracción de los números primos, trato de encontrar una fórmula con la cual pudiera encontrarlos todos. Aunque no fue capaz de lograrlo, su trabajo sobre los números de Mersenne (aquellos que tienen la forma  $2^p - 1$ , donde  $p$  es un número entero) sigue siendo muy interesante. Los números de Mersenne en los que  $p$  es un número primo son el tipo de números más sencillos a la hora de determinar si son o no números primos.

Se sabe que sólo exponentes primos dan primos de Mersenne, pero no necesariamente un exponente primo da un primo de Mersenne. Por ejemplo,

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$$

El número  $2^{756839} - 1$  es el trigésimo segundo primo de Mersenne que se conoce.

El primo  $2^{756839} - 1$  tiene 227832 cifras, que ocuparían una longitud aproximada de 570m si cada cifra se escribiera en un cuarto de centímetro.

Sólo se conocen 49 números primos de Mersenne. Curtis Copper, doctor en informática, descubrió el cuadragésimo noveno número primo de Mersenne. Dicho es  $2^{74207281} - 1$  y tiene 22338618 dígitos.

### Referencias

Alfaro J., Bosch C. (1993). El numero  $2^{756839} - 1$  es primo. Educación Matemática. Vol .5-No 2.

Flores Peñafiel, A.; Mirabal, F.; Martínez, A.; Lerma, J. “Prácticas de matemáticas para primero de secundaria”. Comunicaciones del CIMAT, 1987, 52 p.

Johnson, D.A.; Hansen, V.P; Peterson, W.H.; Rudnick, J.A.; Cleveland, R. Bolster, L.C. Activities in mathematics \_First course: Numbers. Scott, Foresman and Co., 1971.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 17

## LA SUCESION DE FIBONACCI

Carlos Michelle Díaz Leyva, Martha Patricia Galindo Solís

Asesores: M.C Adriana Escobedo Bustamante, L.M.A. Javier Espinosa de los Monteros  
Díaz

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*cdiazleyva@gmail.com, paty\_dance89@hotmail.com*

Área: Ecuaciones en Diferencia y Álgebra Lineal

Una de las sucesiones más famosas en la matemática y más específicamente para ejemplificar la construcción de algoritmos en donde esté involucrado el concepto de recursión, es la sucesión denominada *sucesión de Fibonacci*, la cual está definida de la siguiente manera:

### Definición

La sucesión de Fibonacci es una función  $F: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  definida por

$$F(1)=1$$

$$F(2)=1$$

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2) \quad \text{Si } n>2$$

La sucesión de Fibonacci se encuentra por primera vez en el libro *Liber Abaci* cuyo autor es Fibonacci.

En este caso veremos la sucesión de Fibonacci desde dos puntos de vista, uno es en el aspecto del álgebra lineal con el uso de eigenvalores y eigenvectores, por otro lado, lo veremos en el aspecto de ecuaciones diferenciales utilizando la ecuación diferencial de Fibonacci.

### Sucesión de Fibonacci (Álgebra lineal)

Para ello, el Álgebra lineal pone a nuestra disposición la llamada forma canónica de Jordán, que consiste en expresar una matriz  $A$  como  $A=MDM^{-1}$  donde  $D$  es una matriz diagonal y  $M$  es la matriz formada por los eigenvectores. Los elementos de esta matriz diagonal son los llamados valores propios de  $A$  que son las raíces del polinomio característico  $\det(A-\alpha I)$ .

### Sucesión de Fibonacci (Ec. en Diferencia)

La ecuación de Fibonacci la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$F(n)-F(n-1)-F(n-2)=0 \quad (2.1);$$

$$F(1)=1 \quad (2.2);$$

$$F(2)=1 \quad (2.3).$$

La ecuación  $F(n)-F(n-1)-F(n-2)=0$  desde el punto de vista de la teoría de ecuaciones en diferencia, es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes sujeta a las condiciones iniciales  $F(1)=1$  y  $F(2)=1$ . A esta ecuación la llamamos ecuación de diferencias de Fibonacci. Esta ecuación admite una solución de la forma

$F(n)=r^n$  (2.4), donde  $r$  es en general elemento de  $\mathbf{C}$  (el conjunto de los números complejos).

Sustituyendo la solución  $F(n)=r^n$  en la ecuación  $F(n)-F(n-1)-F(n-2)=0$  se llega al siguiente polinomio de segundo orden (polinomio característico de la ecuación de Fibonacci):

$r^2-r-1=0$ ; (2.5), cuyas soluciones están dadas por:

$$r_{1,2}=[1 \pm(5)^{1/2}]/2 \quad (2.6).$$

Debido a la linealidad de la ecuación (2.1), la solución más general es una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$F(n)=A r_1^n+ B r_2^n. \quad (2.7).$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones (2.2) y (2.3). En efecto, las condiciones (2.2), (2.3) y la expresión (2.7) nos conducen al siguiente sistema de ecuaciones

$$A r_1 + B r_2 = 1, \quad A r_1^2 + B r_2^2 = 1, \quad \text{cuya solución es } A=(5)^{-1/2} \text{ y } B=-(5)^{-1/2}.$$

Así tenemos pues una expresión alternativa para la sucesión de Fibonacci\_

$$F(n)=(5)^{-1/2} \left( \frac{[1+(5)^{1/2}]^n}{(2^n)} \right) + -(5)^{-1/2} \left( \frac{[1-(5)^{1/2}]^n}{(2^n)} \right); \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

Notemos que la expresión (2.8) permite calcular, para cualquier valor de  $n \in \mathbb{N}$ , los elementos de la sucesión de Fibonacci sin calcular los elementos precedentes.

Todo este proceso nos conduce a construir una expresión “cerrada” de la sucesión de Fibonacci, i.e., una expresión que permite conocer cualquier elemento de la sucesión sin conocer los elementos precedentes y de una forma rápida, y donde entrarán en juego varios conceptos como recursión, sucesiones, ecuaciones en diferencia.

## BIBLIOGRAFÍA

Mickens, R.E “Difference Equation”. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987.

Álgebra Lineal con Aplicaciones, George Nakos, U.S Naval Academy, David Joyner, U.S Naval Academy.

Referencias Electrónicas

[https://www.google.com.mx/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=9&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjryKy-mP3TAhVKzmMKHZeFD\\_wQFghVMAG&url=https%3A%2F%2Fdetallesaturning.files.wordpress.com%2F2014%2F03%2Ffla-sucesic3b3n-de-fibonacci.pdf&usg=AFQjCNFrXnSnQNX4xIEQpv8mkkTdgYkcDw](https://www.google.com.mx/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=9&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjryKy-mP3TAhVKzmMKHZeFD_wQFghVMAG&url=https%3A%2F%2Fdetallesaturning.files.wordpress.com%2F2014%2F03%2Ffla-sucesic3b3n-de-fibonacci.pdf&usg=AFQjCNFrXnSnQNX4xIEQpv8mkkTdgYkcDw). Ultimo día de consulta 25 de mayo del 2017.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 18

**UN LÍMITE INTERESANTE CON UNA TIRA DE PAPEL**  
Miguel Ángel Noriega Meléndez, Luis Antonio Ayala Cenicerros

Asesora: M.C. Adriana Escobedo Bustamante  
 Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango  
[antonio.a.98.la@gmail.com](mailto:antonio.a.98.la@gmail.com)  
 Área: Cálculo

### Primera parte

Corta una tira de papel de 5cm de ancho y aproximadamente 50cm de largo. Haz un doblez cerca de uno de extremos de la tira con un ángulo arbitrario. (Puede ser cualquier ángulo, pero aquí ilustraremos el proceso para un ángulo  $A_1$  agudo). El ángulo  $A_1$  se repite en el otro borde de la tira (ángulos alternos internos). Por tanto el otro ángulo es  $180 - A_1$ .



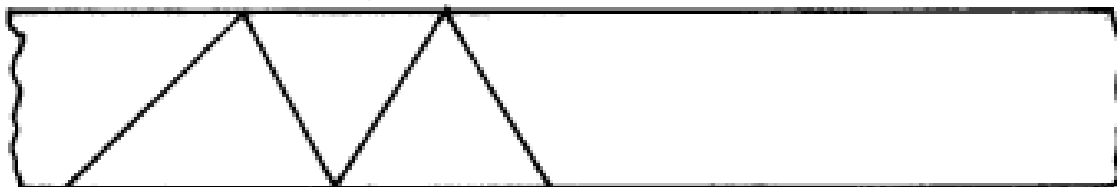
Mediante un doblez divide el ángulo de  $180 - A_1$  a la mitad. Para esto haz coincidir el pliegue anterior con el borde de la tira.



Repite este proceso a partir del último pliegue, para un nuevo triángulo.



Repite el procedimiento varias veces y veras que se van formando triángulos sucesivos.



Después de unos cuantos los triángulos ven muy parecidos a equiláteros.

Sin importar cual ángulo inicial haya tomado, los sucesivos siempre aproximan a un ángulo de  $60^\circ$ .



Analicemos el procedimiento

Doblando el papel como se indica, formará un ángulo  $A_1$  y un ángulo que mide  $180 - A_1$ .  
Dividiendo este ángulo a la mitad se obtiene un ángulo  $A_2 = \frac{180-A_1}{2}$ , que se repite en el otro borde de la tira.  
Usando este ángulo se repite el proceso. El siguiente ángulo será  $A_3 = \frac{180-A_2}{2}$ .

Así en general cada nuevo ángulo será:

$$A_n = \frac{180-A_{n-1}}{2}$$

Empezando con un ángulo cualquiera  $A_1$  ( $0 < A_1 < 180$ ).

Puedes usar la siguiente fórmula para ver cuáles son los ángulos sucesivos.

Como cada ángulo se obtiene anterior de la misma manera,

$$A_n = \frac{180-A_{n-1}}{2}$$

Empezando con un ángulo de 28, los ángulos sucesivos serían:

$$28, 76, 52, 64, 58, 61, 59.5, 60.25, \dots$$

Notamos que los números sucesivos, de manera alternada, son mayores y menores que 60, y que la diferencia con 60 reduce a la mitad con cada término sucesivo.

Segunda parte

Podemos escribir los términos de la sucesión para hacer esto explícito.

$$A_2 = \frac{180-A_1}{2} = 90 - \frac{A_1}{2}$$

$$A_3 = \frac{180-A_2}{2} = 90 - \frac{A_2}{2} = 90 - \frac{90 - \frac{A_1}{2}}{2} = 90 - \frac{90}{2} + \frac{A_1}{4}$$

$$A_4 = \frac{180-A_3}{2} = 90 - \frac{A_3}{2} = 90 - \frac{90 - \frac{90 - \frac{A_1}{2}}{2}}{2} = 90 - \frac{90}{2} + \frac{90}{4} - \frac{A_1}{8}$$

En general:

$$A_n = 90 - \frac{90}{2} + \frac{90}{2^2} - \frac{90}{2^3} + \frac{90}{2^4} - \dots + (-1)^n \left(\frac{90}{2^{n-2}}\right) + (-1)^{n-1} \left(\frac{A_1}{2^{n-1}}\right)$$

La suma:

$$90 - \frac{90}{2} + \frac{90}{4} - \frac{90}{8} + \frac{90}{16} - \dots$$

se puede ver como:

$$90\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \dots\right)$$

La serie geométrica:  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \dots$ , tiene una razón  $-\frac{1}{2}$  y su suma es:

$$\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto  $90 - \frac{90}{2} + \frac{90}{4} - \frac{90}{8} + \frac{90}{16} - \dots$  converge a 60. La diferencia de  $A_n$  con 60 es:

$$"60 - A_n = (-1^{n+1})\left(\frac{A_1}{2^{n-1}}\right) + \sum_{k=n-1}^{\infty} (-1^k)\left(\frac{90}{2}\right)^k = (-1^n)\left(\frac{60-A_1}{2^{n-1}}\right)"$$

Para entender un poco mejor lo anterior definiremos algunos conceptos de los elementos utilizados:

- Sucesión infinita

Una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales  $N$ .

- Convergencia

Una sucesión  $\{a_n\}$  converge hacia  $l$  (en símbolos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ) si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que, para todos los números naturales  $n$ ,

$$\text{Si } n > N, \text{ entonces } |a_n - l| < \varepsilon$$

- Serie

Dada una sucesión infinita  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , consideramos la siguiente sucesión infinita:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Si la sucesión  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$  tiene un límite, entonces lo designamos por el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Y lo llamamos suma de la serie infinita  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

En este caso, decimos también que la *serie es convergente*.

Si el límite anterior, no existe, entonces la serie se llama *divergente*.

Bibliografía:

Calculus segunda edición, Michael Spivak, editorial reverte 1992 S.A

Introducción al cálculo segunda edición, Kazimerz Kuratowzki, editorial limusina

Educación matemática, volumen 2 n° 2, pag. 61

National council of teachers of mathematics, mathematics trough paper folding, Olson Alton

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 19

### BUSCANDO TERNAS PITAGÓRICAS CON LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA



Ana Cristina Cabral Álvarez, Salma Celeste Hernández Ibarra

Programa general

## Ponencia de Divulgación 20

### FREGE, PADRE DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

Nélida Marlene Hernández Reyes

Asesora: Dra. Alejandra Soria Pérez

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*hda.01@hotmail.com*

Área: Historia de la Lógica Matemática

“Todo buen matemático es, al menos, la mitad de un filósofo, y todo buen filósofo es, al menos, la mitad de un matemático”.

El significado de “número” es un problema filosófico y conceptual sorprendentemente difícil. Todo es más frustrante por el hecho de que todos conocemos perfectamente cómo utilizar los números. Sabemos cómo se comportan, pero no sabemos lo que son.

En los años ochenta del siglo XIX, el filósofo y matemático alemán Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) trató de resolver esta cuestión conceptual construyendo números naturales a partir de objetos aún más simples; a saber, conjuntos, o “clases” como él les llamaba. Su punto de partida era la asociación estándar de los números con la actividad de contar. Según Frege, “dos” es una propiedad de aquellos conjuntos -y sólo aquellos- para los que se puede establecer una correspondencia uno a uno con un conjunto estándar (a,b) que tiene miembros diferentes a y b.

Por desgracia, utilizar una lista de conjuntos estándar como números parece una petición de principio; es muy parecido a confundir un símbolo con lo que representa. Pues ¿cómo podemos caracterizar “una propiedad de aquellos conjuntos que pueden emparejarse uno a uno con el conjunto estándar”? ¿Qué es una propiedad? Frege tuvo una intuición maravillosa. Hay un conjunto bien definido que está asociado con cualquier propiedad. La propiedad “primo” está asociada con el conjunto de todos los números primos; la propiedad “isósceles” está asociada con el conjunto de todos los triángulos isósceles, así sucesivamente.

Por ello, Frege propuso que el número “dos” es el conjunto que comprende todos los conjuntos para los que puede establecerse una correspondencia uno a uno con el conjunto estándar (a,b). Más en general, un número es el conjunto de todos los conjuntos para los que puede establecerse una correspondencia uno a uno con cualquier conjunto dado.

Con esta idea, Frege descubrió que podía poner toda la aritmética de los números naturales sobre una base lógica. Todo se reducía a propiedades obvias de conjuntos. Lo desarrolló todo en su obra maestra “Los fundamentos de la aritmética” de 1884, pero, para su amarga decepción, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1919), despachó el libro como

una obra de poco valor. En 1893 Frege, impasible, publicó el primer volumen de otro libro, “Las leyes básicas de la aritmética”, en el que ofrecía un sistema intuitivamente plausible de axiomas para la aritmética. Giuseppe Peano (1858-1932) hizo una recensión, pero todos los demás lo ignoraron. Diez años más tarde todo estaba listo para la publicación del segundo volumen de su libro, pero para entonces Frege ya era consciente de un fallo básico en sus axiomas. Otros también lo advirtieron. El desastre ocurrió mientras el segundo volumen estaba en prensa. Frege recibió una carta del matemático-filósofo Bertrand Arthur William Russell (1872-1970), a quien había enviado un ejemplar preliminar de su libro. En resumen, la carta decía aproximadamente esto: “Querido Gottlob, considere el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Suyo, Bertrand”. Frege era un lógico soberbio e inmediatamente captó la idea de Russell; de hecho, ya era consciente de las dificultades que podía entrañar. La aproximación general de Frege había supuesto, sin demostración, que cualquier propiedad razonable definía un conjunto significativo, consistente en todos los objetos que poseen la propiedad en cuestión. Pero aquí había una propiedad aparentemente razonable, “no ser miembro de sí mismo”, que manifiestamente no correspondía a un conjunto.

Un desolado Frege escribió un apéndice a su *opus magnum* en el que discutía la objeción de Russell. Encontró una corrección de urgencia: eliminemos del dominio de los conjuntos a cualesquiera que sean miembros de sí mismos. Pero nunca se sintió realmente satisfecho con esta propuesta.

Russell, por su parte, trató de reparar la laguna que había en la construcción de Frege de los números naturales a partir de conjuntos. Su idea consistía en restringir el tipo de propiedades que podían utilizarse para definir un conjunto. Por supuesto, él tenía que encontrar una demostración de que este tipo restringido de propiedad nunca llevaba a una paradoja. En colaboración con Alfred North Whitehead, llegó a una complicada y técnica “teoría de tipos” que conseguía ese objetivo. Escribieron su aproximación en los tres tomos de Principia Mathematica, de 1910-1913. La definición del número 2 en el primer volumen y el teorema  $1 + 1 = 2$  se demuestra en segundo. Sin embargo, los Principia Mathematica no acabaron con el debate sobre los fundamentos. La propia teoría de tipos era cuestionable.

Se considera a Frege el padre de la Lógica Matemática y la Filosofía Analítica. Fue el primero que abordó de manera orgánica el problema de los fundamentos de las matemáticas, al establecer una estrecha relación entre la definición filosófica de la esencia del conocimiento matemático y la rigurosa descripción de los procesos demostrativos; también fue el pionero del análisis lógico del lenguaje. Inventó muchas notaciones simbólicas, como cuantificadores y variables, estableciendo así las bases de la lógica matemática moderna. Fue defensor del logicismo, la tesis de que las matemáticas son reducibles a la lógica en el sentido que las verdades de la matemática son deducibles de las verdades de la lógica. En todo momento un objetivo inspiró su actividad: probar que la aritmética es una rama de la lógica y que no necesita extraer una fundamentación demostrativa ni de la experiencia ni de la intuición. Con dicha tesis se relaciona una concepción objetiva de los entes matemáticos y lógicos y de sus leyes, que hasta entonces se consideraban independientes del pensamiento cognoscitivo.



FREGE

### Bibliografía

Stewart, Ian; Historia de las Matemáticas en los últimos 10,000 años; Ed. Crítica; Barcelona; 2007.

<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/frege.htm>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 21

### LOS TEOREMAS DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

Sergio Carrasco Gámez

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango.

[cags9607@gmail.com](mailto:cags9607@gmail.com)

Área: Lógica matemática

Los teoremas de incompletitud de Kurt Gödel son unos de los resultados más importantes en lógica moderna, con importantes implicaciones filosóficas. Estos teoremas nos dan un panorama más amplio sobre lo que es la demostrabilidad en las teorías axiomáticas deductivas. El primer teorema de incompletitud enuncia que en cualquier sistema formal consistente  $F$  capaz de expresar aritmética existen proposiciones del lenguaje de  $F$  tales que no pueden ser demostradas o refutadas (es decir, demostrar su negación); por otro lado, el segundo teorema afirma que dicho sistema formal no puede probar su propia consistencia. Han existido dudosos intentos de aplicar los teoremas de Gödel a otras áreas de la filosofía, pero dichas aplicaciones permanecen controversiales.

#### 1. Introducción.

##### 1.1 Definiciones:

Para poder entender los teoremas de Gödel es necesario definir conceptos claves tales como “sistema formal”, “consistencia” y “completitud”.

**Definición 1.2:** Un sistema formal  $F$  es un conjunto finito de símbolos dotados con una gramática que nos hace distinguir entre fórmulas bien formadas (cadenas finitas del alfabeto de  $F$ ) y que posee un conjunto (finito o no finito) de axiomas o esquemas de axiomas y de reglas de inferencia.

**Definición 1.3:** Un lenguaje formal  $L$  es todo lenguaje que queda definido por los símbolos y la gramática de un sistema formal  $F$ ; la sintaxis de dicho lenguaje es el conjunto de todas las posibles expresiones que son válidas dentro de dicho lenguaje y la semántica del lenguaje es el significado de todas las expresiones válidas dentro de  $L$ .

**Definición 1.4:** Un sistema formal  $F$  se dice ser completo si y sólo si cualquier proposición  $P$  en  $F$  cumple que  $P$  es un teorema o la negación de  $P$  es un teorema.

**Definición 1.5:** Un sistema formal  $F$  se dice consistente si no existe una proposición  $P$  en  $F$  tal que  $P$  y la negación de  $P$  sean ambos teoremas de  $F$ .

**Definición 1.6:** Un sistema formal  $F$  es decidible si y sólo si existe un método efectivo para determinar si una fórmula arbitraria es o no un teorema de  $F$ .

## 2. Los teoremas de incompletitud.

**Primer teorema de incompletitud de Kurt Gödel:** Cualquier sistema formal consistente dentro del cual cierta aritmética básica pueda expresarse, es incompleto. Es decir, existe al menos una proposición  $G$  tal que ni  $G$  ni su negación son teoremas dentro del sistema.

Una forma común de malinterpretar este teorema es diciendo que existen verdades que no son demostrables; esto resulta ser falso, pues el teorema es aplicable a sistemas formales particulares. Para cualquier proposición  $G$  que no es demostrable en un sistema formal  $F$ , uno puede construir un sistema más fuerte y trivial tan solo agregando  $G$  como axioma de este nuevo sistema, empero, dicho sistema tendrá a su vez una nueva proposición  $G'$  indemostrable.

Debemos hacer hincapié en que estamos considerando uno de los teoremas más importantes de la filosofía de la matemática (y por qué no, tal vez de la matemática misma), ya que en primer instancia nos da una respuesta negativa al primer problema del programa de David Hilbert. Brevemente, en la década de 1920, en épocas donde los primeros intentos por clarificar los fundamentos de la matemática contenían paradojas e inconsistencias, Hilbert propuso basarse en todas las teorías existentes para formar un conjunto de axiomas finito y completo y proveer una prueba de que esos axiomas eran consistentes. Últimamente, se propuso que la consistencia matemática puede reducirse a aritmética básica. Empero, en 1931 el matemático Kurt Gödel despedazaría por completo el sueño de Hilbert al demostrar su primer famoso teorema de incompletitud; sin conformarse de la desilusión que causó a Hilbert, poco más tarde probaría el siguiente sorprendente y desesperanzador resultado:

**Segundo teorema de incompletitud de Kurt Gödel:** Si  $F$  es un sistema formal consistente capaz de expresar cierta aritmética básica, entonces  $F$  no puede probar su propia consistencia.

De esta forma, dicho sistema propuesto por Hilbert sería incapaz de demostrar la consistencia de sistemas más fuertes (pues ni siquiera puede probar su propia coherencia), dando una vez más una respuesta negativa a su programa.

Cabe hacer la aclaración de que la consistencia de  $F$  todavía puede ser demostrada, aunque usando argumentos fuera de  $F$ .

### 1.3 Teorías aritméticas.

En los enunciados anteriores se exigía como condición que cierta aritmética básica debía de ser expresable dentro del sistema. Vamos a definir precisamente esto.

El sistema más débil normalmente considerado en los teoremas de Gödel es la llamada aritmética de Robinson, denotada por  $\mathbf{Q}$ . Como axiomas, tiene los siguientes 7 supuestos:

- $\neg(0 = x')$
- $x' = y' \rightarrow x = y$
- $\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x = y')$
- $x + 0 = x$
- $x + y' = (x + y)'$
- $x \times 0 = 0$
- $x \times y' = (x \times y) + x$

Donde  $x'$  es la llamada función sucesor, y obviamente  $+$  y  $\times$  denotan la suma y la multiplicación. “0” es la única constante y denota al número cero. Si agregamos al sistema anterior el esquema de axioma de inducción (IND)  $\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')] \rightarrow \forall x\varphi(x)$ , obtenemos la aritmética de primer orden de Peano (PA). Note que PA a diferencia de  $\mathbf{Q}$ , posee infinitos axiomas. Un nuevo sistema intermedio, llamado PRA, resulta de los mismos axiomas que PA pero con el esquema de inducción limitado a proposiciones con cuantificador existencial únicamente.

Un sistema formal mucho más fuerte que PA,  $\mathbf{Q}$  y PRA, importante para las matemáticas, es la aritmética de Peano de segundo orden la cual es más que suficiente para desarrollar a todo el análisis y el álgebra.

Obviamente, se asume que nuestros sistemas formales están dotados de reglas de inferencia, normalmente las reglas de la lógica tradicional, aunque también el resultado es válido para lógica intuicionista.

### Algunas teorías no formuladas en el lenguaje de la aritmética.

Claramente existen muchas teorías matemáticas interesantes las cuales no son formuladas usando el lenguaje de la aritmética. Sin embargo, los teoremas de Gödel pueden extenderse a sistemas fuera de  $\mathbf{Q}$  y PRA si dicho sistema puede interpretar a los mencionados sistemas. Vagamente, una teoría  $T_1$  es interpretable en otra teoría  $T_2$  si los conceptos primitivos y el rango de las variables de  $T_1$  pueden definirse dentro de  $T_2$  de tal manera que exista una “traducción” de cada teorema de  $T_1$  en cada teorema de  $T_2$ . ( como ilustración podemos interpretar en aritmética una teoría sobre los ancestros, sin implicar que nuestros abuelos sean números). En resumen, cuando decimos que un sistema  $F$  puede expresar aritmética



básica, nos referimos a que dicho sistema es o bien una extensión de  $\mathbf{Q}$  o bien puede interpretar a  $\mathbf{Q}$ .

Cabe resaltar que existen teorías aritméticas que son completas, tales como la teoría aritmética estándar de la adición sin multiplicación. Y como fue probado por Tarski, la geometría euclidiana de primer orden es completa y además decidible.

Ahora estamos en posición de reescribir el teorema de la siguiente manera:

**Primer teorema de incompletitud de Gödel:** Si  $F$  es un sistema formal consistente que contiene o es capaz de expresar a la aritmética de Robinson  $\mathbf{Q}$  o a alguna de sus extensiones, entonces existe una proposición verdadera  $G_F$  que no es un teorema de  $F$ .

La demostración formal de este teorema excede a los fines divulgativos de dicho trabajo, aunque será conveniente dar un breve "borrador" sobre la prueba de este teorema. El primer paso en la demostración de Gödel consiste en "aritmetizar" las expresiones de un sistema formal  $F$  consistente que contiene a  $\mathbf{Q}$  o una de sus extensiones (o es capaz de expresarlas) mediante una correspondencia entre dichas fórmulas y los números naturales. La forma de hacerlo puede ser arbitraria; lo esencial es que exista un método efectivo para pasar de una expresión a su número codificado correspondiente y viceversa. A día de hoy no debiese sorprendernos que dicha codificación sea posible, pues los ordenadores codifican una cantidad enorme de información usando sólo 0s y 1s.

Básicamente uno procede de la siguiente manera: asignamos un único natural a cada símbolo primitivo del lenguaje (por ej, el 2 para el número 0 y el 1 para la igualdad ) y usamos un método que codifique cada sentencia de símbolos en un único natural que pueda servir para capturar la fórmula original. Gödel propone la siguiente función:  $\text{cod}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2^{x_1} 3^{x_2} \dots p_n^{x_n}$  con  $p$  primos. Así, por el teorema fundamental de la aritmética, cada fórmula de  $F$  corresponde a un único número de Gödel. Por ejemplo, la fórmula ' $0 = 0$ ' se codifica como  $2^2 3^1 5^2 = 4 \times 3 \times 25 = 300$ ; denotaremos al número de Gödel de una fórmula  $A$  como  $[A]$ .

De esta manera se reflejan propiedades sintácticas, relaciones y operaciones en los números naturales: por ej,  $\text{neg}(x)$  es la función que asigna a cada número de Gödel  $x$ , el número de Gödel de su negación, así  $\text{neg}([A]) = [\sim A]$ . Ahora, vamos a considerar la relación binaria " $x$  es (el número de Gödel) la demostración de la fórmula (número de Gödel)  $y$ ". Denotemos ésta fórmula por  $\text{Prf}_F(x, y)$ . Así, podemos definir formalmente la propiedad de ser demostrable en  $F$  como  $\exists x \text{Prf}_F(x, y)$ ; abreviemos esta propiedad como  $\text{Prov}_F([A])$ . De aquí se sigue que  $F \vdash A \Rightarrow F \vdash \text{Prov}_F([A])$ .

De esta serie de resultados que acabamos ver es donde parte la necesidad de poder representar o expresar las fórmulas de  $F$  en la aritmética de Robinson.

### El lema diagonal.

El siguiente ingrediente necesario en la demostración de Gödel es el famoso resultado (en lógica) de Carnap: el lema de auto referencia o lema diagonal

**Lema diagonal:** Sea  $A(x)$  una fórmula arbitraria con una sola variable libre de un sistema formal consistente capaz de expresar a la aritmética de Robinson, entonces existe una proposición  $D$  tal que  $F \vdash D \leftrightarrow A([D])$ . Semánticamente, la proposición  $D$  pareciese ser una que afirma de sí misma tener la propiedad  $A$ . Uno debe ser cuidadoso con estas interpretaciones y notar que el lema es un mero resultado sintáctico.



Aplicamos el lema a la fórmula  $\sim\text{ProvF}(x)$ : esto nos proporciona una proposición  $G_F$  tal que  $(F \vdash G_F) \leftrightarrow \sim\text{ProvF}([G_F])$ . Remitiéndonos al significado semántico, dicha proposición pareciera afirmar “que no se puede demostrar”, pero nuevamente como en el caso del lema diagonal, debemos ser cautelosos al tomar este tipo de interpretaciones, pues una prueba de dicha proposición podría enunciarse todavía fuera de  $F$ .

Es relativamente fácil demostrar que  $G_F$  no es demostrable ni refutable en  $F$ :

Supongamos que  $G_F$  es demostrable, entonces como  $F$  ha sido aritmetizado, existe un número de Gödel que codifica la prueba de  $G_F$ , así  $F$  también demuestra  $\text{ProvF}([G_F])$  y como  $F$  prueba  $G_F$  por el lema diagonal obtenemos que  $\sim\text{ProvF}([G_F])$ , luego no se puede demostrar  $G_F$ , lo cual contradice que  $F$  es consistente. Ahora, si  $\sim G_F$  es demostrable entonces  $G_F$  no se puede demostrar (pues  $F$  es consistente) y así, no existe ningún natural  $n$  que sea el número de Gödel de la prueba de  $G_F$ , luego  $F$  no puede probar  $\text{ProvF}([G_F])$  y por el lema diagonal  $F$  no puede probar  $\sim G_F$ , lo cual contradice que  $F$  es consistente.

Como corolario de lo anterior,  $G_F$  es indemostrable, pero es ya sea falsa o verdadera; luego  $F$  es incompleto.

### Segundo teorema de Incompletitud de Gödel:

Informalmente, el razonamiento utilizado para el segundo teorema es relativamente simple: dado el predicado aritmetizado de demostrabilidad, es fácil mostrar un predicado de consistencia: elijamos cualquier proposición inconsistente (normalmente  $0 = 1$ ) y llamémosle  $T$ , definamos entonces  $\text{Cons}(F)$  como  $\sim\text{ProvF}([T])$ . Usando una serie de pasos lógicos, es posible ver que si  $F$  demuestra  $\text{Cons}(F)$  entonces  $F$  demuestra  $G_F$ ; por el 1er teorema de incompletitud, es imposible demostrar  $G_F$  en  $F$ , luego es imposible probar  $\text{Cons}(F)$ . Ahora podemos reescribir el teorema de la siguiente manera:

**Si  $F$  es un sistema formal consistente que puede expresar la aritmética de Robinson, entonces  $F$  no puede probar  $\text{Cons}(F)$ .**

Hasta aquí, damos por terminado este breve trabajo que expone de manera puntual las técnicas usadas para recrear la prueba de Gödel además de despejar las dudas más usuales que conciernen a estos teoremas. Cabe destacar que dichos teoremas no tienen una mayor aplicación fuera de la matemática que las meras consecuencias filosóficas de los mismos; fuera del campo de las matemáticas se encuentran varios intentos dudosos por aplicar dicho teorema a temas tan controvertidos como la existencia de Dios o la capacidad única de razonar del cerebro sobre la máquina. No debemos dejar de ser escépticos ante dichas “aplicaciones” y olvidar que los resultados de Gödel, después de todo, parecen ser sólo artificios sintácticos, pues muchos matemáticos no se molestan en probar la consistencia de sus teorías y solamente la asumen (tal y como pasa con la teoría de conjuntos ZFC) para poder operar cómodamente dentro de su área; al final de cuentas, Gödel nos reafirma lo que ya sabíamos: la matemática es una ciencia basada en suposiciones, y jamás dejará de serlo, por más “autoevidentes” que se autoproclamen dichas “verdades”.



Kurt Gödel o también Kurt Goedel (en alemán [ˈkʊʁt ˈgøːdə]), (28 de abril de 1906 Brünn, Imperio austrohúngaro, actual República Checa – 14 de enero de 1978, Princeton, Estados Unidos) fue un lógico, matemático y filósofo

austriaco-estadounidense. Es, al parecer del autor de este trabajo, uno de los lógicos más importantes de toda la historia; a la misma altura que Aristóteles y Frege.

Referencias:

<https://plato.stanford.edu/entries/goedel-incompleteness/#Bib>

[https://mat.iitm.ac.in/home/asingh/public\\_html/papers/goedel.pdf](https://mat.iitm.ac.in/home/asingh/public_html/papers/goedel.pdf)

Introduction to mathematical logic, Elliot Mendelson.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 22

### EL TEOREMA DE BOLZANO, UN TEOREMA QUE NO DEBE PASAR INADVERTIDO

Elisa Salcedo Talamantes, Claudia Daniela Corral Hernández

Asesora: M.C. Adriana Escobedo Bustamante

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*elisa\_st\_1995@hotmail.com, danny@live.com.mx*

Área: Cálculo diferencial e integral

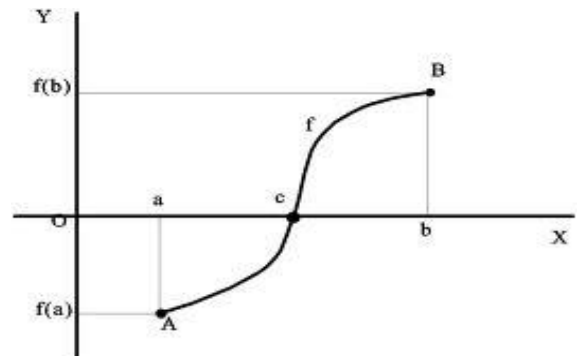
El teorema de Bolzano es un teorema sobre funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado, el teorema establece que si una función  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$  y  $f(a)$  y  $f(b)$  son de distinto signo, existe por lo menos un punto  $c$  entre  $a$  y  $b$  para el cual  $f(c)=0$ .

#### INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Si analizamos gráficamente el enunciado del Teorema de Bolzano, podemos decir, que para toda función continua en un intervalo  $[a, b]$ , tal que  $f(a) f(b) < 0$  entonces existe al menos una raíz  $c$  para esa función dentro de ese intervalo: o dicho de otra manera, la gráfica de  $f$  corta al eje de las  $x$  en al menos un punto dentro de  $[a, b]$ .

#### IMPORTANCIA DEL TEOREMA

Usualmente se construyen los números reales después de haber estudiado al conjunto de números racionales denotado por  $\mathbb{Q}$  y definido



como el conjunto de los números  $p/q$ , tales que  $p$  y  $q$  son enteros distintos de cero.

Hay un gran número de propiedades que resultan equivalentes al teorema que se analiza, y que aparentemente es tan obvio. Algunas de esas equivalencias se dan a continuación; todos los conjuntos y sucesiones se toman en  $\mathbb{R}$ .

- Propiedad del valor intermedio:  
Si  $f$  es una función continua, en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y se tiene que  $\xi$  es un número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = \xi$ .
- Propiedad de las cortaduras de Dedekind:  
Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos no vacíos y cuya intersección es vacía, con propiedad de que cada número está en  $A$  o en  $B$ , y que si  $x \in A$  y  $y \in B$  se tiene que  $x < y$ , entonces se puede concluir que  $A$  tienen un elemento que es mayor que todos los demás, o bien  $B$  tiene un elemento que es menor que todos sus elementos.
- Propiedad del ínfimo:  
Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente o por abajo, tiene un ínfimo (una mayor cota inferior).
- Propiedad del supremo:  
Todo conjunto no vacío y acotado superiormente o por arriba, tiene un supremo (una menor cota superior).
- Propiedad de Cauchy:  
Una sucesión  $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$  es de Cauchy si para toda  $\epsilon > 0$ , existe un número natural  $N$  tal que si  $n, m > N$  entonces  $|a_n - a_m| < \epsilon$ . Toda sucesión de Cauchy es convergente.
- Propiedad de Bolzano Weierstrass:  
Todo conjunto infinito y acotado tiene un punto límite. Un punto  $x$  es un punto límite de conjunto  $E$  si todo intervalo abierto que contiene a  $x$  contiene puntos de  $E$ .
- Propiedad de las sucesiones acotadas:  
Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.
- Propiedad de las sucesiones monótonas:  
Toda sucesión monótona acotada es convergente.
- Propiedad de acotamiento para funciones continuas:  
Toda función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  es acotada en el intervalo.

No daremos la demostración de estas equivalencias; sin embargo, es interesante notar que nuestro teorema se encuentra rodeado de propiedades sumamente importantes. El teorema de Bolzano es uno de los que se pueden escoger para 'llenar' la recta. Es la propiedad que nos da completitud de los números reales. Sin esa propiedad el cálculo diferencial e integral no hubiera ido muy lejos.

## APLICACIONES

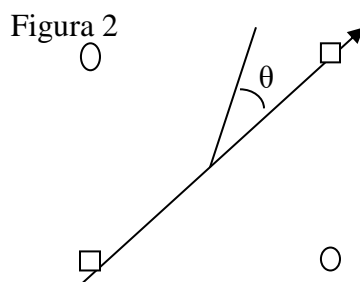
Veamos un par de aplicaciones del teorema de Bolzano.

### 1. La mesa inestable:

Las mesas de juego suelen ser mesas cuadradas y el extremo de sus patas forma un cuadrado en un plano. La mesa resulta inestable (o como decimos en general, "esta mesa está coja"). Debido a que el suelo no está a nivel parejo. La costumbre más común es meter un bloque de papel doblado bajo una de las patas de la mesa para resolver el problema. Sin embargo, esta no es la mejor práctica, ya que se tiene uno que inclinar y doblar el papel, que a veces queda muy grueso y a veces muy delgado. La mejor solución

es hacer girar la mesa, y antes de haber recorrido un ángulo de 90 grados habrá quedado estable. Además tuve suerte, ya que esto funciona únicamente si todas las patas tienen la misma longitud y el problema está en el piso.

Probemos esta propiedad usando el teorema de Bolzano. Debemos empezar por suponer que las 4 patas tienen la misma longitud y que el piso está deformado continuamente, y que no hay hoyos o escalones. Por comodidad denotemos con un cuadrado la posición de dos patas opuestas, y por un círculo la de las otras dos, como se indica en la Figura 2. Midamos el ángulo de rotación respecto al eje que une a las dos patas cuadradas, como se indica en la ilustración. Al girar un ángulo  $(\theta)$ , definamos  $h_1(\theta)$  como la suma de las alturas de la mesa sobre el piso en la dirección de las patas cuadradas, menos la suma de la longitud de las patas cuadradas. Y como  $h_2(\theta)$  la suma de las alturas de la mesa al piso en la dirección de las patas redondas, menos la suma de la longitud de las patas redondas.



Sea  $H(\theta) = h_1(\theta) - h_2(\theta)$ . Por estar desnivelada o coja la mesa, puede suponerse que para  $\theta = 0$  las patas redondas no están ambas tocando el piso, así que  $h_1(0) = 0$  y  $h_2(0) > 0$ , así que  $H(0) < 0$ . Observemos que si giramos un ángulo  $\pi/2$  (o sea  $90^\circ$ ), las patas cambian de posición; es decir, que las cuadradas toman la posición inicial de las redondas, y viceversa; Así que ahora  $h_1(\pi/2) > 0$  y  $h_2(\pi/2) = 0$ , de donde  $H(\pi/2) > 0$ . Así que usando el teorema obtenemos que para alguna  $\theta_0$  a en el intervalo  $[0, \pi/2]$   $H(\theta_0) = 0$ ; es decir,  $h_1(\theta_0) = h_2(\theta_0)$ , y como la mesa descansa todo el tiempo al menos en tres patas, entonces  $h_1(\theta_0) = 0$ , o bien  $h_2(\theta_0) = 0$ . Así que ambas son 0 y las cuatro patas tocan bien el piso.

De hecho esta propiedad es un caso particular del siguiente teorema.

**Teorema:** Supóngase que el extremo de cada pata de una mesa, está en un plano y forman un polígono regular de  $n$  lados. Supongamos que el piso es una superficie continua. Entonces con una rotación de menos de  $2\pi/n$ , al menos cuatro patas tocarán el piso.

**Demostración:** Si la mesa está descansando en tres patas en  $\theta = 0$ , después de una rotación de  $2\pi/n$  seguirá descansando en tres patas, pero no las mismas tres del principio. Así que en algún momento una de las patas que estaba en contacto con el piso dejó de tocarlo. Eso sólo puede suceder cuando cuatro patas tocan el piso.

## 2. El problema del excursionista y los teoremas de punto fijo.

Un excursionista sale desde el punto A a las 9 de la mañana de un lunes y llega después de su caminata, tal vez con varias paradas, comida y un rato de siesta, y planta su campamento en el punto B.

El martes a las 9 de la mañana sale del campamento siguiendo el mismo camino de regreso. Aunque parezca increíble, veamos que el excursionista estaba en un mismo punto del camino a la misma hora del lunes y del martes.

Esto lo podemos ver con argumentos que no utilizan Cálculo, si suponemos que tenemos un clon del excursionista que el martes sale a las 9 de A hacia B, repitiendo el mismo camino con paradas, comidas, etc. , que hizo el día anterior el excursionista original. El clon y el excursionista se van a encontrar en el camino. De hecho el problema puede ser formulado en términos de puntos fijos, los cuales juegan un papel central en ciertos problemas matemáticos.

Se puede dar otro argumento usando la propiedad del valor intermedio.

Denotemos por  $d_1(t)$ , la distancia recorrida por el camino desde el punto A el lunes después de caminar un tiempo  $t$  y por  $d_2(t)$  la distancia del excursionista al coche después de un tiempo  $t$ ; por supuesto que  $t = 0$  corresponde a las 9 de la mañana.

Consideremos ahora la función  $D(t) = d_1(t) - d_2(t)$ . Se tiene que  $D$  es continua y  $D(0) < 0$ , ya que  $d_1(0) = 0$  y  $d_2(0)$  es la distancia de A a B por el camino; además  $t_0$  es el tiempo que tarda el excursionista en llegar hasta el punto B.  $D(t_0) > 0$  así que usando el teorema del valor intermedio se tiene que existe  $t'$  tal que  $D(t') = 0$ ; es decir  $d_1(t') = d_2(t')$ . Esto quiere decir que el excursionista efectivamente estaba en el mismo punto a la misma hora del lunes y del martes. Veamos ahora un teorema de punto fijo que se deriva del teorema del valor intermedio.

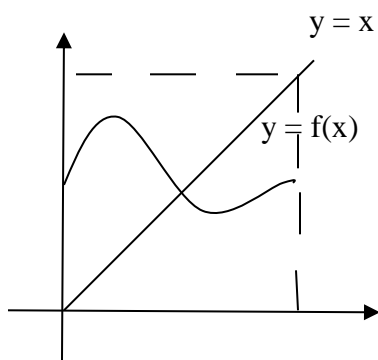
**Teorema:** Si  $f$  es una función continua del  $[0, 1]$  en él mismo. Entonces existe un punto  $c$  en  $[0, 1]$  para el cual  $f(c) = c$ ; es decir,  $c$  es fijo bajo la función  $f$ .

**Demostración:** Si  $f(0) = 0$ , o bien si  $f(1) = 1$ , tenemos un punto fijo y el teorema queda demostrado.

Supongamos entonces que  $f(0) > 0$  y  $f(1) < 1$ , y recordemos que el rango de  $f$  es un subconjunto de  $[0, 1]$ .

Definimos  $g(x) = f(x) - x$ . Entonces  $g(0) > 0$ , mientras que  $g(1) < 0$ .

Así que por el teorema del valor intermedio hay una  $c$  en  $[0, 1]$  donde  $g(c) = 0$ ; así que  $f(c) - c = 0$ , y de ahí  $c$  es un punto fijo.



En algún punto de la gráfica de  $f$  tiene que cortar a la recta  $y = x$

## CONCLUSIONES

El teorema de Bolzano, o del valor intermedio, resulta ser un teorema importante, considerando a lo que es equivalente, sobre todo, al sinnúmero de aplicaciones de las cuales aquí sólo hemos dado algunas. Hay que darle su real valía al "obvio" teorema de Bolzano, y no dejar que pase inadvertido.

**BIBLIOGRAFÍA**

<http://www.dailymotion.com/video/x5gi8gv>

<http://matematica.laguia2000.com/general/teorema-de-bolzano>

<https://calculoinfinitesimal.wordpress.com/2009/12/21/intervalos-encajados/>

<http://www.sangakoo.com/es/temas/propiedad-de-darboux-tambien-llamado-teorema-del-valor-intermedio>

Revisado 25/mayo/2017

[Programa general](#)

**Ponencia de Divulgación 23****UN CUERPO FINITO-INFINITO**

Luis Asarel Arteaga Martínez, Martín Pulido Castañeda

Facultad de Ciencias Exactas UJED

*asarelo44@gmail.com, martinpulido@rocketmail.com*

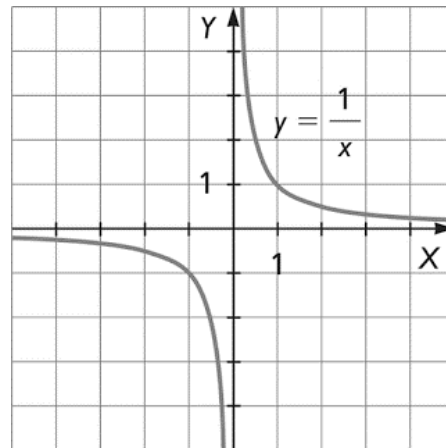
Área: Cálculo diferencial e integral

En el mundo extenso de las matemáticas a veces nos encontramos con figuras imaginarias, infinitas e irreales para el universo en el que convivimos, pero con propiedades matemáticas curiosas y extraordinarias. Tal es el caso de uno en particular que a simple vista parece algo sin nada destacable, pero que en realidad tiene una particularidad muy interesante.

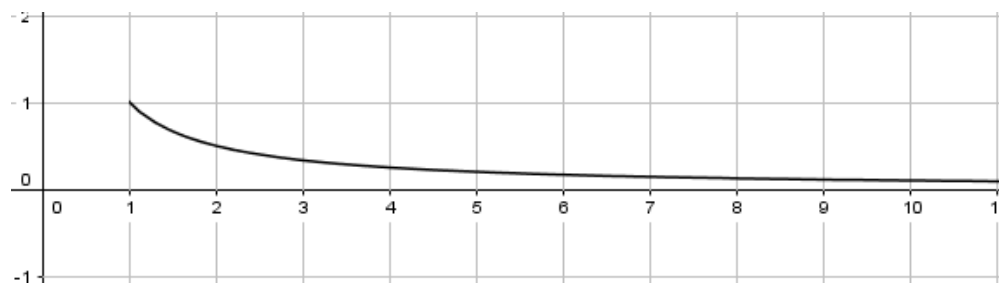
Ideado por **Evangelista Torricelli a mediados del siglo XVII**, la Trompeta de Torricelli.

Este objeto ha dado lugar a una paradoja interesante: se necesitaría una cantidad infinita de pintura para cubrir la superficie exterior, pero a la vez, sería posible llenar dicho cuerpo con una cantidad finita de pintura, con algunos litros de pigmento, cubriendo así la misma superficie.

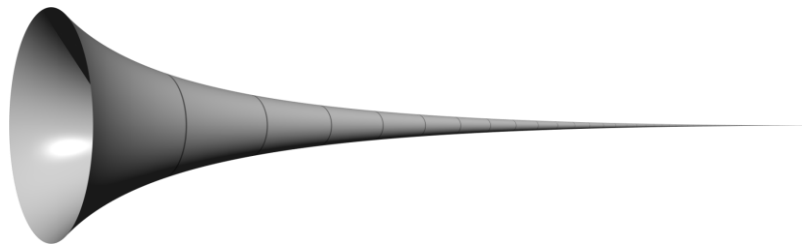
Su construcción es muy simple, tomamos la ecuación  $f(x) = \frac{1}{x}$



Pero solo nos centramos en la función dentro del intervalo  $(1, +\infty)$



Dicho tramo de la función, se rota 360 grados tomando como eje de rotación el eje X, para que, con el rastro de la rotación hecha, formemos un cuerpo como el siguiente:



Se obtiene la antes mencionada, Trompeta de Torricelli. Su descubrimiento fue apreciado en aquella época como una paradoja increíble, provocando una fuerte polémica en torno a la naturaleza finita- infinita a la que se sumarían grandes pensadores y matemáticos de esa época.

Aunque su descubrimiento fue anterior al cálculo, Torricelli usó el método de los indivisibles (una extensión del conocido principio de Cavalieri) para obtener sus medidas de superficie y volumen, sin embargo, con la llegada de las integrales sus medidas fueron comprobadas una segunda vez, y más fácilmente.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue un matemático italiano. Fue un precursor del cálculo infinitesimal.

El Principio de Cavalieri dice: “Si dos cuerpos tienen la misma altura y bases de igual área, y al cortarlos por cualquier plano paralelo a las bases, el área de las secciones es la misma, ambos tienen igual volumen”.



**Teorema del sólido hiperbólico agudo** (Teoría del método de los indivisibles, empleado para el cálculo de las medidas de la superficie y volumen de la Trompeta de Torriceli)

En este teorema se establece la equivalencia entre un sólido de longitud infinita engendrado por una hipérbola que gira en torno a su propio eje y un cilindro de altura finita. La demostración se basa en cinco lemas:

En el primer lema considera una hipérbola con asíntotas AB y AC, haciéndola girar sobre el eje AB obtiene el sólido hiperbólico agudo. Después considera en el sólido así construido un rectángulo, por ejemplo, el DEFG. Llama AH al semieje de la hipérbola, y por ser la hipérbola equilátera, el área del cuadrado construido sobre AH es igual al área de cualquier rectángulo DEFG que gira alrededor de la asíntota AB.

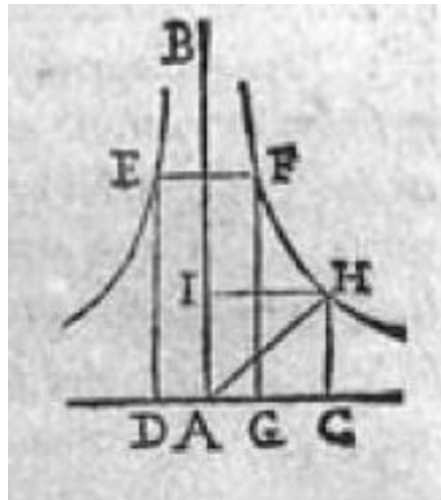


Figura 4. Ilustración Lema I sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.113]

En el segundo lema demuestra que todos los cilindros inscritos en el sólido hiperbólico agudo en torno al eje común AB son isoperimétricos (sus superficies laterales son iguales).

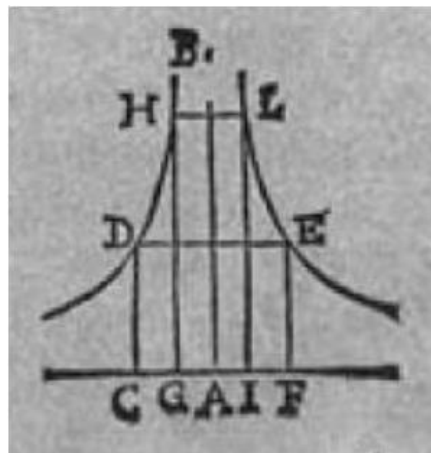


Figura 5. Ilustración Lema II sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.113]

En el tercer lema demuestra que los volúmenes de todos los cilindros isoperimétricos descritos antes se relacionan entre sí como los diámetros de sus bases.



En el cuarto lema demuestra que la superficie lateral del cilindro GIHL es  $1/4$  de la superficie de la esfera AEFC.

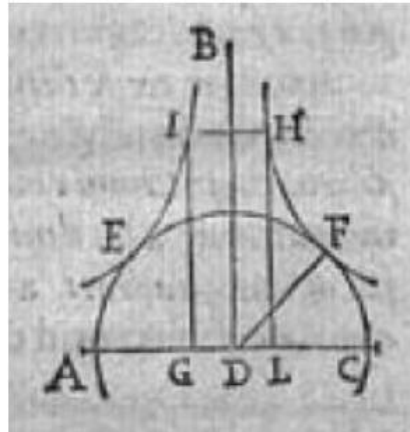


Figura 6. Ilustración Lema IV sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.114]

En el quinto lema demuestra que la superficie de cada cilindro CHIL inscrito en el sólido agudo como en la figura anterior, es equivalente al círculo de radio DF.

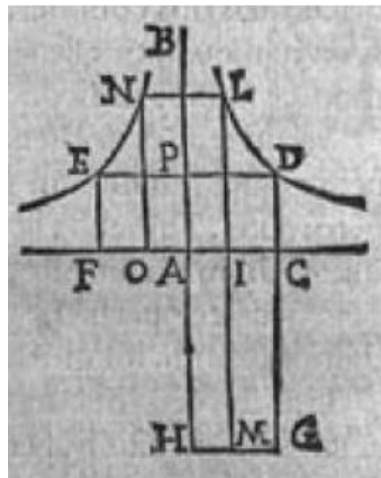


Figura 7. Ilustración para el teorema del sólido hiperbólico agudo 'Opera geometrica' [p.115]

En definitiva, en el teorema por fin demuestra que el sólido infinitamente largo FEBDC constituido por el sólido hiperbólico agudo EBD y por su cilindro de base FEDC, es equivalente al cilindro ACGH de altura AC.

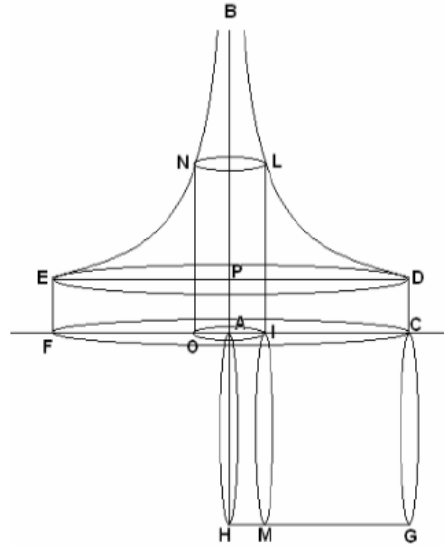


Figura 8. El sólido hiperbólico agudo equivale en volumen al cilindro ACOH

El segmento  $AC = PD$  altura del cilindro  $ACGH$  resulta de cortar la hipérbola mediante un plano perpendicular al eje  $AB$  (véase Fig. 5).

La demostración descansa sobre el quinto lema, la superficie lateral del cilindro inscrito, por ejemplo, el  $GIHL$  es igual al círculo de radio  $DF$  (véase Fig. 7).

Esta conclusión es decisiva para construir el cilindro  $ACGH$ , que Torricelli considera la suma de un número infinito de círculos. En la Fig. 8 la superficie lateral del cilindro  $OILN$  es igual al círculo que pasa por el punto  $I$ . Esta conclusión es cierta para cada cilindro inscrito, a cada uno le corresponderá un círculo de radio constante  $DF$  que pasa por uno de los infinitos puntos del segmento  $AC$ .

Torricelli pensó el cilindro  $OILN$  como indivisible curvo. Tomó un punto cualquiera ( $I$ ) de la recta  $AC$ . La superficie lateral de este cilindro viene dada por el producto de la circunferencia de radio  $AI$  ( $2\pi AI$ ) por la altura ( $LI$ ). Esto es,  $2\pi AI \cdot LI$ . Esta superficie lateral es igual a  $AS^2\pi$ , es decir, el área del círculo de radio  $AS$ . Si se construye un cilindro  $ACGH$  que tiene como base el círculo de diámetro  $AH = RS$  (el eje de la hipérbola) y altura el segmento  $AC$ , la superficie lateral del cilindro es  $OILN$  que es igual al área del círculo  $IM$ . Puesto que esto es cierto, si se toma el punto  $I$ , tenemos que todas las superficies cilíndricas construidas en  $AC$  serán igual a todos los círculos de  $CA$ , y por tanto el área del sólido hiperbólico agudo  $BLDCFENB$  es igual a la del cilindro  $ACGH$ .

Hallemos la **superficie** con integrales, en principio, entre  $1$  y  $a$ :

$$V = \int_1^a \pi f(x)^2 dx = \int_1^a \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

$a$  puede ser tan grande como se desee, pero en la ecuación se puede observar que el volumen del cuerno entre  $x = 1$  y  $x = a$  nunca será igual a  $\pi$ ; sin embargo, *se acercará* más

y más a  **$\pi$**  conforme  **$a$**  crece. Matemáticamente, el volumen tiende a  **$\pi$**  conforme  **$a$**  tiende a infinito. Empleando límites, el volumen puede expresarse de la siguiente forma:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \pi \left( 1 - \frac{1}{a} \right) = \pi.$$

Esto es así porque conforme  **$a$**  tiende a infinito,  **$1/a$**  tiende a cero, lo cual implica que el volumen tienda al producto de  **$\pi$**  con  $(1 - 0)$ , que es igual a  **$\pi$** .

Luego, hallemos el **volumen** con integrales, entre **1** y  **$a$**  también.

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a 2\pi f(x) dx = \\ &= \int_1^a 2\pi \frac{1}{x} dx = 2\pi(\ln a - \ln 1) \end{aligned}$$

Con respecto al área, la fórmula anterior muestra que ésta es mayor que  **$2\pi$**  veces el logaritmo neperiano de  **$a$** . No existe una cota superior para el logaritmo neperiano de  **$a$**  conforme tiende a infinito, lo cual quiere decir que, en este límite, el cuerno tiene un área superficial infinita. Matemáticamente, esto es expresado de la siguiente forma:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi \ln a = \infty.$$

Pues realmente esta paradoja no es tal. Primero, porque esto no deja de ser un objeto matemático; no se puede construir en la realidad una trompeta infinitamente larga. Y segundo, aunque se llenase de pintura la trompeta, no se pintaría toda su superficie interna. Al hacerse infinitamente estrecha, llegaría un momento que las moléculas de la pintura no podrían avanzar. En otras palabras, el diámetro de la trompeta sería más pequeño que el diámetro de una molécula de pintura, por lo que no se cubriría el resto de la superficie de la trompeta. Y si se considera una pintura sin grosor, sería necesaria una cantidad infinita de tiempo para que ésta llegase hasta el «final» del cuerno.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

[http://elpais.com/elpais/2016/08/26/el\\_aleph/1472220664\\_441482.html](http://elpais.com/elpais/2016/08/26/el_aleph/1472220664_441482.html)

<http://www.imss.fi.it/multi/torricel/etorat31.html>

[https://es.wikipedia.org/wiki/Cuerno\\_de\\_Gabriel](https://es.wikipedia.org/wiki/Cuerno_de_Gabriel)

<https://maskupnfm.wordpress.com/2011/11/10/cuerno-de-gabriel/>

<http://laaventuradelaciencia.blogspot.mx/2011/10/la-trompeta-de-torricelli.html>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 24

### INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

Josepablo Adrián Rangel Torres

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 25

### LA MATEMÁTICA SUBYACENTE EN EL DISEÑO DE UNA SIMULACIÓN PARTICIPATIVA

José Crispín Alvarado Calderón

Asesora: Dra. Angelina Alvarado Monroy

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

*jose.alvarado@cimat.mx*

Nivel: Licenciatura

*Palabras Clave:* Simulación Participativa, Matemáticas

### Resumen

Considerando el aprendizaje como un proceso de participación social y con el propósito de promoverlo a través de una pedagogía altamente participativa, se diseñó utilizando un conjunto de tecnologías web una simulación para interacción en grupo. Para el diseño de dicha simulación se enfrentan situaciones que requieren de herramientas matemáticas apropiadas para lograr un diseño eficiente. En particular, se ha tenido que recurrir a tópicos de combinatoria y aritmética modular, entre otros. En este reporte se presenta tanto el diseño como el proceso para lograr su funcionamiento óptimo.

### Introducción

El proyecto que aquí se presenta propone el diseño y la implementación de simulaciones participativas que promuevan el aprendizaje de matemáticas y ciencias con tecnología a través de una pedagogía altamente participativa e interactiva; en donde la tecnología se vuelve, para cada estudiante y para todo el grupo, una herramienta de participación individual y social, mediadora de un conocimiento significativo de las ciencias y las matemáticas.

Con los nuevos enfoques, e incorporando tecnología, se busca la construcción social del conocimiento, para ello se necesitan diseños generativos (Stroup, Hurford, Ares y Lesh, 2007), es decir, aquellos en los que el conocimiento y la estructura emergen, o se generan, de las respuestas y las múltiples interacciones entre los estudiantes. Este tipo de diseños son conocidos también como simulaciones participativas en las cuales a través de una red inalámbrica local todo un grupo se conecta a un espacio común para interactuar.

En este trabajo se ha diseñado una simulación participativa para grupo, se discuten sus principales características y la matemática subyacente para lograr que su diseño sea lo más eficiente posible.

### Marco Teórico

El diseño de la simulación participativa presentada en este trabajo se ha basado en un juego abstracto llamado *Set*. Dicho juego fue creado por la ingeniera genética Marsha Jean Falco en 1974. Consta de 81 cartas con cuatro características y tres variantes para cada una de ellas: número (uno, dos, tres), color ( rojo, verde, lila ), forma ( rombos, óvalos, ondas ) y fondo (rayado, sólido, sin fondo).

Para jugar, se ponen 12 cartas boca arriba y las demás se dejan a un lado boca abajo. En el juego no existen turnos, así que todos los jugadores tienen la posibilidad de participar encontrando lo que se conoce como "Sets (conjuntos)" y decir Set (conjunto) cuando crean que lo han hecho. Los Sets son grupos de 3 cartas que coinciden o difieren en todas y cada una de sus características y variaciones analizadas por separado. Por ejemplo, en la figura podemos ver un set si evaluamos las cuatro características: forma, color y número iguales en las tres cartas, mientras que el fondo es diferente en las tres.



Para simular este juego abstracto se utiliza un conjunto de tecnologías web que en su mayoría son la base de cualquier página web (HTML, CSS, JavaScript). La web ofrece un conjunto de herramientas de desarrollo que por naturaleza son libres. Crear la simulación sobre una plataforma web nos permite mayor portabilidad ya que el juego funciona como cualquier página web y puede abrirse en cualquier navegador moderno.

Otra de las ventajas que se encontró en el diseño web, es el manejo de las figuras ya que utilizando la API de Javascript WebGL podemos crear cualquier figura obteniendo la posibilidad de extender el juego.

La simulación se puede utilizar para jugar de manera simultánea en varias computadoras diferentes que estén conectadas a una red local por medio de un Airport.

Para lograr este diseño se han tenido que utilizar diferentes herramientas matemáticas para librar situaciones que se han presentado y que resolverlas han permitido mejorar el diseño. Por ejemplo, ¿Qué ocurre cuando se exhiben 12 cartas y entre ellas no hay ningún conjunto? O bien, cuando se selecciona un conjunto se debe validar para determinar si es correcto, para ello se requiere de una rutina que revise una a una las propiedades iguales o todas distintas, esto lleva tiempo y al estar interactuando en tiempo real hace que el grupo

durante el tiempo de validación se distraiga. Esto nos lleva a otra pregunta ¿Cómo podemos validar en un tiempo menor?

Para resolver tales cuestiones se han utilizado los diferentes conceptos y hechos matemáticos que a continuación se mencionan.

Si tenemos una colección de  $n$  objetos y queremos formar subcolecciones de  $k$  elementos el número de formas en que podemos hacerlo lo denotamos como  $\binom{n}{k}$  y lo calculamos como  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  donde  $n!$  denota el factorial de un número.

Decimos que dos números  $a$  y  $b$  son congruentes con respecto a otro número  $m$ , o módulo  $m$ , si al dividirlos entre  $m$  su residuo es el mismo. Esto lo escribimos como

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

El siguiente resultado sobre congruencias de números es muy fácil de verificar usando la definición propuesta.

**Lema 1.** Si  $a_1, \dots, a_m$  son números naturales. Entonces

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 0 \pmod{m} \\ &\vdots \\ a_m &\equiv 0 \pmod{m}, \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv 0 \pmod{m} \\ &\vdots \\ a_m &\equiv m - 1 \pmod{m}, \end{aligned}$$

si y solo si

$$a_1 + \dots + a_m \equiv 0 \pmod{m}.$$

Diferentes cuestiones matemáticas subyacentes a este juego se pueden ver en Klarreich (2016), Ibañes (2016) y Bateman & Katz (2012).

### Planteamiento del problema

El objetivo de este trabajo es diseñar una simulación participativa eficiente de un juego para identificar conjuntos (formados por tres cartas con iguales características de color, relleno y forma o bien diferentes las tres en tales características). En tal simulación, los participantes de un grupo estarán conectados a través de una red inalámbrica local con un espacio común para interactuar. Otro de los objetivos es poner de relieve la matemática que subyace para lograr el diseño de una simulación participativa funcional y eficiente.

Realizar este diseño cobra relevancia dado que se ponen en juego una gran gama de conocimientos de matemática, programación y tecnología para lograr un diseño funcional y eficiente. Lo cual enriquece el desarrollo académico de quien diseña la simulación participativa. Además con la concepción del aprendizaje como un proceso de participación social cada vez se vuelve más necesario proponer este tipo de diseños para promover el aprendizaje en matemáticas y ciencia con una pedagogía innovadora y altamente participativa.

Los alcances de este trabajo se pueden resumir como una propuesta de enseñanza-aprendizaje a disposición de la comunidad educativa de manera libre y que pueda ser utilizada en los diferentes niveles educativos. Lo que varía es la discusión de ideas posteriores a la simulación y es ahí donde el profesor decide que aspectos son importantes para detonar, formalizar o extender el conocimiento. Esto último, puede verse como una limitación si no hay una adecuada comunicación entre los diseñadores y el profesor para lograr explotar el potencial del diseño.

## Metodología

La presente investigación es de naturaleza principalmente cualitativa en ella se diseña una simulación participativa para utilizar en grupo con la expectativa de lograr un impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Al ser central el diseño de la simulación, dado que se investiga sobre su funcionamiento, la metodología apropiada para ello es la *metodología basada en el diseño o investigación del diseño*, misma que actualmente está siendo aplicada y se ha probado que es de gran utilidad en la didáctica de la matemática y de las ciencias. Características, ejemplos y potencial de esta metodología se pueden ver en Kelly, Lesh, & Baek (2008) y en Henrick, Cobb y Jackson (2015).

Esta metodología pretende analizar el aprendizaje en contexto, mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas para su enseñanza. En este trabajo se pretende con la simulación participativa posteriormente analizar su potencial para propiciar y desarrollar formas de pensamiento y comprensión matemática compartida por el grupo en torno a la observación de patrones y características compartidas en los conjuntos identificados. Al igual que de preguntas que se pueden generar acerca del funcionamiento de la simulación.

Más allá de la creación de diseños eficaces para la enseñanza y el aprendizaje, este tipo de investigaciones o experimentos explican por qué el diseño funciona y sugieren formas de adaptación a nuevas circunstancias (Cobb et al, 2003). En este caso, el diseño de la simulación participativa se adaptará para el estudio de los polígonos y la identificación de subconjuntos de éstos (convexos, cóncavos, cuadriláteros, regulares, etc).

Estos estudios se caracterizan por un *refinamiento progresivo*, dado que el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia. El proceso de investigación se compone de ciclos continuos o iteraciones de: *diseño, implementación, observación, análisis y rediseño*. Hasta ahora, en este trabajo se ha cumplido un ciclo, queda pendiente iniciar otro al implementar el diseño, con las mejoras realizadas hasta el momento, en un grupo de más de 20 participantes, realizar observaciones, analizar y de ser pertinente hacer un rediseño.

## Resultados

Se logró diseñar la simulación participativa del juego abstracto Set aprovechando los recursos que la web nos ofrece, para que sea utilizado en el aula o en ambientes informales para el aprendizaje (como actividades de divulgación, actividades en museos, etc) sin que ello genere un costo. La simulación funciona en windows, macOSX y Linux. La simulación se puede utilizar para jugar de manera simultánea en varias computadoras diferentes que estén conectadas a una red local por medio de un Airport.

Cuando inicia la ejecución, se abre una ventana donde se pide el nombre del usuario que será su





identificador como jugador. Inmediatamente después de enviar el nombre de usuario se muestra el tablero de juego vacío ( Ilustración 1).



Ilustración 1. Inicio del

El juego inicia repartiendo 12 cartas en el tablero donde los participantes deben buscar conjuntos. El administrador (en el caso de un aula sería el profesor)

es el único que puede repartir las cartas. En la Ilustración 2 se muestra el estado del juego al repartir por primera vez las cartas. Cuando un jugador cree haber encontrado un conjunto, debe presionar el botón morado. A partir de ahí el jugador tiene 10 segundos para seleccionar un conjunto, que en caso de no



Ilustración 4. Tablero despues de quitar un conjunto válido.



Ilustración 2. Se reparten doce cartas en el tablero

Ilustración 3. Selección de un conjunto válido

validar (botón morado) en el tiempo asignado ocasionaría la pérdida de un punto del jugador. Lo mismo sucede si al validar las cartas seleccionadas no forman un conjunto. La decisión de poner tiempo para poder elegir un conjunto se tomó ya que mientras un jugador presione el botón morado, nadie más que él puede seleccionar cartas del tablero hasta que haya presionado el botón validar, esto es demasiado control sobre el juego de un jugador.

Cuando se juega por primera vez, es muy natural tratar de buscar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Es posible que entre las 12 cartas del tablero no se encuentre algún conjunto?

Antes de dar respuesta a la pregunta debemos hacer notar que cualquier carta del juego la podemos representar como una 4-tupla de números donde cada uno de sus elementos es un número entre 0 y 2. Cada entrada de la 4-tupla representa una de las 4 características que puede tener una carta mientras que el número en una de sus entradas representa la variante de esa característica. Más adelante observaremos que esta representación facilita el análisis y la programación del juego.

Es fácil verificar que dado un que completa un conjunto (ver fuertemente para construir un encuentre ningún conjunto.

Si tomamos 2 cartas

$$\begin{matrix} (1,0,0,2) \\ (0,2,0,1) \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ (2,1,0,0) \end{matrix}$$

Ilustración 5. La tercera carta que completa un conjunto.

par de cartas existe una única carta Ilustración 1). Usaremos este hecho tablero de 12 cartas donde no se

cualesquiera del mazo y las colocamos sobre el tablero podemos escoger una tercera carta, de manera que no se forme un conjunto, de 78 formas (el número de cartas en el monto menos uno).

Si colocamos 3 cartas sobre el tablero, la siguiente carta que decidamos colocar no debe formar algún conjunto con ninguna de las otras. El número de cartas que no podemos

escoger es  $\binom{3}{2}=3$  por lo que podemos escoger una cuarta carta de 75 maneras permitiendo que no se forme ningún conjunto.

Inductivamente llegamos a que para 11 cartas en el tablero, donde no se encuentra ningún conjunto entre ellas, el número de formas en que podemos agregar otra carta para que no sea posible encontrar un conjunto es  $70 - \binom{11}{2}=15$ . Concluimos que es posible obtener un tablero de forma que no haya ningún conjunto.

En el caso en que no se encuentre algún conjunto entre las doce cartas se agregan otras más forzando que haya un conjunto y dando lugar a la siguiente pregunta: ¿cuál es el mínimo número de cartas que tenemos que agregar a un tablero de 12 para asegurar que exista algún conjunto? En general si se tienen  $n$  cartas sobre el tablero ( $n < 81$ ), podemos agregar una carta más de  $(81 - n) - \binom{n}{2}$  maneras (el número de cartas en el mazo menos el número de formas en que podemos escoger 2 cartas del tablero). Definamos

$$\psi(n) = (81 - n) - \binom{n}{2}.$$

Si obtenemos un valor negativo de  $\psi$  significa que  $\binom{n}{2} > (81 - n)$ , dicho de otra forma, el número de cartas que cumplen que al agregarla a las otras  $n$  (sobre el tablero) es mayor al número de cartas que quedan en el mazo. Esta situación la podemos interpretar como que existe un conjunto dentro de las  $n$  cartas. Así, buscamos encontrar el valor  $n_0$  de  $n$  que hace que  $\psi(n) \approx 0$  con la restricción  $\psi(n_0) < 0$ . Procedemos a encontrar los ceros de  $\psi(n)$ :

$$\begin{aligned}\psi(n) &= (81 - n) - \binom{n}{2} \\ &= (81 - n) - \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &= (81 - n) - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{162 - n - n^2}{2}\end{aligned}$$

Igualando a cero y resolviendo obtenemos las soluciones  $x_1 = -13.24, x_2 = 12.24$ . Considerando únicamente la solución positiva (no podemos tener un número negativo de cartas sobre el tablero) obtenemos que en cualquier combinación de 13 cartas del juego, podemos encontrar un conjunto.

Para el juego se decidió que en caso de no poder formar un conjunto con las doce cartas del tablero, se agregan otras 3 dando opción a más posibles conjuntos.

Cuando un jugador encuentra un conjunto, debe presionar el botón correspondiente que le permitirá, únicamente a él, seleccionar las cartas del tablero para posteriormente validar su respuesta. La rapidez y fluidez del juego es importante pues los demás jugadores deben recibir en tiempo real el resultado de la validación.

**(2,1,2,2)**  
+  
**(2,2,1,1)**  
+  
**(2,2,0,1)**  
||  
**(6,5,3,4)**

Ilustración 6. No es un conjunto.

Podemos verificar que las cartas seleccionadas por un jugador forman un conjunto haciendo comparaciones entrada por entrada en las representaciones como 4-tupla de las cartas.

**(0,2,2,0)**

**(2,2,0,0)**

**(1,2,1,0)**

**(3,6,3,0)**

Ilustración 7. Si es un conjunto

Para lograr disminuir el tiempo de validación de “un conjunto” y hacer más eficiente en términos de disminuir el tiempo de espera se ha realizado lo siguiente : al aprovechar la representación como 4-tupla de las cartas nos fijamos en las entradas de la 4-tupla resultante de sumar las 4-tuplas asociadas a las cartas a verificar. Como resultado del Lema 1 las entradas correspondientes a cada característica de las representaciones de las 3 cartas, son todas distintas o bien todas iguales, si y solamente si su vector suma es congruente con el vector cero módulo 3 (entrada por entrada).

## Conclusiones

En este juego y sus múltiples variantes hemos encontrado un recurso para aprovechar y extraer la riqueza que trae consigo para las matemáticas y para la neuropsicología, entre otras. Es indudable su potencial lúdico y didáctico para el desarrollo de la percepción visual, la búsqueda de patrones y la concentración. Lo elemental de sus ilustraciones hace que sea más fácil asociar patrones. Aunado a lo anterior, nos apoya en la rama de las matemáticas conocida como combinatoria y una vez que el juego es conocido por los estudiantes podemos plantear preguntas de dificultad variable relacionadas con el juego.

Por lo anterior, consideramos que es un recurso que promete el acceso democrático a diferentes ideas y habilidades de matemáticas y otras áreas como la ingeniería genética que es justo el área que inspiró a su creadora, ya que continuamente tenía la necesidad de presentar en cartas imágenes relacionadas con sus estudios de epilepsia en perros y buscar patrones en ellas. Creemos que sus características lo vuelve accesible para todos y además pueden jugar tantas personas como puedan ver las cartas sin importar su nivel de conocimiento y de la participación social se puede experimentar un desarrollo de nociones, ideas y habilidades, en cada uno de los participantes.

Incluir en el aula juegos de cartas en papel de este recurso ayuda, por supuesto. No obstante, si queremos explotar su potencial didáctico, otorgar un papel mediador al profesor y apoyar la emergencia de estructura matemática consideramos necesario realizar una simulación participativa para grupos de 20 o más integrantes. Para ello aprovechamos las características de la libre y de fácil acceso tecnología web. Dadas las interacciones múltiples que ocurren, el aprendizaje se considera un proceso de participación social donde el conocimiento está estructurado social y matemáticamente. Así, desde la estructura social emerge la noción matemática de conjunto y podemos aproximarnos al proceso de definir en matemáticas desde una edad temprana y subsecuente, además de explorar diferentes cuestiones de combinatoria en relación con el juego. Otros contenidos y pruebas matemáticas asociadas a la simulación participativa de las que se pueden explorar posterior al juego pueden encontrarse en Klarreich (2016), Ibañez (2016) y Bateman & Katz (2012).

Finalmente, el diseño de este tipo de simulaciones participativas abre una gama de oportunidades para desarrollarse como matemático aplicado.

## Bibliografía

Bateman, M., Katz, N. H. (2012) New bounds on cap sets, *Journal Math. Society* 25, 2, pp. 585-613.

- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.
- Henrick, E., Cobb, P. & Jackson, K. (2015). Educational Design Research to Support System-Wide Instructional Improvement. En A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (497-530). NY:Springer.
- Ibañes, R. (2016). Matemáticas en el juego de cartas Set 2. Cuadernos de Cultura Científica. Universidad del País Vasco. Disponible en <http://culturacientifica.com/2016/07/13/matematicas-juego-cartas-set-2/>
- Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.). (2008). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York: Routledge.
- Klarreich, E. (2016). [Simple Set Game Proof Stuns Mathematicians](https://www.quantamagazine.org/20160531-set-proof-stuns-mathematicians/), QUANTA magazine. Disponible en <https://www.quantamagazine.org/20160531-set-proof-stuns-mathematicians/>
- Python Software Foundation, sitio oficial <https://www.python.org>
- Stroup, W., Ares, N., Lesh, R., & Hurford, A. (2007). Diversity by design: The what, why and how of generativity in next-generation classroom networks.

[Programa general](#)

**DIRECTORIO DE PARTICIPANTES**

[A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [F](#) [G](#) [H](#) [I](#) [J](#) [K](#) [L](#) [M](#) [N](#) [O](#) [P](#) [Q](#) [R](#) [S](#) [T](#) [U](#) [V](#) [W](#) [X](#) [Y](#) [Z](#)

[Programa general](#)

**A**

**Aguilar García Juan Antonio**

**Almeida Torres Franci del Rocío**

[franci\\_z56@hotmail.com](mailto:franci_z56@hotmail.com)

[franci.almto@gmail.com](mailto:franci.almto@gmail.com)

**Alvarado Calderón José Crispín**

[jose.alvarado@cimat.mx](mailto:jose.alvarado@cimat.mx)

**Arteaga Martínez Luis Asarel**

[asarelo44@gmail.com](mailto:asarelo44@gmail.com)

**Ayala Ceniceros Luis Antonio**

[antonio.a.98.la@gmail.com](mailto:antonio.a.98.la@gmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**B**

**Bernadac Lozano Jonathan**

[specimen\\_428\\_@hotmail.com](mailto:specimen_428_@hotmail.com)

**Bobadilla Calleros Denzel**

[piolin.bob@hotmail.com](mailto:piolin.bob@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## C

**Candia Vargas Juan**

[lma.candia@gmail.com](mailto:lma.candia@gmail.com)

**Carrasco Gámez Sergio**

[cags9607@gmail.com](mailto:cags9607@gmail.com)

**Conde Ramírez Celene Yajahira**

[celeneconde15@gmail.com](mailto:celeneconde15@gmail.com)

**Corral Hernández Claudia Daniela**

[danny@live.com.mx](mailto:danny@live.com.mx)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## D

**Díaz Centeno Dorely**

[dorely\\_8919@hotmail.com](mailto:dorely_8919@hotmail.com)

**Díaz de León Juan José**

[juanjo9614@hotmail.com](mailto:juanjo9614@hotmail.com)

**Díaz Leyva Carlos Michelle**

[cdiazleyva@gmail.com](mailto:cdiazleyva@gmail.com)

**Dozal Alcántar Omar**

[VI\\_blackblood\\_IX@hotmail.com](mailto:VI_blackblood_IX@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## E

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## F

**Fernández Barneth Gabriel**

[fernandezgabriel885@gmail.com](mailto:fernandezgabriel885@gmail.com)

**Flores Casas Valeria Yaneth**

[havae\\_3@hotmail.com](mailto:havae_3@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## G

**Galindo Solís Martha Patricia**

[paty\\_dance89@hotmail.com](mailto:paty_dance89@hotmail.com)

**García Escobedo José Mario**

[josemariogarciaescobedo@hotmail.es](mailto:josemariogarciaescobedo@hotmail.es)

**García Venegas Elsa Jezabel**

[elsa\\_gv.29@hotmail.com](mailto:elsa_gv.29@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## H

**Hernández Reyes Nélide Marlene**

[hda.01@hotmail.com](mailto:hda.01@hotmail.com)

**Hernández Silva María José**

[marilongha@hotmail.com](mailto:marilongha@hotmail.com)

**Herrera Ontiveros Judtih Magdalena**

[Directorio](#)

[Programa general](#)



**I**

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**J**

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**K**

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**L**

**Lerma Domínguez Jesús Alfredo**  
[jesuslerma.jld@gmail.com](mailto:jesuslerma.jld@gmail.com)

**López Montiel Jesús Alejandro**  
[alejandro\\_sant@hotmail.com](mailto:alejandro_sant@hotmail.com)

**Luna Barboza Edson Aarón**  
[bkcena\\_25@hotmail.com](mailto:bkcena_25@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## M

**Mercado Favela Eybette**  
[eybette\\_mercado@hotmail.com](mailto:eybette_mercado@hotmail.com)

**Moreno González Brayam Antonio**  
[brayam02@gmail.com](mailto:brayam02@gmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## N

**Noriega Meléndez Miguel Ángel**

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## O

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## P

**Pulido Castañeda Martin**  
[martinpulido@rocketmail.com](mailto:martinpulido@rocketmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## Q

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## R

**Ramírez Esquivel Jassy Guadalupe**  
[jassy21r@gmail.com](mailto:jassy21r@gmail.com)

**Reza Gurrola Eduardo**  
[eduardoreza@hotmail.com](mailto:eduardoreza@hotmail.com)

**Rios Gurrola María Lucero**  
[rg\\_lucero130891@hotmail.com](mailto:rg_lucero130891@hotmail.com)

**Ruíz Morales Cecilia**  
[cecy0209@outlook.es](mailto:cecy0209@outlook.es)

**Ruiz Pérez Fernando Fidel**  
[fefy\\_chapis@hotmail.com](mailto:fefy_chapis@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## S

**Saéñz Fuentes Brianda Estefania**  
[esteff.saenz@gmail.com](mailto:esteff.saenz@gmail.com)

**Salazar Rios Cyntia Mayté**  
[cyntia.salazar@hotmail.com](mailto:cyntia.salazar@hotmail.com)

**Salcedo Talamantes Elisa**  
[elisa\\_st\\_1995@hotmail.com](mailto:elisa_st_1995@hotmail.com)

**Sánchez Aragón Héctor Alfonso**  
[poncho\\_290@hotmail.com](mailto:poncho_290@hotmail.com)

**Sánchez Torres Karla Karina**  
[karina\\_250695@hotmail.com](mailto:karina_250695@hotmail.com)

**Sáyago Monreal Víctor Iván**

[victor\\_sayago95@hotmail.com](mailto:victor_sayago95@hotmail.com)

**Solís Beltrán Silvia Janeth**

[janeth\\_kltz\\_89@hotmail.com](mailto:janeth_kltz_89@hotmail.com)

**Soto Odriozola Josué Isaac**

[josue\\_isaac\\_24@hotmail.com](mailto:josue_isaac_24@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**T**

**Torres Valenzuela Jonathan Iván**

[prococo\\_love@outlook.com](mailto:prococo_love@outlook.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**U**

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**V**

**Valdez Hernández Alondra**

[alondra\\_100preSexy@hotmail.com](mailto:alondra_100preSexy@hotmail.com)

**Vargas Flores Yarim Alberto**

[yalvafl\\_27@hotmail.com](mailto:yalvafl_27@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

W

[Directorio](#)

[Programa general](#)

X

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Y

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Z

[Directorio](#)

[Programa general](#)