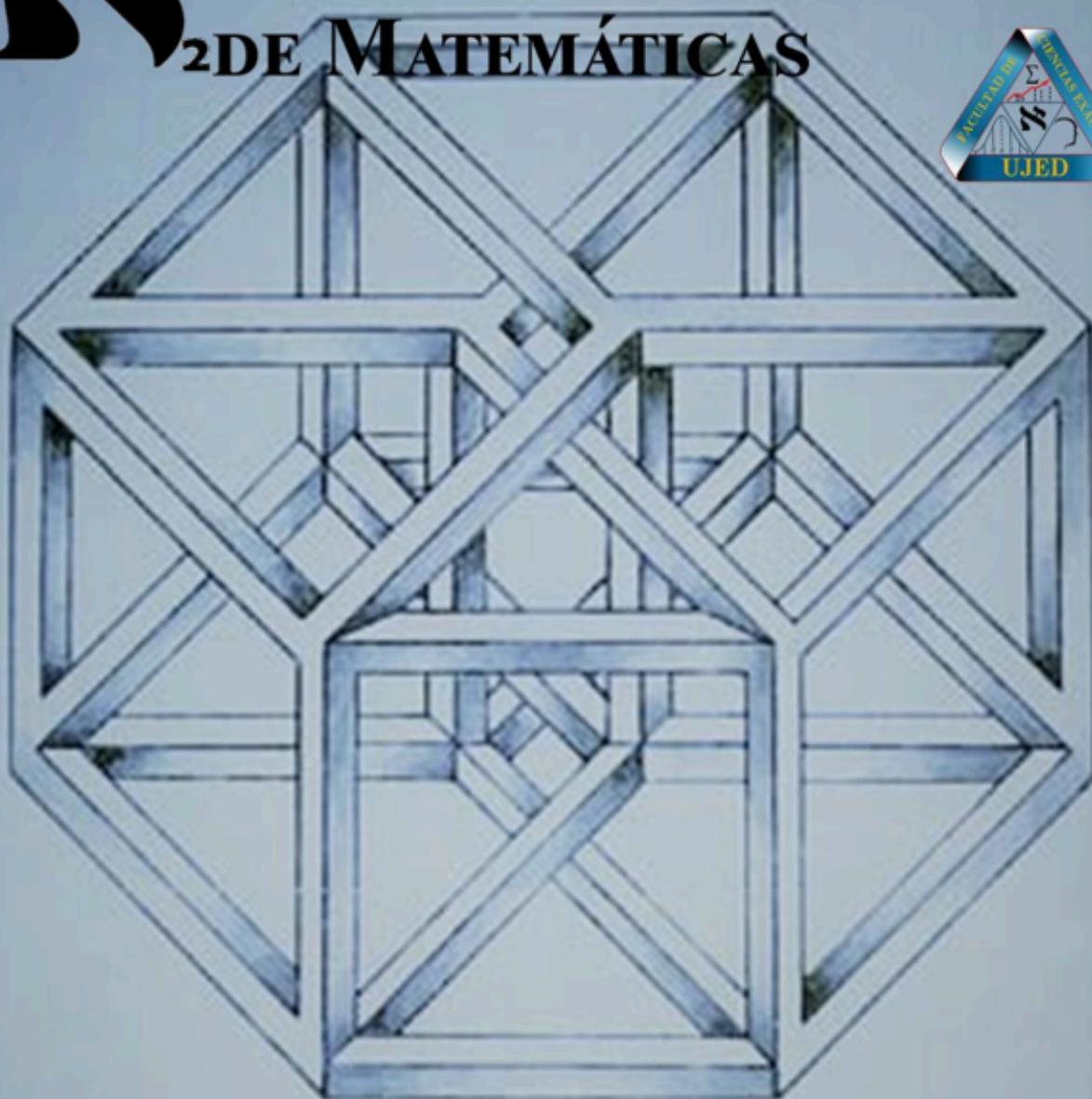


# **8<sup>vo</sup> ENCUENTRO ESTUDIANTIL 2<sup>da</sup> DE MATEMÁTICAS**



## **PROGRAMA**

## **COMITÉ ORGANIZADOR**

Dra. Angelina Alvarado Monroy  
Dr. Ricardo Isaac Bello Aguirre  
M.C. Adriana Escobedo Bustamante  
L.M.A. Javier Espinoza de los Monteros Díaz  
M.C. Miguel García Alvarado  
Dr.(c) José Othón Huerta Herrera  
Dra. Alicia López Betancourt  
Dr. Armando Mata Romero  
M.C. Saul Nevárez Nieto  
M.E.M. Miguel Angel Núñez González  
Dra. María del Carmen Olvera Martínez  
Dra. Yaziel Pacheco Juárez  
Dra. Luz Judith Rodríguez Esparza  
Dr. José Patricio Sánchez Hernández  
Dra. Alejandra Soria Pérez  
M.C. Enrique Vargas Betancourt  
Dra. Rosa Angélica Zamora Rios

# Programa General

| Hora        | Lunes – 27 noviembre  | Martes – 28 noviembre   | Miércoles – 29 noviembre   | Jueves – 30 noviembre   | Viernes – 1 dic.  |
|-------------|---|---|--|---|-------------------|
| 9:00-11:30  | Clases  |   |  |   | Torneo de Ajedrez |
| 11:30-12:00 | Inauguración  | Clases  |  | Carteles  |                   |
| 12:00-12:20 | <u>Zero fractal</u><br>Martha Patricia Galindo Solís<br>Claudia Daniela Corral Hernández                      | <u>Agujeros negros numéricos</u><br>Laura Margarita Hernández<br>Martín Pulido Castañeda  | <u>Sistema trivalente de Lukaszewicz</u><br>Eybetec Mercado Favela   |   |                   |
| 12:20-12:40 | <u>Paradoja de Russell y los axiomas de Zermelo-Fraenkel</u><br>Emmanuel Ramos Rochel<br>Noé Montes López     | <u>El teorema de las paralelas</u><br>Jesús Alejandro López Montiel   | <u>El lígve de Nash: juegos rectangulares</u><br>Luis Antonio Ayala Ceniceros<br>Miguel Ángel Noriega Meléndez                       |   |                   |
| 12:40-13:00 | <u>Interpretación geométrica de la derivada de una función compleja</u><br>Juan José Díaz de León             | <u>Empleo de la distribución normal en la descripción y uso del modelo lineal general</u><br>Carlos Omar Silva Aguirre  | <u>Guerrillas: una aplicación de las ecuaciones diferenciales</u><br>Bravam Antonio Moreno González<br>Celene Yajahira Conde Ramirez |   |                   |
| 13:00-13:10 | RECESO  |   |  |   |                   |
| 13:10-13:30 | <u>Análisis de heterocedasticidad en el modelo ingresos en FEMSA</u><br>Jatzeny Barraza Valdez                | <u>Análisis de multicolinealidad para el modelo lineal general de los ingresos totales de FEMSA</u><br>Luis Angel Reyes Rojas                                     | <u>Palomitas perfectas: un primer acercamiento</u><br>Axel Tapia Ávalos<br>José Feliciano Zamora Delfín                              | <u>Autocorrelación</u><br>José Feliciano Zamora Delfín  |                   |
| 13:30-13:50 | <u>Números complejos en la vida cotidiana</u><br>Ana Margarita García Terán                                   | <u>Aplicaciones a los cohetes</u><br>Omar Dozal Alcantar  | <u>Generalización del teorema de Pitágoras</u><br>Juan Antonio Aguilar   | <u>Red de Steiner</u><br>Ana Cristina Cabral Álvarez  |                   |
| 13:50-14:10 | <u>La controversia de Cantor contra Kronecker en la teoría del infinito</u><br>Néilda Marlene Hernández Reyes | <u>Lógica epistémica dinámica. El problema de "3 Muddy children"</u><br>Ana Margarita García Terán<br>Fausto Adrian Cervantes<br>Jafed Alejandro Martínez Sánchez | <u>El conjunto de Cantor</u><br>Carlos Michelle Díaz Leyva   | <u>Un poco de matrices y cadenas de Markov</u><br>Raúl Vargas Antuna  |                   |
| 14:10-16:00 | RECESO-COMIDA   |   |  |   |                   |
| 16:00-16:20 | <u>Movimiento rectilíneo uniforme</u><br>Jafed Alejandro Martínez Sánchez<br>Héctor Alan Olivera Martínez     | <u>Complejos simpliciales</u><br>Jesús Iván López Reyes   | <u>Movimiento vibratorio amortiguado</u><br>Omar Dozal Alcantar  | <u>Movimiento retrógrado de los planetas</u><br>Emmanuel Ramos Rochel<br>Erik Assael Beltrán Hernández  |                   |
| 16:20-16:40 | <u>Los sólidos platónicos y el universo</u><br>Salma Celeste Hernández Ibarra                                 | <u>¿Cómo generar un fractal con un dado? El juego del caos</u><br>Luis Eduardo Bueno López  | <u>La esfera de Riemann y la proyección estereográfica</u><br>Bravam Antonio Moreno González<br>Noé Montes López                     | <u>Intersección de subgrupos en grupos libres</u><br>Abraham Duvany Mora Sarabia<br>Jesús Alfredo Lerma Domínguez                                   |                   |
| 16:40-17:00 | <u>Soy el campo finito de ocho elementos, ¿de dónde vengo?</u><br>Isaac Castañeda Montoya                     | <u>Inducción matemática y los números naturales</u><br>César Alejandro Ortiz Arreola  | <u>Geoestadística aplicada</u><br>Héctor Alfonso Sánchez Aragón<br>Silvia Janeth Solís Beltrán                                       | <u>Nivel de aprovechamiento en aritmética y álgebra en estudiantes de tercero de secundaria</u><br>Carlos Michelle Díaz Leyva                       |                   |
| 17:00-17:10 | RECESO  |   |  |   |                   |
| 17:10-17:30 | <u>El contrafuerte de la Catedral</u><br>Héctor Alfonso Sánchez Aragón<br>Silvia Janeth Solís Beltrán         | <u>Análisis de la tendencia del presupuesto de la NASA</u><br>Axel Tapia Ávalos   | <u>Cantidad de azúcar en distintos tipos de refrescos</u><br>Jatzeny Barraza Valdez<br>Carlos Omar Silva Aguirre                     | <u>Tiempo de solidificación de gelatinas</u><br>Juan Candia Vargas  |                   |
| 17:30-17:50 | <u>Casos y controles</u><br>Cecilia Gamboa Heredia  | <u>La circunferencia</u><br>Josue Isaac Soto Odrizola<br>Gabriel Fernández Beltrán  | <u>La teoría de Hodgkin-Huxley</u><br>Elisa Salcedo Talamantes   | <u>Potencias de un número complejo en GeoGebra</u><br>Elisa Salcedo Talamantes<br>Martha Patricia Galindo Solís<br>Claudia Daniela Corral Hernández |                   |
| 17:50-18:10 | <u>Variaciones de la órbita galáctica</u><br>Erik Assael Beltrán Hernández                                    | <u>En la superficie</u><br>Alonso Eloy Ávila Devora   | <u>Evaluación de la densidad forestal en la zona este de la sierra de Puebla</u><br>L. M. A. Jesús Carreón Rodríguez                 | <u>El dilema del prisionero</u><br>Eduwin Vladimir García Velarde<br>Candy Jazmin Soto Betancourt   |                   |
| 18:10-18:30 |   | <u>Tasa de mortalidad en accidentes aéreos</u><br>José Jorge Estrada Alemán   | <u>¡Un simple signo de admiración!</u><br>Jafed Alejandro Martínez Sánchez<br>Héctor Alan Olivera Martínez                           | <u>Clausura de las pláticas Premios de los carteles</u>   |                   |

Rally Matemático

8:45-13:00 hrs.

[DIRECTORIO DE PARTICIPANTES](#)



## Ponencia de Investigación 1

### ANÁLISIS DE HETEROCEDASTICIDAD EN EL MODELO INGRESOS EN FEMSA

Jatzeny Barraza Valdez.

Asesora: Dra. Alejandra Soria Pérez.

Facultad de Ciencias Exactas

Licenciatura

jat-01@hotmail.com

Palabras clave: heterocedasticidad, detección, corrección.

### RESUMEN

En este trabajo, se realiza una investigación para verificar si existe o no heteroscedasticidad en un estado de resultados consolidados de Coca-Cola FEMSA, datos obtenidos trimestralmente desde el año 1997 al 2017, para ello, primeramente se define el concepto de heteroscedasticidad, así como sus consecuencias en los procesos de estimación paramétrica y las distintas pruebas que se pueden efectuar al modelo general para saber si se tiene dicha enfermedad y si es así, efectuar una corrección al modelo.

### INTRODUCCIÓN

La heteroscedasticidad ocurre cuando el supuesto de homoscedasticidad se viola, es decir, que las varianzas condicionales de  $u_i$  ya no son constantes.

En esta investigación se trabaja con este concepto principalmente, además se muestra como se utilizan herramientas matemáticas como es la regresión lineal múltiple, técnicas específicas para detectar la heteroscedasticidad y las pruebas de significancia de los coeficientes de regresión individual y conjunta que se llevaron a cabo mediante el análisis de datos contenido en un software llamado Excel, para así poder facilitar más el procedimiento que se tenga que llevar a cabo.

### MARCO TEÓRICO

Según la página de (empresa socialmente responsable (ESR), s.f.) La Coca-Cola FEMSA es el embotellador público más grande de bebidas de la marca Coca Cola a nivel mundial, distribuyendo más de 4 mil millones de cajas unidad al año y que se cuenta con más de 375 millones de consumidores en 10 países y que estos clientes tienen la oportunidad de adquirir alguna de las 150 marcas de refrescos y bebidas no carbonatadas.

En la base de datos se utilizan tres variables, la variable  $Y_i$  que son los ingresos totales que se refiere a todos los ingresos que recibe en este caso FEMSA procedente de la venta de sus productos, se calcula como el resultado de multiplicar el precio de venta por el número de unidades de productos vendidas. La variable  $X_1$  es el costo de venta es el valor en que se ha incurrido para producir o comprar en este caso el producto que se vende. Cuando se hace una venta, por ejemplo de \$100.000, todo no es utilidad para el vendedor, puesto que para poder vender ese valor, debió haberse comprado un bien, para lo cual indudablemente hubo necesidad de incurrir en un costo, costo que se conoce como costo de venta. Y por último la

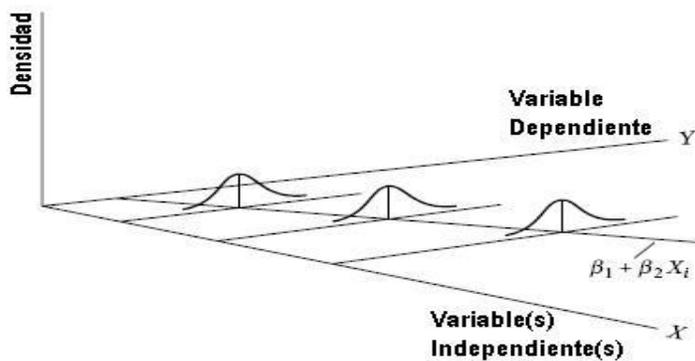
variable  $X_2$  es el gasto de operación organización hace referencia al dinero desembolsado por FEMSA en el desarrollo de sus actividades, en otras palabras, son aquellos destinados a mantener un activo en su condición existente o a modificarlo para que vuelva a estar en condiciones apropiadas al trabajo.

Por otra parte, un supuesto importante del modelo clásico de regresión lineal es que las perturbaciones  $u_i$  que aparecen en la función de regresión poblacional son homoscedásticas; es decir, que todas tienen la misma varianza.

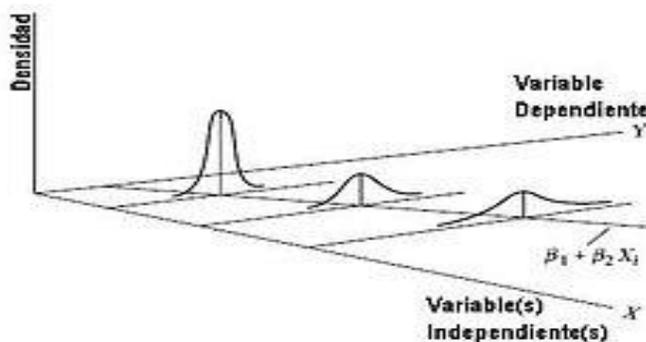
De acuerdo al libro (Gujarati & Dawn C., 2010) la homoscedasticidad es el supuesto del modelo clásico de regresión lineal donde la varianza de cada término de perturbación  $u_i$ , condicional a los valores seleccionados de las variables explicativas, es algún número constante igual a  $\sigma^2$ . Éste es el supuesto de homoscedasticidad,

o igual (homo) dispersión (cedasticidad), es decir, igual varianza. Simbólicamente,

$E(u_i^2) = \sigma^2$ , donde  $i = 0, 1, \dots, n$ . Gráficamente:



La heteroscedasticidad: ocurre cuando el supuesto de homoscedasticidad se viola, es decir, que las varianzas condicionales de  $u_i$  (= varianzas condicionales de  $Y_i$ ) ya no son constantes. Simbólicamente  $E(u_i^2) = \sigma_i^2$ . Gráficamente:



En las Causas de heteroscedasticidad hay diversas razones por las cuales las varianzas de  $u_i$  pueden ser variables, algunas de las cuales son las siguientes:

a) Con base en los modelos de aprendizaje de los errores, a medida que la gente aprende, disminuyen sus errores de comportamiento con el tiempo. En este caso, esperamos que  $\sigma_i^2$  se reduzca.

b) A medida que aumentan los ingresos, la gente posee más ingreso discrecional y, por tanto, tiene mayores posibilidades de decidir cómo disponer de su ingreso. En consecuencia, es probable que  $\sigma_i^2$  aumente con el ingreso.

c) A medida que mejoran las técnicas de recolección de datos, es probable que  $\sigma_i^2$  se reduzca.

Así, es probable que los bancos con equipos complejos de procesamiento de información cometan menos errores en los informes mensuales o trimestrales de sus clientes que los bancos que no los posean.

d) La heteroscedasticidad también surge por la presencia de datos atípicos o aberrantes. La inclusión o exclusión de una observación de este tipo, en especial si el tamaño de la muestra es pequeño, puede alterar sustancialmente los resultados del análisis de regresión.

e) Otra fuente de heteroscedasticidad surge de la violación del supuesto 9 del MCRL, que establece que el modelo de regresión está correctamente especificado. Con mucha frecuencia lo que parece heteroscedasticidad puede deberse a que se omitan del modelo algunas variables importantes.

f) Otra fuente de la heteroscedasticidad es la asimetría en la distribución de una o más regresoras incluidas en el modelo. Los ejemplos los constituyen variables económicas como ingreso, riqueza y escolaridad.

g) Otras fuentes de heteroscedasticidad: como señala David Hendry, la heteroscedasticidad también surge debido a 1) la incorrecta transformación de los datos (por ejemplo, las transformaciones de razón o de primeras diferencias) y 2) una forma funcional incorrecta (por ejemplo, modelos lineales frente a modelos log-lineales).

Las principales consecuencias en el proceso de estimación paramétrica son:

1.- Los estimadores determinados en presencia de heteroscedasticidad son consistentes e insesgados.

2.- La varianza estimada del término estocástico o de perturbación ( $\hat{\sigma}^2$ ), resulta un promedio de todas las variancias de cada término aleatorio  $U_i$ . La cual tiene poca relevancia para las pruebas de hipótesis.

Método de mínimos cuadrados generalizados (MCG). En el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)  $\hat{\beta}_2$  es el mejor estimador lineal e insesgado (MELI) si se mantienen los supuestos del modelo clásico, inclusive el de homoscedasticidad, sin embargo si eliminamos dicho supuesto y lo reemplazamos por el de heteroscedasticidad,  $\hat{\beta}_2$  continua siendo lineal, insesgado y consistente pero ya no el mejor y la varianza mínima ya no está dada por

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$$
. Por desgracia, el método de MCO usual no aprovecha la “información” contenida en la variabilidad desigual de la variable dependiente Y, este método asigna igual peso o importancia a cada observación. Pero existe un método de estimación, conocido como mínimos cuadrados generalizados (MCG), que toma en cuenta la información de datos explícitamente y, por consiguiente, es capaz de producir estimadores que son MELI (varianza mínima). Para ver cómo se hace, se considera el modelo ya familiar con dos variables

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ , donde  $u_i$  son los términos de perturbación. Ahora, se supone que se conocen las varianzas heteroscedásticas  $\sigma_i^2$ . Se divide ambos lados entre  $\sigma_i$  para obtener  $\frac{Y_i}{\sigma_i} = \left(\frac{\beta_1}{\sigma_i}\right) + \beta_2 \left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right) + \left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)$ , para facilidad de exposición se escribe  $Y_i^* = \beta_1^* + \beta_2^* X_i^* + u_i^*$ . El propósito de transformar el modelo original es que la varianza del término de perturbación transformado  $u_i^*$  sea ahora homoscedástica. Como aún se conservan los demás supuestos del modelo clásico, el hallazgo de que  $u_i^*$  es homoscedástico sugiere que si se aplican MCO al modelo transformado se producirán estimadores MELI. En resumen, los  $\beta_1^*$  y  $\beta_2^*$  estimados son ahora MELI y no los estimadores de MCO,  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$ . El estimador de MCG de  $\beta_1^*$  y  $\beta_2^*$  es:

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{(\sum w_i)(\sum w_i X_i Y_i) - (\sum w_i X_i)(\sum w_i Y_i)}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2} \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_1^* = \bar{Y}^* - \hat{\beta}_2^* \bar{X}^*.$$

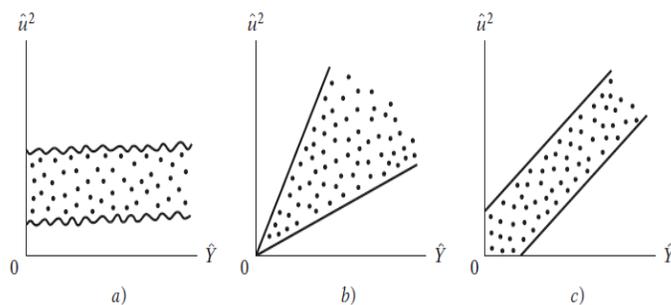
Y su varianza está dada por:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2^*) = \frac{(\sum w_i)}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2}. \quad \text{Donde } w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

El objetivo de este trabajo es aplicar procedimientos de detección a una base de datos y en su caso llevar a cabo la corrección de la misma. Se pueden examinar algunos métodos informales y formales para detectar la heteroscedasticidad. La mayoría de estos métodos basan en el examen de los residuos  $\hat{u}_i$  de MCO, pues son éstos los que se observan y no las perturbaciones  $u_i$ . Se espera que  $\hat{u}_i$  sean buenas estimaciones de  $u_i$ , esperanza que se cumple si el tamaño de la muestra es lo bastante grande.

Método informal.

El método gráfico: Si no hay información empírica sobre la naturaleza de la heteroscedasticidad, en la práctica se puede llevar a cabo un análisis de regresión con el supuesto de que no hay heteroscedasticidad y luego hacer un examen de los residuos elevados al cuadrado,  $\hat{u}_i^2$ , para ver si exhiben algún patrón sistemático. Aunque los  $\hat{u}_i^2$  no son lo mismo que los  $u_i^2$ , los primeros sirven como representantes de los últimos sobre todo si el tamaño de la muestra es lo bastante grande. Un examen de los  $\hat{u}_i^2$  puede revelar patrones como:



En la figura anterior se grafican los  $\hat{u}_i^2$  frente a los  $\hat{Y}_i$ , que son los  $Y_i$  estimados mediante la línea de regresión, con la idea de averiguar si el valor medio estimado de  $Y$  está relacionado sistemáticamente con el residuo al cuadrado. En dicha figura en la primera grafica (inciso a) se ve que no hay un patrón sistemático entre las dos variables, lo cual sugiere que tal vez no haya heteroscedasticidad en los datos. Sin embargo, las otras dos graficas muestran patrones definidos. Con tal conocimiento, aunque informal, es posible transformar los datos

de manera que, una vez transformados, no presenten heteroscedasticidad. En lugar de graficar los  $\hat{u}_i^2$  frente a los  $\hat{Y}_i$ , se pueden graficar frente a una de las variables explicativas, en especial si el gráfico de  $\hat{u}_i^2$  frente a  $\hat{Y}_i$  presenta un patrón como el de la primer grafica de la figura anterior.

Método formal.

1.- Prueba de Park: Park formaliza el método gráfico con la sugerencia de que  $\sigma_i^2$  es algún tipo de función de la variable explicativa  $X_i$ . La forma funcional es

In  $\sigma_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i$ . Donde  $v_i$  es el término de perturbación estocástico. Pero como  $\sigma_i^2$  por lo general no se conoce, Park sugiere utilizar  $\hat{u}_i^2$  como aproximación y correr la regresión  $\ln \hat{u}_i^2 = \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i$ . Si  $\beta$  resulta estadísticamente significativo, esto sugerirá heteroscedasticidad en los datos. Si resulta no significativo, podemos aceptar el supuesto de homoscedasticidad.

2.- Prueba de Glejser: La prueba de Glejser en esencia es similar a la de Park. Después de obtener los residuos  $\hat{u}_i$  de la regresión MCO, Glejser sugiere una regresión sobre los valores absolutos de  $\hat{u}_i$  sobre la variable  $X$  que se cree muy asociada con  $\sigma_i^2$ . En sus experimentos, Glejser utiliza las siguientes formas funcionales:

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 X_i + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 \sqrt{X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i^2} + v_i$$

Glejser descubrió que para muestras grandes, los cuatro primeros modelos suelen dar resultados satisfactorios en la detección de la heteroscedasticidad. En la práctica, por consiguiente, la técnica de Glejser es útil para muestras grandes, y en muestras pequeñas sirve estrictamente como herramienta cualitativa para obtener una noción sobre la heteroscedasticidad.

3.- Prueba de Goldfeld-Quandt: Se considera el modelo usual con dos variables  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ . Ahora se supone que  $\sigma_i^2$  está relacionado positivamente con  $X_i$ , en la forma

$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$ . Goldfeld y Quandt sugieren los siguientes pasos:

Paso 1. Ordenar las observaciones de acuerdo con los valores de  $X_i$ , a partir del valor más bajo de  $X$ .

Paso 2. Se omiten las  $c$  observaciones centrales, donde  $c$  se especificó a priori, y se divide las observaciones restantes  $(n - c)$  en dos grupos, cada uno de  $(n - c)/2$  observaciones.

Paso 3. Se ajustan regresiones MCO separadas a las primeras  $(n - c)/2$  observaciones y a las últimas  $(n - c)/2$  observaciones, y se obtiene las respectivas sumas de cuadrados residuales  $SCR1$  y  $SCR2$ ;  $SCR1$  representa la SCR de la regresión correspondiente a los valores más bajos de  $X_i$  (el grupo de varianza pequeña), y  $SCR2$ , a los valores más grandes

de  $X_i$  (el grupo de varianza grande). Cada SCR tiene  $\frac{n-c-2k}{2}$  grados de libertad (gl) donde  $k$  es el número de parámetros que deben estimarse, inclusive el intercepto.

Paso 4. Se calcula la razón  $\lambda = \frac{SCR2/gl}{SCR1/gl}$ . Si supusimos que las  $u_i$  están normalmente distribuidas (lo cual suele hacerse), y si el supuesto de homoscedasticidad es válido, entonces se demuestra que  $\lambda$  sigue la distribución F con un número de gl en el numerador y uno en el denominador iguales a  $(n - c - 2k)/2$ . Si en una aplicación  $\lambda$  (=F) calculada es superior al F crítico en el nivel de significancia seleccionado, podemos rechazar la hipótesis de homoscedasticidad, es decir, podemos afirmar que la heteroscedasticidad es muy probable.

4.- Prueba Breusch-Pagan-Godfrey: Para ilustrar esta prueba, se considera el modelo de regresión lineal con  $k$  variables  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$  y se supone que la varianza del error  $\sigma_i^2$  se describe como  $\sigma_i^2 = f(\alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \dots + \alpha_m Z_{mi})$  es decir,  $\sigma_i^2$  es algún tipo de función de las variables  $Z$  no estocásticas; alguna de las  $X$  o todas ellas pueden servir como  $Z$ . Específicamente, se supone que  $\sigma_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \dots + \alpha_m Z_{mi}$ . Si  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ ,  $\sigma_i^2 = \alpha_1$  que es una constante. Por consiguiente, para probar si  $\sigma_i^2$  es homoscedástica, se puede probar la hipótesis de que  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ . Ésta es la idea básica de la prueba Breusch-Pagan. El procedimiento es el siguiente.

Paso 1. Se estima  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$  mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y se obtienen los residuos  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$ .

Paso 2. Obtenga  $\tilde{\sigma}^2 = \sum \hat{u}_i^2 / n$  éste es el estimador de máxima verosimilitud (MV) de  $\sigma^2$ . [Nota: El estimador de MCO es  $\sum \hat{u}_i^2 / [n - k]$ ].

Paso 3. Se construyen las variables  $p_i$  definidas como  $p_i = \hat{u}_i^2 / \tilde{\sigma}^2$ .

Paso 4. Se hace la regresión de los  $p_i$  así contruidos sobre las  $Z$  como  $p_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \dots + \alpha_m Z_{mi} + v_i$ .

Paso 5. Se obtiene la SCE (suma de cuadrados explicada) de  $p_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \dots + \alpha_m Z_{mi} + v_i$  y se define  $\Theta = \frac{1}{2} SCE$ . Si suponemos que los  $u_i$  están normalmente distribuidos, se demuestra que si hay homoscedasticidad, y si el tamaño  $n$  de la muestra aumenta indefinidamente, entonces  $\Theta \sim \chi_{m-1}^2$ , es decir,  $\Theta$  sigue una distribución ji cuadrada con  $(m-1)$  grados de libertad. Por consiguiente, si en una aplicación el  $\Theta$  ( $= \chi^2$ ) calculado excede al valor crítico  $\chi^2$  en el nivel de significancia seleccionado, se rechaza la hipótesis de homoscedasticidad; de lo contrario, no se rechaza.

5.- Prueba general de heteroscedasticidad de White: se considera el siguiente modelo de regresión con tres variables (la generalización al modelo con  $k$  variables es sencilla),  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$  Para realizar la prueba de White se procede de la siguiente forma;

Paso 1. Dada la información, se estima  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$  y se obtienen los residuos  $\hat{u}_i$ .

Paso 2. Se efectúa la siguiente regresión (auxiliar)  $\hat{u}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{3i}^2 + \alpha_6 X_{2i} X_{3i} + v_i$ . Se obtiene  $R^2$  de esta regresión (auxiliar).

Paso 3. Según la hipótesis nula de que no hay heteroscedasticidad, puede demostrarse que el tamaño de la muestra ( $n$ ) multiplicado por  $R^2$  obtenido de la regresión auxiliar asintóticamente sigue la distribución ji cuadrada con grados de libertad igual al número de regresoras en la regresión auxiliar. Es decir,  $n * R^2 \sim \chi_{gl}^2$ .

Paso 4. Si el valor ji cuadrada obtenido en  $n * R^2 \sim \chi_{gl}^2$  excede al valor ji cuadrada crítico en el nivel de significancia seleccionado, la conclusión es que hay heteroscedasticidad. Si éste no excede el valor ji cuadrada crítico, no hay heteroscedasticidad.

Corrección de heteroscedasticidad.

Es necesario introducir medidas correctivas para la heteroscedasticidad, en este caso el método que se usa es a partir de la prueba de Goldfeld-Quandt por facilidad del autor. Al saber cuál de las variables explicativas es la que causa el problema según la prueba realizada, al modelo original se le divide entre dicha variable, para comprobar que ya no existe tal enfermedad se vuelve a realizar la prueba.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Objetivos:

- 1.-Comprender y analizar el estado de resultados consolidados de Coca-Cola FEMSA.
- 2.-Proponer un modelo de regresión lineal múltiple con los datos antes dichos y después aplicar algunas de las pruebas para verificar si hay o no heteroscedasticidad.
- 3.-Se pretende utilizar no una, sino varias pruebas para la existencia de heteroscedasticidad con el fin de comparar y analizar los resultados que se obtendrán al aplicar dichas pruebas al modelo.
- 4.- Al poder identificar la heteroscedasticidad en el modelo predicho, se podrán aplicar las técnicas de corrección, ya que dicha detección juega un papel importante dentro del modelo de regresión lineal.

Justificación: Con esta investigación se sentarán las bases para futuras investigaciones en las que se pretendan analizar y sobre todo comprender que ocurre cuando se presenta este tipo de problema en un conjunto de datos obtenidos ya sea por alguna empresa, así como saber cuáles son sus causas y consecuencias y como solucionar dicho problema con ayuda de las matemáticas.

Es muy conveniente ya que esta investigación podría ayudar a los estudiantes a conocer mejor todo lo relacionado con la heteroscedasticidad, así como poner en práctica metódicamente lo aprendido en la Facultad con hechos reales del entorno.

Alcances y limitaciones: Este trabajo llegará únicamente a la corrección del modelo de regresión lineal por una sola técnica en caso de heteroscedasticidad.

El proyecto no causó problemas ya que la base de datos que se utilizó fue encontrada en fuentes confiables de internet y el tema expuesto se me facilitó comprenderlo gracias a la ayuda de libros consultados en la biblioteca de la Facultad de Ciencias Exactas, por otra parte el modelo asignado a la investigación y el efectuar las diferentes pruebas y

correcciones de heterocedasticidad se obtienen sin ningún problema mediante software previamente utilizado en clases llamado Excel en donde los resultados fueron realizados con el análisis de datos que contiene dicho software.

## **METODOLOGÍA**

La metodología está integrada por cuatro secciones:

1. Tipología del estudio.
2. Método de investigación.
3. Técnicas y procedimientos para recopilar la información necesaria.
4. Técnicas para analizar la información obtenida.

**Tipología del estudio:** La investigación es de tipo documental ya que se obtiene la información de fuentes bibliográficas y páginas oficiales de internet como lo es FEMSA. También es exploratoria ya que se está examinando un tema poco conocido por el autor para tratar de comprenderlo, y por último, es explicativa debido a que enuncia las causas y explica lo que es la heteroscedasticidad.

**Método de investigación:** Es hipotético ya que al analizar y trabajar con las variables se tratan de demostrar las hipótesis planteadas.

**Técnicas y procedimientos para recopilar la información:** Las técnicas que se utilizan para adquirir la información necesaria en esta investigación son la consulta bibliográfica y la revisión documental ya que recolecta la información de libros tanto físicos como electrónicos y de sitios oficiales de internet.

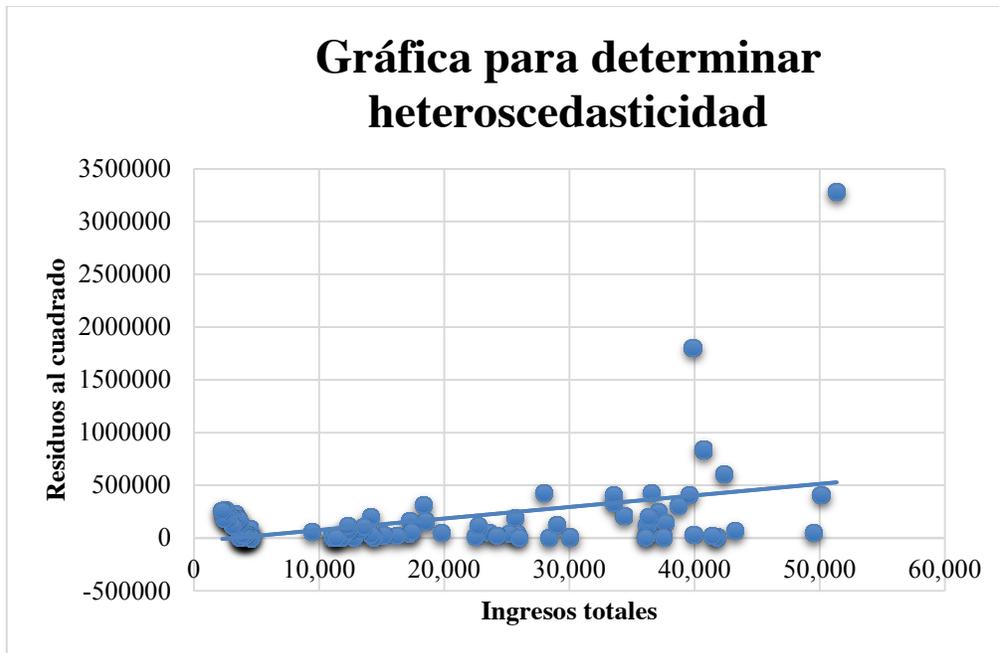
**Técnicas para analizar la información obtenida:** Las técnicas de análisis de información que se utilizan en la investigación son el modelo de regresión lineal múltiple, técnicas específicas para detectar la heteroscedasticidad y las pruebas de significancia de los coeficientes de regresión individual y conjunta.

## **RESULTADOS.**

Como antes ya se mencionó el trabajo se realiza mediante un estado de resultados consolidado de Coca-Cola FEMSA expresado en millones de pesos trimestralmente desde el año 1997 al 2017, se obtienen un total de 82 datos. Las variables que se utilizan son;  $Y$ : Ingresos totales.  $X_1$ : Costos de venta.  $X_2$ : Gastos de operación.

El modelo de regresión lineal múltiple obtenido mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) es:  $Y = 419.83078 + 1.41556X_1 + 0.71659X_2$ .

Al efectuar el método grafico se obtiene el siguiente resultado:



| Nombre de la prueba | Modelo de regresión auxiliar                                   | Datos obtenidos   | Observaciones  |
|---------------------|--|---|--|
| Prueba de Park      | $\ln \hat{u}_i^2 = 3.3590 + 12.0638 \ln X_1 - 11.9048 \ln X_2$ | Hipótesis:<br>$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$<br>$H_1: \beta_1, \beta_2 \neq 0$<br>$F_{0.05,2,79} = 3.15$<br>$F=6.1870$  | El valor de F calculado es mayor al valor de F crítico ( $F_{0.05,2,79}$ ), entonces se rechaza la hipótesis nula de que los costos de venta y gastos de operación no tienen ningún efecto sobre los ingresos totales, por lo tanto $\beta_1$ y $\beta_2$ son estadísticamente significativos, es decir que existe heteroscedasticidad en los datos. |
| Prueba de Glejser   | $ \hat{u}_i  = 194.0707 + 0.1235 X_1 - 0.1871 X_2$             | Hipótesis:<br>$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$<br>$H_1: \beta_1, \beta_2 \neq 0$<br>$F_{0.05,2,79} = 3.15$<br>$F=11.8189$ | El valor de F calculado es mayor al valor de F crítico ( $F_{0.05,2,79}$ ), entonces se rechaza la hipótesis nula de que los costos de venta y gastos de operación no tienen ningún efecto sobre los ingresos totales, por lo tanto $\beta_1$ y $\beta_2$ son estadísticamente significativos, es decir que  |

| Nombre de la prueba          | Modelo de regresión auxiliar               | Datos obtenidos  | Observaciones  |
|------------------------------|--|--|--|
|                              |  |  | existe heteroscedasticidad en los datos.   |
| Prueba de Goldfeld-Quandt    | $Y_i = 107.5025 + 1.3148 X_1 + 0.9978 X_2$ | Hipótesis:<br>$H_0: \text{Homoscedasticidad}$<br>$H_1: \text{Heteroscedasticidad}$<br>$SCR_1 = 1908062.42$<br>$SCR_2 = 9798990.48$<br>Numero de observaciones omitidas(c)= 10<br>$\lambda = 5.1355$<br>$F_{0.05,33,33} = 1.84$ | El valor de F calculado ( $\lambda$ ) es mayor al valor de F critico ( $F_{0.05,33,33}$ ), por lo tanto se rechaza la hipótesis nula de homoscedasticidad, es decir existe heteroscedasticidad en los datos. |
| Prueba Breusch-Pagan-Godfrey | $Y_i = 0.0021 + 0.0011 X_1 - 0.0018 X_2$   | Hipótesis:<br>$H_0: \text{Homoscedasticidad}$<br>$H_1: \text{Heteroscedasticidad}$<br>$SCE=109.4214$<br>$\chi^2_{0.05,2} = 5.991$<br>$\chi^2 = 54.7107$  | Ji cuadrada calculada ( $\chi^2$ ) es mayor que ji cuadrada critico ( $\chi^2_{0.05,2}$ ), se rechaza la hipótesis nula, por lo tanto existe heteroscedasticidad en los datos.                               |

Como se puede ver claramente en las observaciones de todas las pruebas realizadas, el modelo general presenta heteroscedasticidad, entonces, de acuerdo a lo antes dicho en la corrección de heteroscedasticidad, se va a corregir partiendo de los datos obtenidos de la prueba de Goldfeld-Quandt, de acuerdo a esta prueba realizada cualquiera de las dos variables explicativas  $X_1$  o  $X_2$  causan el problema, en este caso se decide dividir el modelo original entre  $X_1$  obteniendo como resultado el nuevo modelo general:  $Y_i^* = 0.8176 + 1.8260 X_2$ . Para comprobar que dicho modelo ya no presenta heteroscedasticidad se vuelve a hacer la prueba de Goldfeld-Quandt y los resultados fueron los siguientes:

| Nombre de la prueba       | Modelo de regresión auxiliar | Datos obtenidos   | Observaciones  |
|---------------------------|------------------------------|---|--|
| Prueba de Goldfeld-Quandt | $Y_i = 1.4627 + 0.7082 X_2$  | Hipótesis:<br>$H_0: \text{Homoscedasticidad}$<br>$H_1: \text{Heteroscedasticidad}$<br>$SCR_1 = 0.1633$<br>$SCR_2 = 0.2548$<br>Numero de observaciones omitidas(c)= 10<br>$\lambda = 1.56008$<br>$F_{0.05,33,33} = 1.84$ | El valor de F calculado ( $\lambda$ ) es menor al valor de F critico ( $F_{0.05,33,33}$ ), por lo tanto se acepta la hipótesis nula de homoscedasticidad, es decir que no existe heteroscedasticidad en los datos. |

## CONCLUSIONES

En Coca-Cola FEMSA los últimos trimestres las operaciones en México debieron lidiar con inundaciones e interrupciones ligadas con los desastres naturales ocurridos en el mes de septiembre lo que hace que tengan un impacto moderado en los datos, lo cual hace que algunos de estos datos sean atípicos, razón suficiente por la cual el estado de resultado consolidado presente heteroscedasticidad como se puede ver claramente en la gráfica para determinar dicha enfermedad y en todas las pruebas formales realizadas en la investigación. Determinar que prueba es la mejor no es tan fácil, pues estas pruebas se basan en supuestos diversos. Al comparar las pruebas, es necesario prestar atención al tamaño (o nivel de significancia), potencia (la probabilidad de rechazar una hipótesis falsa) y sensibilidad a los valores atípicos.

## Referencias

- De Arce, R., & Mahia, R. (Enero de 2001). *uam*. Obtenido de Dpto. de economía aplicada: [https://www.uam.es/personal\\_pdi/economicas/rarce/pdf/heterocedasticidad.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/economicas/rarce/pdf/heterocedasticidad.pdf)
- Desconocido. (9 de julio de 2012). *slideshare*. Obtenido de heteroscedasticidad: <https://es.slideshare.net/franbf66/heterocedasticidad>
- FEMSA. (1997-2017). *RESULTADOS TRIMESTRALES FEMSA*. Obtenido de FEMSA: <http://ir.femsa.com/mx/results.cfm>
- FEMSA. (25 de JULIO de 2017). *FEMSA*. Obtenido de [http://files.shareholder.com/downloads/FEMSAS/5484831412x0x950549/A1ADA EFC-6E99-43CA-A59F-0FA1C72A8355/FEMSA\\_2Q17\\_Earnings\\_Release\\_Esp\\_FV.PDF](http://files.shareholder.com/downloads/FEMSAS/5484831412x0x950549/A1ADA EFC-6E99-43CA-A59F-0FA1C72A8355/FEMSA_2Q17_Earnings_Release_Esp_FV.PDF)
- FEMSA. (26 de OCTUBRE de 2017). *FEMSA Anuncia Resultados del Tercer Trimestre 2017*. Obtenido de FEMSA: [http://files.shareholder.com/downloads/FEMSAS/5484831412x0x961262/DEECC44E-6CD1-4AD8-A094-BF0BE7EE9B70/FEMSA\\_3Q17\\_Earnings\\_Release\\_Esp\\_FV.PDF](http://files.shareholder.com/downloads/FEMSAS/5484831412x0x961262/DEECC44E-6CD1-4AD8-A094-BF0BE7EE9B70/FEMSA_3Q17_Earnings_Release_Esp_FV.PDF)
- Gujarati, D. N., & Dawn C., P. (2010). *ECONOMETRIA*. McGraw-Hill/Irwin, Inc.
- Murillo, F. C., & Gonzalez Lopez, B. (2000). *Heteroscedasticidad*. Obtenido de Manual de econometria 9:  
[http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/6/6090/Manual\\_de\\_Econometria\\_9.pdf](http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/6/6090/Manual_de_Econometria_9.pdf)

**ANEXO**

Base de datos utilizada (FEMSA, 1997-2017), resultados consolidados expresados en millones de pesos mexicanos desde 1997 al 2017

| <b>X1</b>              | <b>X2</b>                  | <b>Y</b>                |
|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| <b>Costo de ventas</b> | <b>Gastos de operación</b> | <b>Ingresos totales</b> |
| 27,283                 | 16,334                     | 50,108                  |
| 29,060                 | 16,207                     | 51,357                  |
| 27,145                 | 15,221                     | 49,533                  |
| 23,474                 | 13,233                     | 42,351                  |
| 21,495                 | 12,440                     | 39,939                  |
| 20,182                 | 12,007                     | 37,097                  |
| 21,427                 | 12,666                     | 40,742                  |
| 19,727                 | 12,467                     | 37,661                  |
| 19,058                 | 11,862                     | 36,550                  |
| 18,616                 | 11,254                     | 34,374                  |
| 21,059                 | 12,134                     | 39,567                  |
| 22,196                 | 13,760                     | 41,781                  |
| 21,886                 | 13,806                     | 41,434                  |
| 20,811                 | 13,088                     | 38,708                  |
| 23,322                 | 13,309                     | 43,240                  |
| 19,919                 | 12,512                     | 37,494                  |
| 19,075                 | 12,043                     | 36,260                  |
| 18,013                 | 11,474                     | 33,561                  |
| 21,045                 | 11,591                     | 39,860                  |
| 19,207                 | 11,499                     | 36,193                  |
| 19,593                 | 11,988                     | 36,295                  |
| 18,338                 | 10,890                     | 33,542                  |
| 19,648                 | 10,864                     | 36,090                  |
| 16,162                 | 9,581                      | 30,077                  |
| 15,348                 | 8,667                      | 28,388                  |
| 14,071                 | 7,966                      | 25,854                  |
| 15,017                 | 7,894                      | 27,991                  |
| 13,546                 | 7,880                      | 25,675                  |
| 13,522                 | 7,567                      | 25,177                  |
| 12,880                 | 7,197                      | 23,595                  |
| 15,617                 | 8,588                      | 29,032                  |
| 13,943                 | 8,105                      | 26,007                  |
| 12,757                 | 7,750                      | 24,184                  |
| 12,083                 | 7,138                      | 22,526                  |
| 12,292                 | 6,407                      | 22,752                  |

| <b>X1</b>              | <b>X2</b>                  | <b>Y</b>                |
|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| <b>Costo de ventas</b> | <b>Gastos de operación</b> | <b>Ingresos totales</b> |
| 10,374                 | 6,202                      | 19,770                  |
| 9,598                  | 5,777                      | 18,544                  |
| 8,986                  | 5,453                      | 17,257                  |
| 9,350                  | 5,787                      | 18,361                  |
| 8,789                  | 5,579                      | 17,264                  |
| 9,066                  | 5,397                      | 17,372                  |
| 8,675                  | 5,114                      | 16,225                  |
| 8,008                  | 4,546                      | 15,173                  |
| 7,534                  | 4,488                      | 14,369                  |
| 7,301                  | 4,428                      | 14,108                  |
| 6,642                  | 4,187                      | 12,765                  |
| 7,175                  | 4,378                      | 14,165                  |
| 6,712                  | 4,248                      | 13,228                  |
| 6,867                  | 4,338                      | 13,580                  |
| 6,132                  | 3,902                      | 11,828                  |
| 6,341                  | 3,759                      | 12,363                  |
| 5,823                  | 3,630                      | 11,411                  |
| 5,649                  | 3,676                      | 11,074                  |
| 5,765                  | 3,659                      | 11,069                  |
| 6,246                  | 3,741                      | 12,287                  |
| 5,801                  | 3,761                      | 11,358                  |
| 4,771                  | 2,854                      | 9,462                   |
| 1,996                  | 1,160                      | 4,149.60                |
| 2,127                  | 1,208                      | 4,507.30                |
| 1,982                  | 1,256                      | 4,342.20                |
| 2,010                  | 1,283                      | 4,474.40                |
| 1,733                  | 1,139                      | 3,759.80                |
| 1,938                  | 1,319                      | 4,299.30                |
| 1,888                  | 1,255                      | 4,123.60                |
| 1,912                  | 1,221                      | 4,122.80                |
| 1,729                  | 1,142                      | 3,636.50                |
| 2,198                  | 1,474                      | 4,588.40                |
| 2,101                  | 1,400                      | 4,229.70                |
| 2,045                  | 1,318                      | 4,104.00                |
| 1,983                  | 1,304                      | 3,913.60                |
| 1,954                  | 1,184                      | 3,858.10                |
| 1,906                  | 1,208                      | 3,613.80                |
| 1,950                  | 1,218                      | 3,685.70                |
| 1,838                  | 1,102                      | 3331                    |

| <b>X1</b>              | <b>X2</b>                  | <b>Y</b>                |
|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| <b>Costo de ventas</b> | <b>Gastos de operación</b> | <b>Ingresos totales</b> |
| 1,960                  | 1,064                      | 3,536.20                |
| 1,674                  | 988                        | 3,061.30                |
| 1,582                  | 900                        | 2,846.00                |
| 1,410                  | 817                        | 2,482                   |
| 1,673                  | 894                        | 3,082.90                |
| 1,486                  | 865                        | 2,706.60                |
| 1,306                  | 814                        | 2,420.90                |
| 1,273                  | 770                        | 2,265                   |

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 2

### EL CONTRAFUERTE DE LA CATEDRAL.

Héctor Alfonso Sánchez Aragón, Silvia Janeth Solís Beltrán. Asesora: Dra. Alicia López Betancourt. Contacto: [janeth\\_kltz\\_89@hotmail.com](mailto:janeth_kltz_89@hotmail.com)

Facultad de Ciencias Exactas

*Correos: poncho\_290@hotmail.com, janeth\_kltz\_89@hotmail.com*

Alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Palabras claves: contrafuerte, solución de ecuación cuarto grado, análisis numérico

#### Resumen:

En el presente trabajo se muestra una aplicación de distintas ramas de las matemáticas como lo son: Cálculo Diferencial, Geometría y Análisis Numérico a la ingeniería estructural, mediante la cual se analiza la necesidad de construir un contrafuerte en la Catedral Basílica Menor de la Inmaculada Concepción (Catedral de Durango). Para este propósito se hizo un estudio sobre la importancia que tienen los contrafuertes para la preservación de los templos.

#### Introducción:

Cada etapa de la historia de la humanidad, o de una nación en particular, se caracteriza en gran medida, por el tipo de construcciones realizadas; de éstas, sólo un número reducido ha sobrevivido hasta nuestros días. Estas construcciones forman parte del Patrimonio Histórico de una nación o de la humanidad; su conservación es importante también porque pueden contribuir al desarrollo del lugar en que se encuentran.

Aunque muchas construcciones antiguas han perdurado durante siglos, existen diversas causas que pueden deteriorar su resistencia con el paso del tiempo e incluso en algunos casos llevarlas al colapso ante su peso propio. Para evitar que estas construcciones se pierdan se hacen reestructuraciones que permitan su conservación, claro ejemplo de ello es la última modificación que se realizó a la Catedral del estado en el año 2010.

**Marco teórico:**

Las matemáticas aplicadas son de gran ayuda en distintas áreas tecnológicas para Modelado, Simulación y Optimización de Procesos o Fenómenos, como el Túnel de viento o el Diseño de experimentos.

El hoy llamado teorema de Pitágoras, quizá el más popular en las Matemáticas según los descubrimientos arqueológicos que los restos de las culturas en Mesopotamia. Egipto, India y China, era conocido y aplicado, con bastante antelación a la Escuela Pitagórica. Pero, parece ser que no lo conocían ni las grandes civilizaciones precolombinas de América ni tampoco las del continente africano, exceptuando la egipcia (Acevedo, 2011). Lo cierto es que él y el grupo de pitagóricos que dirigía fueron los que después de un arduo trabajo determinaron esta propiedad exclusiva de los triángulos rectángulos. Para entender la definición del teorema de Pitágoras es necesario comprender dos conceptos fundamentales de la teoría de triángulos rectángulos: para que un triángulo rectángulo sea considerado como tal debe contar con un ángulo interior de  $90^\circ$  mientras que los otros dos son siempre menores que  $90^\circ$ . Los lados de un triángulo rectángulo que comprenden el ángulo de  $90^\circ$  se denominan ‘catetos’ mientras que aquel lado que es opuesto a dicho ángulo es llamado ‘hipotenusa’; en todos los casos y sin excepción, la hipotenusa tiene un largo mayor al de los catetos que comprenden el triángulo rectángulo. Si comprendemos al cien por ciento estos dos conceptos básicos de los triángulos rectángulos, no tendremos ningún problema al analizar la relación dada gracias al teorema de Pitágoras. Así, tenemos que: “En todo triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa  $h$  elevada a la potencia 2 es igual que la suma de la misma potencia en cada cateto  $c_1$  y  $c_2$ ” (Martínez Y. I., 2017).

Para el desarrollo de este trabajo se debe mencionar también la importancia del cálculo diferencial, el cual tiene diversas aplicaciones a la ingeniería. Se originó en el siglo XVII, por Isaac Newton, al realizar estudios sobre el movimiento; es decir al estudiar la velocidad de los cuerpos al caer al vacío ya que cambia de un momento a otro, la velocidad en cada instante debe calcularse teniendo en cuenta la distancia que recorre en un tiempo infinitesimalmente y pequeño. Gottfried Leibniz realizó investigaciones similares e ideando símbolos matemáticos que se aplican hasta nuestros días descubrió y comenzó a desarrollar el cálculo diferencial en 1675. Su primera publicación sobre el tema fue en 1684 inventó símbolos matemáticos para la derivada y la integral. Fue el primero en usar el término “Función” y el uso de símbolo para la igualdad.

Una rama de las matemáticas importantes para su aplicación a la ingeniería es el Análisis Numérico que, mediante el uso de algoritmos iterativos, obtiene soluciones numéricas a problemas en los cuales la matemática simbólica (o analítica) resulta poco eficiente y en consecuencia no puede ofrecer una solución. En particular, a estos algoritmos se les denomina métodos numéricos.

Por lo general los métodos numéricos se componen de un número de pasos finitos que se ejecutan de manera lógica, mejorando aproximaciones iniciales a cierta cantidad, tal como la raíz de una ecuación, hasta que se cumple con cierta cota de error. A esta operación cíclica de mejora del valor se le conoce como iteración.

El desarrollo y el auge del uso del análisis numérico corre en forma paralela al desarrollo tecnológico de la computación. De hecho, el análisis numérico resulta ser la manera más natural de resolver modelos matemáticos (de naturaleza algebraica o trascendente tanto

para la matemática como una forma de estudio de diversos sistemas) (Cortés Rosas, González Cárdenas, & Pinilla Morán, 2006).

Teniendo en cuenta los aspectos matemáticos comentados anteriormente es importante hablar también de los contrafuertes, en (Gómez, 2007) se explica que el origen de los contrafuertes se debe a la necesidad de soportar la componente horizontal de la carga que origina una bóveda o a veces una cubierta, además de su carga vertical, tienden a “abrirse”, y empujar transversalmente al muro que lo sustenta.

Los contrafuertes más comunes están adosados al muro, aunque hay algunos ejemplos de contrafuertes tipo botarel. Su disposición a veces es irregular debido a que suele haber diferentes etapas de construcción; existen casos en los que algún problema de tipo estructural pudo propiciar la construcción de nuevos contrafuertes o el aumento de la sección de un contrafuerte ya existente.

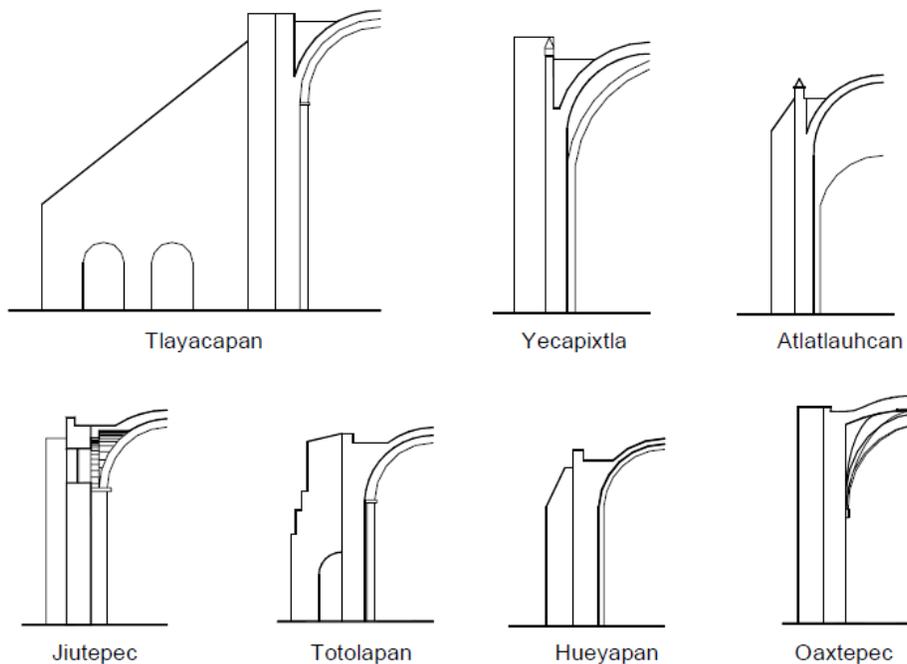


Figure 1.- Geometría de contrafuertes

Para poder tener una idea general sobre el contrafuerte que se propone para la Catedral del estado de Durango se debe hablar un poco de ésta.

La historia de la Catedral Basílica Menor de la Inmaculada Concepción comienza cuando hace varios años en el mismo sitio donde se encuentra la misma, se había construido la antigua parroquia de la Asunción, la cual fue nombrada en el año 1620 como catedral y posteriormente destruida a causa de un incendio. Finalmente, en el año 1695 se inició la obra de la actual Catedral Basílica a cargo del arquitecto Mateo Núñez, la cual fue terminada completamente en 1884.

En tanto su arquitectura, el edificio cuenta con cinco naves en total, las cuales se encuentran divididas en la principal, al centro, dos laterales y dos que están ocupadas por las capillas.



Figure 2.- Estructura de la Catedral

Absolutamente todo su estilo es barroco, con inmensas columnas corintias estriadas ubicadas en el primer cuerpo y salomónicas en el segundo. El arco principal que se presenta es de medio punto y las columnas salomónicas son en total seis, de las cuales dos están en el sector central separadas por la ventana del coro y las cuatro calles poseen imágenes de santos.

Finalmente, el interior de la Catedral ofrece motivos bizantinos y frescos como los que se pueden visualizar en la cúpula, pintados a inicios del siglo XX. En tanto al altar, está comprendido por un ciprés de estilo neoclásico con la imagen de la Inmaculada Concepción y el resto de los altares, conservan imágenes intactas.



Figure 3.- Fachada de la catedral de Durango, Dgo.

### Planteamiento del problema.

La Catedral del estado de Durango presenta altas deficiencias de estructura actualmente, debido al paso del tiempo se deteriora y no cuenta con una distribución de peso en sus cúpulas laterales.

**Objetivo.**

El objetivo es realizar un análisis para la implementación de un contrafuerte que ayude a preservar la estructura de la catedral. Presentando datos para su implementación, optimización de la estructura.

**Justificación**

Al realizar los contrafuertes a la instalación de la catedral podrá ayudar a preservar su estructura ya que no se forzarán las paredes que con el pasar del tiempo ya presentan desgastes por el peso de las cúpulas.

**Alcances**

Realizar el análisis para la implementación de un contra fuerte en ambas cúpulas laterales, mostrando datos que ayudaran a preservar más la estructura.

**Limitación**

- La solución presente se limita al planteamiento del problema.
- Falta de conocimiento en ingeniería estructural.
- El tiempo establecido para realizar el estudio del problema.

**Metodología**

Las metodologías usadas para el desarrollo del problema son: el teorema de Pitágoras, Cálculo diferencial para minimizar el tamaño del contrafuerte y métodos de análisis numérico para la resolución de una ecuación de cuarto grado.

La información fue recabada en artículos culturales del estado, y con asesorías de expertos en la historia de Durango.

**Tipología de estudio**

Esta investigación es de corte cualitativo documental y de campo. Documental porque plantea el diseño de un contrafuerte siguiendo los resultados reportados en diferentes investigaciones. De campo dado que parte de la información recabada fue directamente del lugar de los hechos.

**Técnicas y procedimientos para la recopilación de información**

Las principales técnicas y procedimientos para obtención de información relevante en esta investigación son:

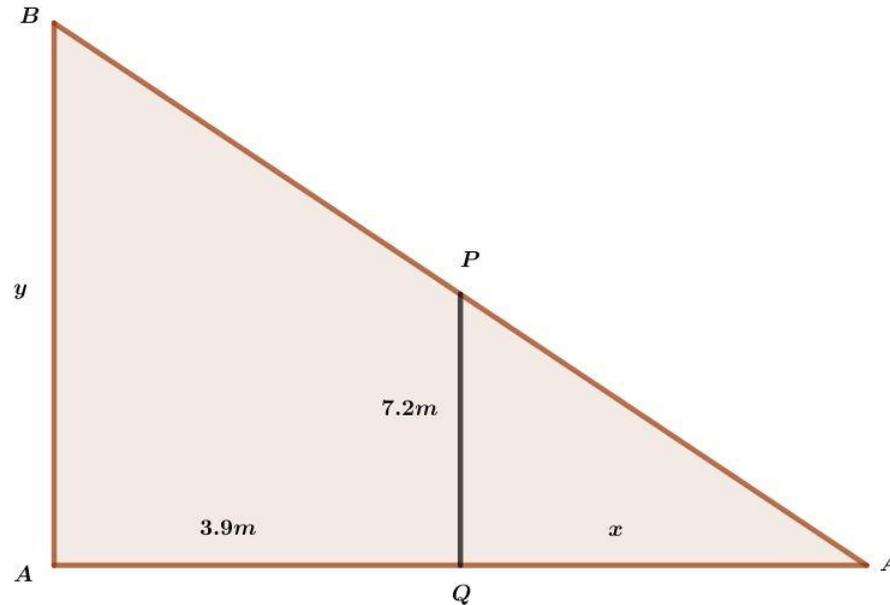
- Consulta bibliográfica (libros, revistas, informes)
- Revisión documental (libros, revistas, periódicos, internet, videos, etc.)
- Observación
- Entrevista

**Técnicas de Análisis de Información**

En base a la información recabada sobre la arquitectura de los contrafuertes se analizará la geometría que éstos tienen, para, por medio del teorema de Pitágoras mencionado en el marco teórico, calcular la ecuación que modela las dimensiones del contrafuerte de la Catedral y con ayuda del cálculo diferencial optimizar dichas medidas. Para facilitar los cálculos se utilizan los softwares Scientific WorkPlace y Geogebra.

## Resultados

E en la *Ilustración 1* se muestra el esquema que representa la geometría del contrafuerte  $AB$  apoyado en un muro paralelo  $QP$  de altura  $7.2m$ , a una distancia de  $3.9m$  del muro que debe reforzarse (Gómez, 2007).



*Ilustración 1: Contrafuerte AB apoyado en P.*

Para determinar la longitud del contrafuerte y su emplazamiento se aplica el Teorema de Pitágoras (descrito en el marco teórico), se obtiene la siguiente ecuación:

$$AB^2 = y^2 + (3.9 + x)^2 \quad (1)$$

Otra igualdad que se sigue por la definición de triángulos congruentes es:

$$\frac{y}{3.9 + x} = \frac{7.2}{x}$$

Al despejar  $y$  de la ecuación anterior y sustituirlo en (1) obtenemos:

$$(AB)^2 = \left(\frac{7.2}{x}(3.9 + x)\right)^2 + (3.9 + x)^2$$

Simplificando:

$$(AB)^2 = \left(\frac{7.2}{x}\right)^2 (3.9 + x)^2 + (3.9 + x)^2$$

Al desarrollar:

$$(AB)^2 = \frac{x^4 + 7.8x^3 + 67.05x^2 + 404.35x + 788.49}{x^2}$$

$$(AB)^2 = \frac{1}{x^2} (x^4 + 7.8x^3 + 67.05x^2 + 404.35x + 788.49) \quad (2)$$

Con ayuda del Cálculo Diferencial se deriva (2) con respecto de  $x$ :

$$2(AB) \frac{d(AB)}{dx} = \frac{1}{x^4} [x^2(4x^3 + 23.4x^2 + 134.1x + 404.35) - (x^4 + 7.8x^3 + 67.05x^2 + 404.35x + 788.49)(2x)]$$

$$2(AB) \frac{d(AB)}{dx} = \frac{2x^5 + 7.8x^4 - 404.35x^2 - 1576.98x}{x^4}$$

Se despeja el valor de  $\frac{d(AB)}{dx}$ , la ecuación obtenida se iguala a cero para encontrar los valores críticos de la derivada y así minimizar las dimensiones del contrafuerte a AB.

$$\frac{d(AB)}{dx} = \frac{x(2x^4 + 7.8x^3 - 404.35x - 1576.98)}{2(AB)x^4}$$

$$\frac{(x^4 + 3.9x^3 - 202.175x - 788.49)}{(AB)x^3} = 0$$

$$(x^4 + 3.9x^3 - 202.175x - 788.49) = ((AB)x^3)0$$

$$(x^4 + 3.9x^3 - 202.175x - 788.49) = 0 \quad (3)$$

Para encontrar las raíces de esta ecuación se hace uso del análisis numérico mediante el método de Newton, con ayuda de una plantilla realizada en Geogebra. En la *Ilustración 2* se muestra la gráfica de la ecuación (3) y sus intersecciones con el eje  $x$ , mientras que en la *Ilustración 3* podemos apreciar la tabla de iteraciones comenzando desde el punto  $(5, f(5))$ , pues gráficamente se puede observar que la raíz positiva que buscamos se encuentra alrededor de ese punto con una tolerancia de  $10^{-5}$ .

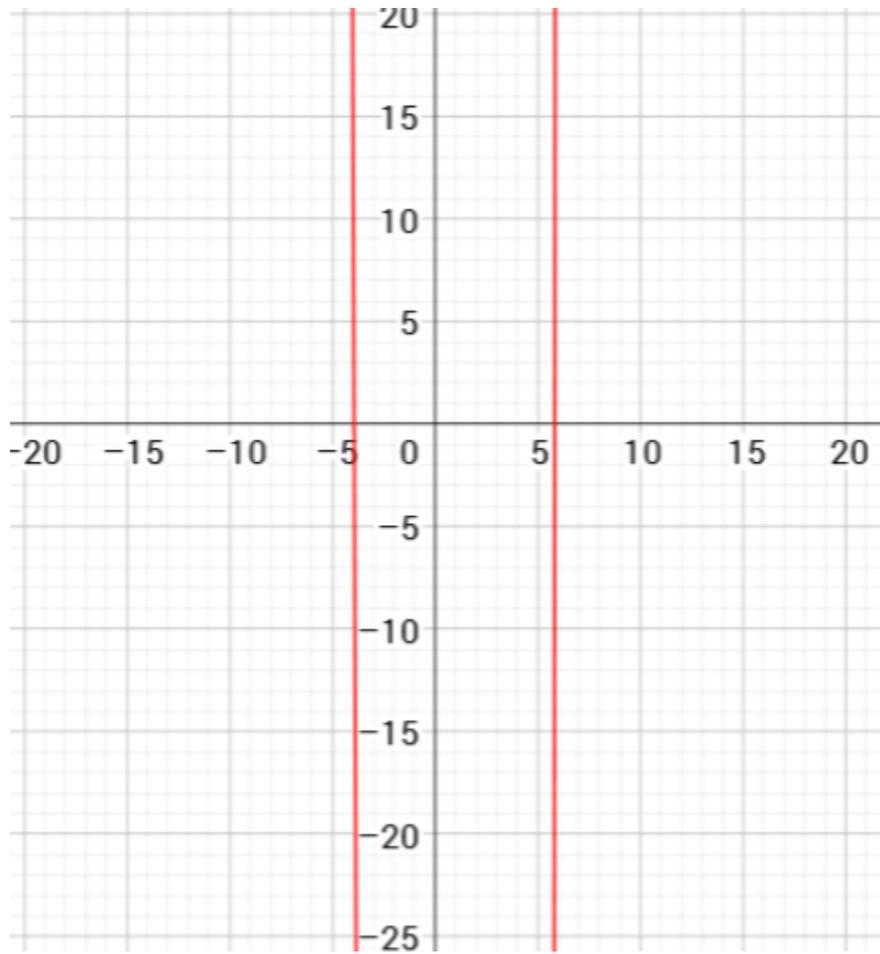


Ilustración 2: Gráfica de la ecuación (3)

|   | A            | B              | C               | D          |
|---|--------------|----------------|-----------------|------------|
| 1 | $q_n$        | $f(q_n)$       | $f'(q_n)$       | Tolerancia |
| 2 | 5            | -686.865       | 590.325         |            |
| 3 | 6.1635370347 | 321.7516746239 | 1178.8895965031 | 1          |
| 4 | 5.8906092935 | 21.7755147888  | 1021.4061051479 | 1          |
| 5 | 5.8692901388 | 0.1256849951   | 1009.6277628921 | 1          |
| 6 | 5.8691656524 | 0.0000042672   | 1009.559206455  | 1          |
| 7 | 5.8691656481 | 0              | 1009.5592041273 | 0          |

Ilustración 3: Tabla de iteraciones usando el método de Newton

Tomando como apoyo el software Scientific WorkPlace corroboramos que la única raíz positiva que tiene el polinomio (3) es la obtenida mediante las iteraciones de Newton.

Tenemos entonces que:

$$x = 5.8691m$$

$$y = \frac{7.2(3.9 + 5.8691)}{5.8691} = 11.984m$$

$$AB = \sqrt{(11.984)^2 + (3.9 + 5.8691)^2} = 15.461m$$

La longitud del contrafuerte  $AB = 15.461m$

### Conclusiones

Los métodos empleados en la presente investigación ayudaron a optimizar las medidas de las dimensiones del nuevo contrafuerte de la Catedral para así preservar su estructura, siendo la mejor aproximación de 15.461 metros, el cálculo diferencial proporciona herramientas para minimizar la medida del contrafuerte y así optimizar su construcción, el método de Newton fue de gran ayuda para aproximar el valor del emplazamiento, y el uso de los softwares mencionados facilitan las operaciones y la visualización de la estructura del contrafuerte.

### Bibliografía

- Acevedo, P. H. (2011). *El Teorema de Pitágoras*. Bogotá D.C.: Editorial de la UNC.
- Cortés Rosas, J. J., Gonzáles Cárdenas, M. E., & Pinilla Morán, V. (2006). *Introducción al Análisis numérico y tratamiento de errores*. México, D.F.: Editorial UNAM.
- Desconocido. (12 de 11 de 2017). *EcuRed*. Obtenido de [https://www.ecured.cu/Matemática\\_aplicada](https://www.ecured.cu/Matemática_aplicada)
- Garcinava, M. F. (2015). *Arquitectura y Patrimonio Religioso en Durango*. México: Quintanilla.
- Gómez, N. G. (2007). *Funcionamiento y seguridad estructural de los templos conventuales del siglo XVI en México*. México, D.F.: Editorial UNAM.
- Martínez, M. A. (12 de 11 de 2017). *Mediateca*. Obtenido de [http://mediateca.inah.gob.mx/islandora\\_74/islandora/object/guia:143](http://mediateca.inah.gob.mx/islandora_74/islandora/object/guia:143)
- Martínez, Y. I. (12 de 11 de 2017). *Geogebra*. Obtenido de <https://www.geogebra.org/m/ng6mYZWM>

[Programa general](#)

### Ponencia de Investigación 3

#### ANÁLISIS DE MULTICOLINEALIDAD PARA EL MODELO LINEAL GENERAL DE LOS INGRESOS TOTALES DE FEMSA



Luis Angel Reyes Rojas. Asesor: Dra. Alejandra Soria Pérez. Contacto:

angelreyes19931@outlook.com

Facultad de Ciencias Exactas

angelreyes19931@outlook.com

Licenciatura

Regresión, multicolinealidad, consecuencias, detección, corrección

El modelo lineal general es un análisis que investiga la relación entre una variable de respuesta (dependiente) y uno o más predictores (variables independientes o explicativas), con el objetivo de poder explicar la variable de respuesta por las predictoras. El problema surge cuando la base de datos presenta problemas que afectan la determinación del modelo o que dichas variables explicativas tienen relaciones que afectan el proceso para cumplir el objetivo del MLG. En esta investigación analizaremos una de estas complicaciones: la multicolinealidad, usando como base de datos los registros financieros de la empresa FEMSA.

## INTRODUCCIÓN

El modelo lineal general es un análisis que investiga la relación entre una variable de respuesta ( $Y$ ) y una o más variables predictoras ( $X_i$ ), este lo denotaremos de la siguiente manera:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_2 + \dots + U_i$$

Dicho modelo puede sufrir de ciertas enfermedades o problemas que dificulten encontrar la relación de la variable  $Y$  con las demás variables  $X$ . En esta investigación se analizará una de ellas la cual será “la multicolinealidad”. Este problema se presenta cuando dichas variables predictoras están altamente correlacionadas causando dificultad o incluso haciendo que la obtención de los parámetros ( $\beta_i$ ) del modelo sea imposible.

Para aplicar este modelo en la realidad, en la variable de respuesta  $Y$  se encuentran los ingresos totales que obtuvo el embotellador público más grande de productos Coca-Cola en el mundo “FEMSA” y como variables predictoras los costos de ventas y gastos de operaciones que dicha empresa dio a conocer desde el primer trimestre de 1997 hasta el segundo trimestre del 2017, y así poder analizar si la “multicolinealidad” está presente en los datos financieros de FEMSA y saber si es posible solucionar este problema.

## MARCO TEÓRICO

FEMSA es una empresa líder que participa en la industria de bebidas operando Coca-Cola FEMSA, el embotellador público más grande de productos Coca-Cola en el mundo; y en el sector cervecero como el segundo accionista más importante de Heineken, una de las cerveceras líderes en el mundo con presencia en más de 70 países. En comercio al detalle participa a través de FEMSA Comercio, que comprende una División Comercial que opera diferentes cadenas de formato pequeño, destacando OXXO, y una División Combustibles operando la cadena de estaciones de servicio OXXO GAS. Adicionalmente, a través de FEMSA Negocios Estratégicos, ofrece servicios de logística, soluciones de refrigeración en el punto de venta y soluciones en plásticos a las empresas FEMSA y a clientes externos.

La estructura corporativa de la empresa FEMSA es de la siguiente manera:





En esta investigación se trabajó únicamente con una de las ramas de FEMSA la cual es Coca-Cola FEMSA, esta trabaja estrechamente con The Coca-Cola Company para diseñar y administrar un atractivo portafolio de marcas y presentaciones para atender las dinámicas particulares de los mercados y estimular la demanda en una creciente base de clientes y consumidores. De esta manera, los clientes tienen la oportunidad de adquirir alguna de las más de 150 marcas de refrescos y bebidas no carbonatadas que FEMSA ofrece.

A continuación, se presentan las diferentes divisiones de Coca-Cola FEMSA.

- División México y Centroamérica (México, Guatemala, Nicaragua, Costa Rica y Panamá).
- División Sudamérica (Colombia, Venezuela, Brasil y Argentina).
- División Asia (Filipinas). (FEMSA, 2017)

Este trabajo se enfoca en la base de datos consolidados de Coca-Cola FEMSA, es decir trabajaremos con los datos unificados de las tres divisiones para analizar si presentan o no multicolinealidad: problema que puede presentarse en el modelo lineal general a causa de la correlación entre sus regresoras.

Pero ¿Qué es multicolinealidad? A continuación, se describe que es y las causas y consecuencias que este problema trae consigo si como algunas reglas y métodos para detectarla y de ser posible corregirla.

### Multicolinealidad

Se produce por la violación del cuarto supuesto básico del modelo lineal general que establece:  $\text{rango}(X)=r(X)=r(X'X)=k+1$ . Como precondition para poder estimar los parámetros de nuestro modelo lineal general.

Esta suposición implica que las variables  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sean linealmente independientes, es decir:  $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0; i = 1, 2, \dots, k$  y cuando no se cumple esta última condición decimos que existe un problema de multicolinealidad en el modelo.

Multicolinealidad perfecta:

Ocurre cuando existe una relación lineal exacta entre las variables regresoras:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k = 0 \text{ suponemos que } \lambda_2 \neq 0 \text{ y tenemos que}$$

$X_{2i} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} X_{1i} - \dots - \lambda_k X_{ki}$  por lo que concluimos que  $X_2$  se deriva de una combinación lineal de otras variables  $X$  o se dice que  $X_2$  esta exactamente relacionada de manera lineal con otras variables.

Si la multicolinealidad es perfecta, los coeficientes de regresión de las variables  $X$  son indeterminados, y sus errores estándar, infinitos.

Multicolinealidad menos que perfecta:

Es cuando existe una relación lineal pero no en forma perfecta entre las regresoras:

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k + v_i = 0$  suponemos que  $\lambda_2 \neq 0$  y tenemos que

$X_{2i} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} X_{1i} - \dots - \lambda_k \lambda_2 X_{ki} - \frac{1}{\lambda_2} v_i$  por lo que podemos decir que  $X_2$  no es una combinación lineal exacta de otras variables  $X$  por qué está determinada también por el término de error estocástico  $v_i$ .

Si la multicolinealidad es menos que perfecta, los coeficientes de regresión, aunque sean determinados, poseen grandes errores estándar (en relación con los coeficientes mismos), lo cual significa que los coeficientes no pueden ser estimados con gran precisión o exactitud.

La multicolinealidad puede deberse a los siguientes factores:

1. El método de recolección de información.
2. Restricciones en el modelo o en la población objeto de muestreo.
3. Especificación del modelo.
4. Un modelo sobre determinado.
5. Tendencia común. (Pineda, 1998)

### **Consecuencias de la multicolinealidad**

En los casos de casi o alta multicolinealidad es probable que se presenten las siguientes consecuencias:

1. Aunque los estimadores de MCO son MELI, presentan varianzas y covarianzas grandes que dificultan la estimación precisa.
2. Debido a la consecuencia 1, los intervalos de confianza tienden a ser mucho más amplios, lo cual propicia una aceptación más fácil de la “hipótesis nula cero” (es decir, que el verdadero coeficiente poblacional es cero).
3. También debido a la consecuencia 1, la razón t de uno o más coeficientes tiende a ser estadísticamente no significativa.
4. Aunque la razón t de uno o más coeficientes sea estadísticamente no significativa, R, la medida global de bondad de ajuste, puede ser muy alta.
5. Los estimadores de MCO y sus errores estándar son sensibles a pequeños cambios en los datos.

### **Detección de la multicolinealidad**

Como la multicolinealidad es en esencia un fenómeno de tipo muestral que surge de información sobre todo no experimental recopilada en la mayoría de las ciencias sociales, no hay un método único para detectarla o medir su fuerza. Lo que se tiene en realidad son ciertas reglas prácticas, algunas informales y otras formales, pero todas reglas prácticas. Consideremos algunas de ellas.

1. Análisis lógico de los regresores: la propia definición de las variables incluidas en el modelo puede indicar las relaciones existentes entre ellas.
2. Diagrama de dispersión: se usa para ver como se relacionan las diversas variables de un modelo de regresión.

3. Valor del determinante de la matriz de correlaciones entre los regresores: si el determinante de la matriz de correlaciones entre las variables explicativas es próximo a cero significa que una o más variables están altamente correlacionadas (es decir una o más variables se pueden escribir como combinación lineal de las demás) y si el determinante es igual 1 es decir que la matriz de correlación de las variables explicativas es la identidad significa que las variables NO están intercorrelacionadas.
4. Regla de Klein: si el coeficiente de correlación de las variables  $x_i$  y  $x_j$   
 $r_{ij} \geq 0.80$  existe multicolinealidad en el modelo entre las variables  $x_i$  y  $x_j$ .
5. Medida de Klein: si  $R_{y,x_1,x_2}^2 < R^2_i$  puede considerarse que la variable  $X_i$  contiene  $R^2_i$  puede considerarse que la variable  $X_i$  contiene información ya incluida en el resto de regresoras por lo que dicha variable causa multicolinealidad.
6. Regresiones auxiliares: conociendo el coeficiente de determinación de una regresión auxiliar  $R_i^2$  y conforme la relación entre F y  $R^2$   $F_i = \frac{\frac{R_{x_1,x_2,x_3,\dots,x_k}^2}{k-2}}{\frac{(1-R_{x_1,x_2,x_3,\dots,x_k}^2)}{(n-k+1)}}$

$n$  = tamaño de la muestra

$k$  = número de variables explicativas incluyendo el intercepto

$R_i^2$  = coeficiente de determinación de la variable  $X_i$  sobre las variables  $X$  restantes

Si  $F$  calculada excede a la  $F_i$  crítica se dice que la  $X_i$  particular es colineal con las demás  $X$  y si no excede a la  $F_i$  crítica se dice que esta no es colineal con las demás  $X$  en cuyo caso se puede mantener la variable en el modelo.

7. Valores propios e índice de condición: si el número de condición  
 $k = \frac{\text{valor propio máximo}}{\text{valor propio mínimo}}$  esta entre 100 y 1000 hay multicolinealidad que va de moderada a fuerte, pero si  $k$  excede de 1000 existe multicolinealidad grave.  
 Si el índice de condición  $IC = \sqrt{k}$  esta entre 10 y 30 hay multicolinealidad entre moderada y fuerte y si  $IC$  excede de 30 hay multicolinealidad grave.
8. Tolerancia y factor de inflación de la varianza: si  $FIV > 10$  existe multicolinealidad peligrosa en el modelo.  
 si  $TOL$  se acerca a cero mayor será el grado de colinealidad de la variable tratada  $j$   
 si  $TOL$  se acerca a uno mayor será la evidencia de que la variable  $j$  no es colineal con las demás regresoras

9. Regla de Farrar y Glauber: si se satisface que  $\frac{r_i}{r_y} \geq 1$  entonces la multicolinealidad existente en el modelo es peligrosa.
10. Método de Farrar y Glauber: Si para cada  $X_i$  sospechosa de multicolinealidad construimos el estadístico o estadígrafo definido como:

$W_{\text{calculada}} = \frac{(r_{ij}-1)}{\left[\frac{n-k}{n-1}\right]}$  donde  $r_{ij}$  es el determinante que resulta de eliminar la  $i$ -ésima hilera y la  $i$ -ésima columna de la matriz de correlación de las regresoras.

la prueba consiste en que si se satisface que:

$$W_{\text{calculada}} \geq W_{\text{tabulada}} \equiv F(n - k, k - 1).$$

11. Contraste de multicolinealidad de Farrar-Glauber: esta prueba de trata de contrastar

$H_0$ : los regresores  $X$  no están correlacionados  $|R_{xx}| = 1$

$H_1$ : los regresores  $X$  si están correlacionados  $|R_{xx}| \approx 0$

Con el estadístico  $G = - \left[ (n - 1) - \frac{(2k+5)}{6} \right] * \ln[\det(X^tX)]$  y el valor chi cuadrada  $x_{\alpha,g}^2$   $g = \frac{(k+1)*k}{2}$ ,  $n$  = numero de muestras,  $k$  = numero de variables regresoras si  $G > x_{\alpha,g}^2$  se rechaza  $H_0$ .

**12. Medida de Theil:** se puede calcular con la siguiente expresión

$$m = R^2 - \sum_{h=1}^k (R^2 - R_h^2)$$

Este estadístico mide el efecto de contribución del regresor  $h$  en el coeficiente de determinación del modelo  $R^2$ , este estadístico se denomina contribución marginal o incremental

$R^2$  = coeficiente de derminacion del modelo

$R_h^2$  = coeficiente de derminacion excluido el regresor .

**13. Modelo globalmente bien estimado:** si el coeficiente de determinación  $R^2$  es elevado y hay regresores individualmente NO significativos.

**14. Examen de correlaciones parciales:** si el coeficiente de determinación  $R_{y,x_1x_2}^2$  es muy elevado, pero  $r_{yx_1,x_2}^2$  y  $r_{yx_2,x_1}^2$  son comparativamente bajas esto puede sugerir que las variables  $x_1$  y  $x_2$  están muy intercorrelacionadas y que por lo menos una de esas variables es NO significativa.

### Medidas correctivas de la multicolinealidad

¿Qué puede hacerse si la multicolinealidad es grave? Hay dos posibilidades:

**1) No hacer nada.**

Blanchard expresa que recurrir a técnicas con el fin de eliminar el problema que es la multicolinealidad está mal. La multicolinealidad es la voluntad de Dios, no un problema con los MCO ni con la técnica estadística en general.

En otras palabras, Blanchard afirma que la multicolinealidad es en esencia un problema de deficiencia de datos (micronumerosidad), y en algunas ocasiones no hay opción respecto de los datos disponibles para el análisis empírico.

**2) Seguir algunas reglas prácticas.**

La técnica específica o procedimiento que aplicar en cada caso para corregir o eliminar la multicolinealidad en nuestro modelo dependerá de una multitud de factores y de la naturaleza del problema en cuestión. El éxito depende de la gravedad de la multicolinealidad.

Algunas de las reglas prácticas que se pueden utilizar son las siguientes:

- 1. Información a priori:** este método consiste en obtener información a priori, la cual puede provenir de un trabajo empírico anterior en donde el problema de la multicolinealidad resulto ser menos grave o de la teoría relevante que soporta el campo de estudio.
- 2. Combinación de información de corte transversal y de series de tiempo:** Una variante de la técnica de información externa o a priori es la combinación de datos de corte transversal y de series de tiempo, conocida como mezcla de datos. por ejemplo,

información generada a través de paneles de consumidores o estudios sindicados realizados por varias agencias privadas y estatales, Aunque es una técnica atractiva, la mezcla de datos de series de tiempo y de corte transversal de esta forma puede crear problemas de interpretación.

3. Utilización de información adicional: esta información adicional o externa puede ser en general de dos tipos:
  - Información extra muestral
  - Restricciones en el modelo
4. Aumentar el número de observaciones: si se dispone de suficiente información este procedimiento representa una buena alternativa particularmente si podemos hacer que los grados de libertad  $(n - k) \geq 30$  con lo cual estaremos reduciendo las varianzas de nuestros estimadores y consecuentemente aumentando la precisión de los mismos.
5. Suprimir variables: se pueden eliminar regresores cuando su información sea redundante y se vea claramente que su efecto está recogido dentro de otra u otras variables
6. Utilización de primeras diferencias: se desplaza un periodo las variables y se calcula la diferencia entre dos observaciones sucesivas. El inconveniente de esta corrección es que puede surgir autocorrelación en la perturbación del modelo.
7. Transformación de razón: Una solución a este problema consiste en expresar el modelo mediante una base per cápita es decir dividir todo el modelo entre alguna de las variables explicativas. Dicha transformación tal vez reduzca la colinealidad en las variables originales.
8. Restricciones sobre los parámetros: consiste en incorporar algunas restricciones sobre los parámetros en el modelo, de tal forma que los estimadores la satisfagan exactamente.
9. Empleo de coeficientes o ratios entre las variables: consiste en dividir todas las variables del modelo por un factor de escala común a todas ellas. El problema que surge con este método es que las perturbaciones transformadas pueden ser heterocedásticas.
10. Reducción de la colinealidad en las regresiones polinomiales: Una característica especial de estos modelos es que la(s) variable(s) explicativa(s) aparece(n) elevada(s) a diversas potencias. Por lo que los diversos términos de la producción van a estar correlacionados, lo que dificultan la estimación precisa de los diversos coeficientes de pendiente, No obstante, en la práctica se ha visto que si la(s) variable(s) explicativa(s) está(n) expresada(s) en forma de desviación (es decir, desviaciones del valor medio), la multicolinealidad se reduce sustancialmente. Pero, aun entonces, el problema puede persistir.
11. Análisis factorial común: El análisis de factor común (AFC) el estudio de las interrelaciones entre las variables se restringe, en cambio, a la varianza común (o covarianza), es decir, a la búsqueda de un número reducido de “factores” que expresen lo que es “común” al conjunto de variables observadas. AFC está orientado al análisis de la 2 covarianza (varianza en común o comunalidad), no de la varianza total. En esta última modalidad analítica, la varianza se descompone en varianza común (o comunalidad) y varianza específica. La comunalidad de cada variable ( $h^2$ ) expresa la porción de la varianza total de la variable “x” que es compartida con las p-1 variables observadas restantes. La varianza específica es, por el contrario, la porción de la varianza total de la variable que no es explicada por los “factores comunes” (que está

compuesta por la varianza específica y el error). En palabras simples, en el AFC los factores explican las variables.

12. **Análisis de componentes principales:** El análisis de componentes principales (ACP) se caracteriza por analizar la varianza total del conjunto de variables observadas. De ellas trata de determinar las dimensiones básicas (o “componentes”) que las definen. el análisis de factor común (AFC) el estudio de las interrelaciones entre las variables se restringe, en cambio, a la varianza común (o covarianza), es decir, a la búsqueda de un número reducido de “factores” que expresen lo que es “común” al conjunto de variables observadas. En palabras simples, en el ACP las variables explican los factores. (Gujarati D. N., Econometría, 2010)

### **Conclusión:**

Acercas del problema que puede llegar a ser la multicolinealidad si el único propósito del análisis de regresión es el pronóstico o la predicción, la multicolinealidad no es un problema grave, pues, entre más alta sea la  $R^2$ , mejor será la predicción siempre que los valores de las variables explicativas, para los cuales se desean las predicciones, obedezcan las mismas dependencias lineales casi exactas de la matriz X [de datos] del diseño original. Pero si el propósito no es sólo la predicción sino también la estimación confiable de los parámetros, la presencia de una alta multicolinealidad puede ser un problema porque, como vimos, genera grandes errores estándar en los estimadores.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

El objetivo principal de esta investigación es conocer y analizar los problemas que conlleva la multicolinealidad para esto analizamos este inconveniente en la base de datos de FEMSA para así poder entender los daños y perjuicios que esta ocasiona a nuestros datos y tratar de solucionarlo. Esto se hizo con el fin de poder relacionarnos con este problema que puede llegar a presentar el modelo lineal general y así para investigaciones posteriores saber identificar y solucionar si es que es posible para así tener soluciones o respuestas más confiables y eficientes, ya que es muy probable que todos los alumnos que cursen la carrera de LMA se topen con este tipo de problema.

Los inconvenientes que se presentaron a lo largo del proyecto fue la falta de información acerca de Coca-Cola FEMSA sin embargo con todo y estas limitaciones se logró trabar diferentes métodos para detectar y corregir la multicolinealidad que arrojó nuestra base de datos.

## **METODOLOGÍA**

Esta investigación es de tipo documental ya que los datos aquí trabajados se obtuvieron de la página oficial de FEMSA, es exploratorio pues no poseíamos conocimientos acerca de este tema ni de la empresa o los términos trabajados en ella.

La forma en que se trabajó el problema para obtener la información fue inductiva ya que partimos de lo particular a lo universal utilizando técnicas de recopilación como la consulta bibliográfica y revisión documental. Referente a las técnicas de Análisis de información se usaron paquetes estadísticos como xlstat, también las diferentes herramientas que incluye Excel, así como la calculadora virtual hp prime.

## **RESULTADOS**



Los resultados obtenidos después del análisis para la detección de la multicolinealidad son los siguientes:

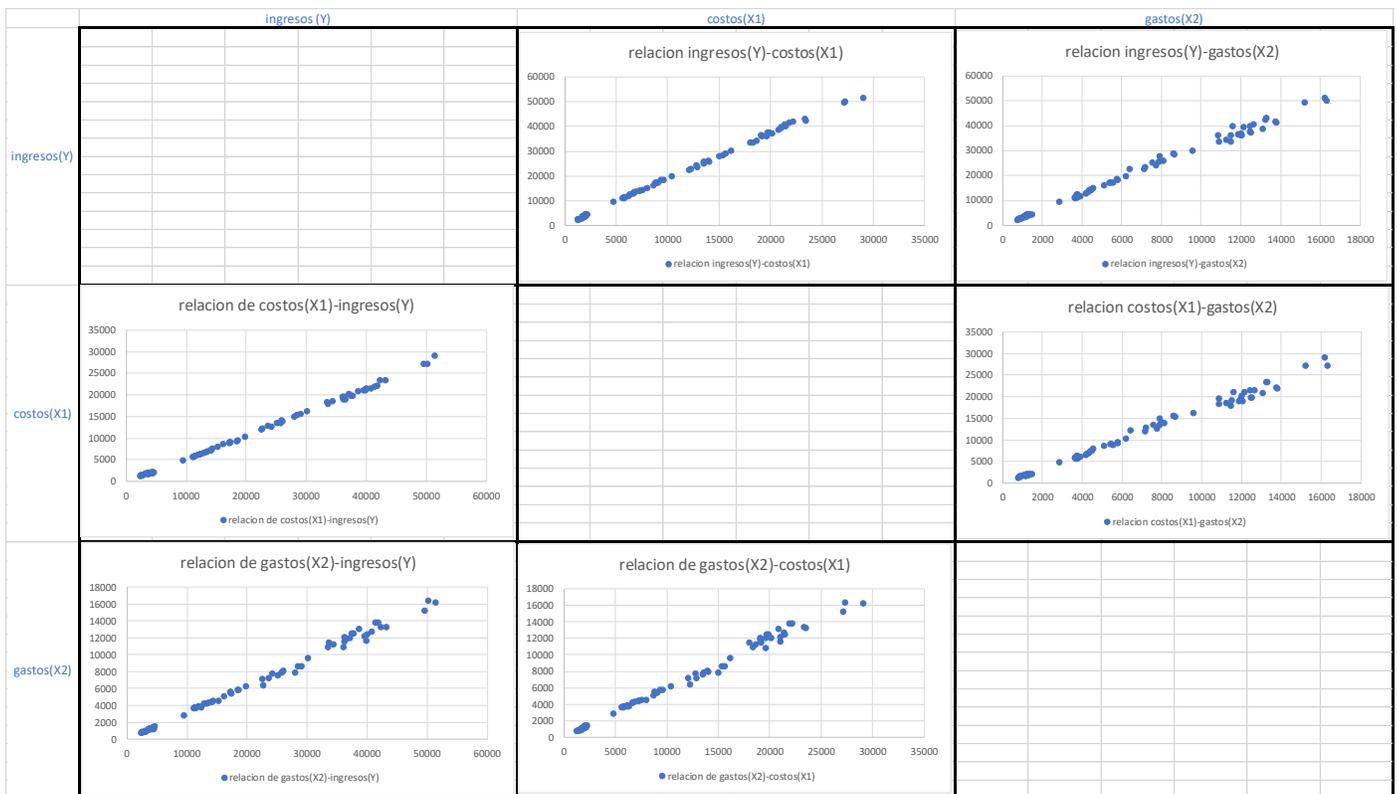
**1. Análisis lógico de los regresores:**

**Gastos de operación:** Hace referencia al dinero desembolsado por una empresa u organización en el desarrollo de sus actividades. Los gastos operativos son los salarios, el alquiler de locales, la compra de suministros y otros.

**Costo de ventas:** El costo de ventas es el gasto o el costo de producir de todos los artículos vendidos durante un período contable. Cada unidad vendida tiene un costo de ventas o costo de los bienes vendidos.

**Conclusión:** Con este análisis podemos ver la relación entre los costos de ventas y los gastos de operación la cual es que, teniendo el costo de cada unidad vendida, entre más grande sea el costo total de ventas más grande serán los gastos de operación por lo que los dos regresores (costos y ventas) están relacionados entre ellos y por lo tanto podemos decir que hay multicolinealidad en nuestro modelo de regresión lineal múltiple.

**2. diagrama de dispersión:**



**Conclusión:** Como podemos ver todas las relaciones de las variables dependientes como independientes tienen un comportamiento similar es decir conforme una aumenta la otra también conforme el tiempo también aumenta esto sería un comportamiento de tendencia común que pasa sobre todo en los datos de series de tiempo como es el caso ya que las regresoras aumentan o disminuyen a lo largo del tiempo.

### 3. Valor del determinante de la matriz de correlaciones entre los regresores:

| Matriz de correlaciones (Pearson): |                  |                 |                         |
|------------------------------------|------------------|-----------------|-------------------------|
| VARIABLES                          | Ingresos totales | Costo de ventas | Gastos de operación(X2) |
| Ingresos totales                   | 1                | 0.999392        | 0.997532                |
| Costo de ver                       | 0.999392         | 1               | 0.996572                |
| Gastos de op                       | 0.997532         | 0.996572        | 1                       |

determinante de la matriz de correlaciones (pearson) = 0.006845103

**Conclusión:** Como el valor del determinante de la matriz de correlaciones es próximo a cero podemos asegurar que una o más variables de nuestro modelo están altamente correlacionadas.

### 4. Regla de Klein:

| Matriz de correlaciones (Pearson): |              |                         |
|------------------------------------|--------------|-------------------------|
| VARIABLES                          | Costo de ver | Gastos de operación(X2) |
| Costo de ver                       | 1            | 0.99657157              |
| Gastos de op                       | 0.99657157   | 1                       |

**Conclusión:** Como el coeficiente de correlación entre los costos y los gastos de operación es mayor a 0.80 podemos decir que existe un grave problema de multicolinealidad en nuestro modelo.

### 5. medida de Klein:

$$R_1^2 = 0.9931549 \quad R^2 = 0.99914$$

**Conclusión:** Como el coeficiente de determinación del modelo original que incluye las dos variables regresoras es mayor que el coeficiente de determinación  $R^2_{x_1}$  y  $R^2_{x_2}$  no podemos asegurar que la variable  $x_1$  y  $x_2$  contiene información ya incluida en el resto de las regresoras por lo que no podemos asegurar que dichas variables son causantes de multicolinealidad.

### 6. Regresiones auxiliares:

$$R_1^2 = 0.9931549 \quad F_1 = 11607.18667$$

$$R^2 = 0.99914 \quad F = 40804.69237$$

**Conclusión:** Como el valor F es más grande que F1 podemos decir que la variable  $X_1$  es colineal con la variable  $X_2$ .

### 7. Valores propios e índice de condición:

$$k = 668462388$$

$$IC = 25854.6396$$

| X*X      |            |            |  | valores propios |
|----------|------------|------------|--|-----------------|
| 82       | 514593.7   | 866076.7   |  | 29.0009484      |
| 514593.7 | 5023597578 | 8486267437 |  | 1.9386E+10      |
| 866076.7 | 8486267437 | 1.4372E+10 |  | 9358572.23      |

**Conclusión:** Como el número de condición k excede por mucho el valor de 1000 y el índice de condición IC excede de 30 podemos asegurar que existe multicolinealidad grave en nuestro modelo.

### 8. Tolerancia y factor de inflación de la varianza:

|                                    |              |                     |
|------------------------------------|--------------|---------------------|
| Estadísticos de multicolinealidad: |              |                     |
|                                    |              |                     |
|                                    | Gastos de op | Costo de ventas(X1) |
| Tolerancia                         | 0.0068451    | 0.0068451           |
| VIF                                | 146.089833   | 146.089833          |

**Conclusión:** Como el VIF de la variable X2(gastos de operaciones) es mayor a 10 por mucho entonces existe multicolinealidad de esa variable con las demás y como TOL de la variable X1 es muy cerca a cero concluimos que también la variable regresoras X1 es colineal con la variable regresora X2 por lo que nuestro modelo sufre de colinealidad muy alta.

9. Regla de Farrar y Glauber:

$$r_i = 0.99674272 \quad r_y = 0.9995714 \quad \frac{r_i}{r_y} = 0.9971701$$

**Conclusión:** Como  $\frac{r_i}{r_y}$  es muy cercano a uno podemos decir que nuestro modelo si va a sufrir de multicolinealidad alta.

10. METODO DE FARRAR Y GLAUBER:

**Conclusión:** Como en nuestra base de datos solo contamos con dos variables independientes no es posible realizar esta prueba.

11. Contraste de multicolinealidad de Farrar-Glauber:

|            |               |             |            |                       |                     |
|------------|---------------|-------------|------------|-----------------------|---------------------|
|            | 82            | 514593.7    | 866076.7   |                       | determinante de X*X |
| <b>X*X</b> | 514593.7      | 5023597578  | 8486267437 |                       | 5.2615E+18          |
|            | 866076.7      | 8486267437  | 1.4372E+10 |                       |                     |
|            |               |             |            |                       |                     |
|            | G=            | -3427.00261 |            | $G < x_{\alpha, g}^2$ | se rechaza $H_0$    |
|            | g=            | 3           |            |                       |                     |
|            | chi cuadrada= | 7.81        |            |                       |                     |

**Conclusión:** Como G es mayor que el valor de chi cuadrada se acepta la hipótesis nula y se concluye que las regresoras X si están correlacionadas es decir el determinante de la matriz de correlaciones entre las variables regresoras es próximo a cero.

12. Medida de Theil:

|  |  |            |                   |            |
|--|--|------------|-------------------|------------|
|  | Coeficientes de determinación (Pearson): |            |                   |            |
|  | Variables                                | X1         | X2                | Y          |
|  | X1                                       | 1          | 0.9931549         | 0.99878455 |
|  | X2                                       | 0.9931549  | 1                 | 0.99507034 |
|  | y  | 0.99878455 | 0.99507034        | 1          |
|  | $R^2 =$                                  | 0.99914299 |                   |            |
|  | costos de venta(X1) aporta               | 0.00407265 | valor proxim      | 0.9947119  |
|  | gastos de ope.(X2) aporta                | 0.00035844 | valor proximo a 0 |            |

**Conclusión:** Como el valor m no distinta mucho del coeficiente de determinación de la regresión completa por lo que se admite que existe colinealidad (si los regresores fuesen ortogonales la medida m seria cero).

13. Modelo globalmente bien estimado:

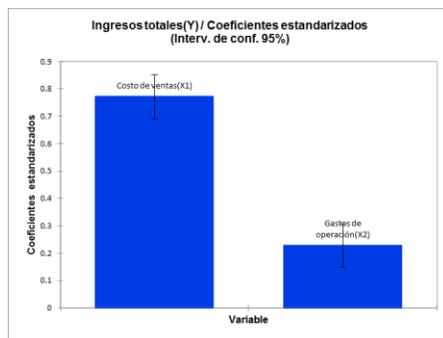


| Análisis de varianza (Ingresos totales(Y)):  |       |               |             |          |                |                |
|--|-------|---------------|-------------|----------|----------------|----------------|
| Fuente                                       | GL    | Suma de cua   | Cuadrados m | F        | Pr > F         |                |
| Modelo                                       | 2     | 1.758E+10     | 8790114627  | 46051.01 | < 0.0001       |                |
| Error  | 79    | 15079344.8    | 190877.782  |          |                |                |
| Total corregi                                | 81    | 1.7595E+10    |             |          |                |                |
| Calculado contra el modelo Y=Media(Y)        |       |               |             |          |                |                |
| Parámetros del modelo (Ingresos totales(Y)): |       |               |             |          |                |                |
| Fuente                                       | Valor | Error estánda | t           | Pr >  t  | te inferior (9 | te superior (9 |
| Gastos de op                                 | 0.229 | 0.040         | 5.748       | < 0.0001 | 0.150          | 0.308          |
| Costo de ver                                 | 0.771 | 0.040         | 19.376      | < 0.0001 | 0.692          | 0.851          |

$R^2 = 0.999142990606282$        $F = 46051.00996$

$F_{critico} = F(1 - \alpha, K, n - (k - 1)) = 3.109310547$        $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$

$H_1$ : al menos una de las  $\beta_k \neq 0$        $F > F_{critico}$  por lo que se rechaza  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$



**Conclusión:** Se puede afirmar que las evidencias muestrales sugieren que si hay un efecto significativo lineal entre los ingresos totales y las variables (costos de venta y gastos de operación). Para ser más exactos la variable gastos de operación(X2) influye mucho menos en la variable dependiente Y (ingresos totales) pues tiene un valor de 0.229 y la variable X1(costos de ventas) tiene un valor de 0.771

Como las dos variables tienen un p-valor menor a 0.05 esto indica que se puede rechazar la hipótesis nula  $H_0: X_1, X_2 = 0$  por lo que las dos variables (costos de venta y gastos de operación) son significativas individualmente hacia la variable dependiente (ingresos totales).

**14. Examen de correlaciones parciales:**

| Coeficientes de determinación (Pearson): |            |            |                             |
|--|------------|------------|-----------------------------|
| Variables                                | X1         | X2         | Y                           |
| X1                                       | 1          | 0.9931549  | 0.99878455                  |
| X2                                       | 0.9931549  | 1          | 0.99507034                  |
| y  | 0.99878455 | 0.99507034 | 1                           |
| coeficiente de determinacion del modelo  |            |            | $R^2_{y,x_1,x_2} = 0.99914$ |

$R^2_{y,x_1,x_2} = 0.99914$

**Conclusión:** Como el coeficiente de determinación del modelo es muy alto y también lo es el de la variable dependiente Y (ingresos totales) con cada una de las variables regresoras  $x_1$  y  $x_2$  no podemos decir que alguna de nuestras variables sea NO significativa.

Los resultados obtenidos después de analizar las medidas correctivas de la multicolinealidad son los siguientes:



1. Información a priori.
2. Combinación de información de corte transversal y de series de tiempo.
3. Utilización de información adicional.

**Conclusión:** Como las primeras tres reglas para corregir la multicolinealidad dependen de información ya sea posterior o adicional, entonces al no contar con esta no es posible aplicarlas a nuestro modelo ya que carecemos de información necesaria para estos métodos de corrección.

4. Aumentar el número de observaciones:

**Conclusion:** Como no contamos con mas información adicional a la analizada en nuestra base de datos de la empresa FEMSA no podemos aumentar el número de muestra, sin embargo nuestra base de datos si cumple la condición  $(n - k) \geq 30$  y aun así nuestro modelo sufre de colinealidad.

5. Suprimir variables:

**Conclusión:** Como en nuestro modelo tanto los gastos de operación como los costos de venta son variables individualmente significativas es decir que las dos influyen en la explicación de nuestra variable dependiente (ingresos totales) no podemos eliminar alguna de ellas.

6. Utilización de primeras diferencias:

Interpretando los únicos resultados arrojados por la regresión lineal múltiple en el paquete xlstat de excel para detectar la multicolinealidad obtuvimos los siguientes resultados:

|                          |                 |                     |                     |            |
|--------------------------|-----------------|---------------------|---------------------|------------|
| Matriz de correlaciones: |                 |                     |                     |            |
|                          |                 |                     |                     |            |
|                          | Costo de ventas | Gastos de operación | Ingresos totales(Y) | DET        |
| Costo de ventas          | 1               | 0.77066             | 0.976               | 0.40607556 |
| Gastos de operación      | 0.77066         | 1                   | 0.790               |            |
| Ingresos totales         | 0.976           | 0.790               | 1                   |            |

**Conclusión:** Como podemos ver el determinante sufrió un cambio considerable ya que de 0.0068 aumento a 0.40 por lo que como se alejó del valor cero también disminuyó muchísimo la multicolinealidad del modelo.

|                                    |                 |       |
|------------------------------------|-----------------|-------|
| Estadísticos de multicolinealidad: |                 |       |
|                                    |                 |       |
|                                    | Costo de ventas |       |
| Tolerancia                         | 0.406           | 0.406 |
| VIF                                | 2.463           | 2.463 |

**Conclusión:** Como  $FIV < 10$  podemos decir que el nuevo modelo a comparación del anterior no sufre de multicolinealidad.

| Análisis de varianza (Ingresos totales(Y)):      |    |                   |                  |         |          |
|--|----|-------------------|------------------|---------|----------|
|  |    |                   |                  |         |          |
| Fuente   | GL | Suma de cuadrados | Medias cuadradas | F       | Pr > F   |
| Modelo   | 2  | 389701611.426     | 194850805.713    | 864.021 | < 0.0001 |
| Error  | 78 | 17590265.355      | 225516.222       |         |          |
| Total corregido                                  | 80 | 407291876.781     |                  |         |          |
| Calculado contra el modelo $Y = \text{Media}(Y)$ |    |                   |                  |         |          |

$R^2 = 0.95681$      $F = 864.021$      $F_{\text{critico}} = F(1 - \alpha, K, n - (k - 1)) = 3.110766166$



| Coeficientes estandarizados (Ingresos totales(Y)): |       |                |        |          |                              |       |
|--|-------|----------------|--------|----------|------------------------------|-------|
| Fuente   | Valor | Error estándar | t      | Pr >  t  | te inferior (9te superior (9 |       |
| Costo de ven                                       | 0.905 | 0.037          | 24.512 | < 0.0001 | 0.832                        | 0.979 |
| Gastos de op                                       | 0.092 | 0.037          | 2.504  | 0.014    | 0.019                        | 0.166 |

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$   $H_1: \text{al menos una de las } \beta_k \neq 0$   $F > F_{\text{critico}}$  por lo que se rechaza  $H_0$   
**Conclusión:** Se puede afirmar que las evidencias muestrales sugieren que si hay un efecto significativo lineal entre los ingresos totales y las variables (costos de venta y gastos de operación).

**Conclusión:** Como las dos variables tienen un p-valor menor a 0.05 esto indica que se puede rechazar la hipótesis nula por lo que las dos variables (costos de venta y gastos de operación) son significativas individualmente hacia la variable dependiente (ingresos totales). Para ser más exactos la variable gastos de operación (X2) influye mucho menos en la variable dependiente Y (ingresos totales) pues tiene un valor de 0.092 y la variable X1 (costos de ventas) tiene un valor de 0.905.

Por lo que en este método de corrección logramos disminuir la colinealidad a un grado que no es peligroso ni afecta a nuestros datos sin perder la significancia global, aunque como los gastos de operación (X2) tenía un valor de significancia menor con este método se volvió aún más pequeño pero esta variable no perdió su significancia hacia los ingresos totales (Y).

#### 7. Transformación de razón:

**Conclusión:** Al dividir nuestro modelo por la variable explicativa X2 (gastos de operación) se puede ver que la multicolinealidad desaparece pues al contar con solo dos variables explicativas y después de ver que una de ellas es eliminada es imposible que haya multicolinealidad ya que nuestro modelo terminó solamente con una variable explicativa X1 (costos de ventas) y como la multicolinealidad es la relación entre regresoras pues en este caso no existe tal relación.

#### 8. Restricciones sobre los parámetros:

**Conclusión:** Este método no puede ser empleado ya que se desconoce información acerca de las variables como para designar una restricción sobre ellas.

#### 9. Empleo de cocientes o ratios entre las variables: El cociente o ratio que se utilizó fue dividir las variables por 18.25 precio del dólar el viernes 3 de nov del 2017 en Santander para así en vez de trabajar con millones de pesos trabajar con millones de dólares.

Interpretando los únicos resultados arrojados por la regresión lineal múltiple en el paquete xlstat de excel para detectar la multicolinealidad obtuvimos los siguientes resultados:

| Matriz de correlaciones: |                 |                     |                      |              |
|--------------------------|-----------------|---------------------|----------------------|--------------|
|                          | Costo de ventas | Gastos de operación | Ingresos totales (Y) | DETERMINANTE |
| Costo de ven             | 1               | 0.997               | 0.999                | 0.0068451    |
| Gastos de op             | 0.997           | 1                   | 0.998                |              |
| Ingresos totales         | 0.999           | 0.998               | 1                    |              |

**Conclusión:** Como el valor del determinante de la matriz de correlaciones es próximo a cero podemos asegurar que una o más variables de nuestro modelo están altamente correlacionadas.

| Estadísticos de multicolinealidad:       |         |         |
|--|---------|---------|
| Costo de ventas(gastos de operación(X2)) |         |         |
| Tolerancia                               | 0.007   | 0.007   |
| VIF                                      | 146.090 | 146.090 |

**Conclusión:** Como el VIF de la variable X2(gastos de operaciones) es mayor a 10 por mucho entonces existe multicolinealidad de esa variable con las demás. Como TOL de las variables X1 y X2 está muy cerca a cero concluimos que también la variable regresora X1 y X2 son colineales entre ellas por lo que nuestro modelo sufre de colinealidad muy alta.

| Análisis de varianza (Ingresos totales(Y)): |    |                   |                |           |          |
|---|----|-------------------|----------------|-----------|----------|
| Fuente                                      | GL | suma de cuadrados | cuadrados medi | F         | Pr > F   |
| Modelo                                      | 2  | 52783574.415      | 26391787.208   | 46051.010 | < 0.0001 |
| Error                                       | 79 | 45274.820         | 573.099        |           |          |
| Total corregi                               | 81 | 52828849.235      |                |           |          |

$R^2 = 0.999142990606282$        $F = 46051.00996$

$F_{critico} = F(1 - \alpha, K, n - (k - 1)) = 3.109310547$

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$        $H_1: \text{al menos una de las } \beta_k \neq 0$

$F > F_{critico}$  por lo que se rechaza  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$

**Conclusión:** Se puede afirmar que las evidencias muestrales sugieren que si hay un efecto significativo lineal entre los ingresos totales y las variables (costos de venta y gastos de operación).

| Coeficientes estandarizados (Ingresos totales(Y)): |       |                |        |          |                |                |
|--|-------|----------------|--------|----------|----------------|----------------|
| Fuente   | Valor | Error estándar | t      | Pr >  t  | te inferior (9 | te superior (9 |
| Costo de ven                                       | 0.771 | 0.040          | 19.376 | < 0.0001 | 0.692          | 0.851          |
| Gastos de op                                       | 0.229 | 0.040          | 5.748  | < 0.0001 | 0.150          | 0.308          |

Como las dos variables tienen un p-valor menor a 0.05 esto indica que se puede rechazar la hipótesis nula por lo que las dos variables (costos de venta y gastos de operación) son significativas individualmente hacia la variable dependiente (ingresos totales). para ser más exactos la variable gastos de operación(X2) influye mucho menos en la variable dependiente Y (ingresos totales) pues tiene un valor de 0.229 y la variable X1(costos de ventas) tiene un valor de 0.771. Por lo que podemos asegurar que el método de cocientes o ratios no resolvió los problemas de multicolinealidad que presento nuestro modelo.

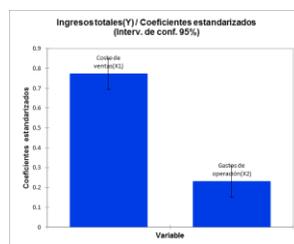
**10. Reducción de la colinealidad en las regresiones polinomiales:**

**Conclusión:** Este es un método de corrección que no es posible utilizar ya que el modelo que se utilizo fue lineal.

**11. Análisis de factor común.**

**12. Análisis de componentes principales.**

**Conclusión:** estos dos métodos no fue posible trabajarlos debido a la falta de variables que tiene la base de datos de los informes financiero de FEMSA.



## CONCLUSIONES

Con los métodos que utilizamos para saber si nuestro modelo sufría o no de multicolinealidad es decir si las variables dependientes (costos de ventas  $X_1$  y gastos de operación  $X_2$ ) estaban linealmente relacionadas pudimos ver que en efecto estas variables se relacionaban en mi punto de vista desde la definición, después se confirmó con los métodos trabajados anteriormente y gracias a estos logramos demostrar dicha relación, además de darnos cuenta que tanto los costos de ventas y los gastos de operación si tienen un efecto significativo hacia los ingresos totales de la empresa FEMSA. Aunque los ingresos y los costos cumplen con su papel de variables predictoras, el peso de los costos de ventas es mayor es decir tiene mucha más influencia sobre los ingresos como lo observamos en las gráficas anteriores.

Al tratar de solucionar el problema mediante los diferentes métodos y reglas propuestas anteriormente se pudo observar que algunos de ellos no fue posible llevarlos a cabo debido a la falta de información sobre FEMSA y sus datos financieros. Otras fue imposibles trabajarlas por los escasos de variables, a pesar de esto gracias a la regla de primeras diferentes se logró controlar la peligrosa relación que había entre los costos y los gastos, pero conservando su efecto predictorio hacia los ingresos. Aunque este método también disminuyo aún más el efecto individual que ejercían los gastos de operación a la variable predictora  $X_2$  hasta el grado de ser casi nulo.

## REFERENCIAS

- FEMSA. (20 de octubre de 2017). Obtenido de <http://www.femsa.com/es/>
- Fernandez, S. d. (15 de noviembre de 2017). <http://www.fuenterrebollo.com>. Obtenido de <http://www.fuenterrebollo.com/Economicas/ECONOMETRIA/MULTIVARIANTE/FACTORIAL/analisis-factorial.pdf>
- Gujarati, D. N. (2010). *Econometría*. México: McGRAW-HILL.
- <http://www.uru.edu>. (7 de noviembre de 2017). Obtenido de <http://www.uru.edu/fondoeditorial/libros/pdf/manualdestatistix/cap8.pdf>
- Pineda, O. L. (1998). *MÉTODOS Y MODELOS ECONOMETRICOS: UNA INTRODUCCION*. MEXICO: LIMUSA.
- Romero, L. Q. (2016). *ECONOMETRÍA APLICADA UTILIZANDO R*. Universitaria: DGAPA.
- XLSTAT. (20 de octubre de 2017). Obtenido de [https://help.xlstat.com/customer/es/portal/articles/2062221-an%C3%A1lisis-factorial-tutorial-en-excel?b\\_id=9283](https://help.xlstat.com/customer/es/portal/articles/2062221-an%C3%A1lisis-factorial-tutorial-en-excel?b_id=9283)

## ANEXOS



| Estado de resultados consolidado expresado en millones de pesos mexicanos de Coca-Cola FEMSA |                  |      |                       |                |                     |                     |                         |
|--|------------------|------|-----------------------|----------------|---------------------|---------------------|-------------------------|
| No de datos  | No de trimestres | año  | Utilidad de operación | Utilidad bruta | Y                   | X1                  | X2                      |
|  |                  |      |                       |                | Ingresos totales(Y) | Costo de ventas(X1) | Gastos de operación(X2) |
| 1  | trimestre 2      | 2017 | 6,491                 | 22,825         | 50,108              | 27,283              | 16,334                  |
| 2  | trimestre 1      | 2017 | 6,090                 | 22,297         | 51,357              | 29,060              | 16,207                  |
| 3  | trimestre 4      | 2016 | 7,167                 | 22,388         | 49,533              | 27,145              | 15,221                  |
| 4  | trimestre 3      | 2016 | 5,644                 | 18,877         | 42,351              | 23,474              | 13,233                  |
| 5  | trimestre 2      | 2016 | 6,004                 | 18,444         | 39,939              | 21,495              | 12,440                  |
| 6  | trimestre 1      | 2016 | 4,908                 | 16,915         | 37,097              | 20,182              | 12,007                  |
| 7  | trimestre 4      | 2015 | 6,649                 | 19,315         | 40,742              | 21,427              | 12,666                  |
| 8  | trimestre 3      | 2015 | 5,467                 | 17,934         | 37,661              | 19,727              | 12,467                  |
| 9  | trimestre 2      | 2015 | 5,630                 | 17,492         | 36,550              | 19,058              | 11,862                  |
| 10   | trimestre 1      | 2015 | 4,504                 | 15,758         | 34,374              | 18,616              | 11,254                  |
| 11   | trimestre 4      | 2014 | 6,374                 | 18,508         | 39,567              | 21,059              | 12,134                  |
| 12   | trimestre 3      | 2014 | 5,825                 | 19,585         | 41,781              | 22,196              | 13,760                  |
| 13   | trimestre 2      | 2014 | 5,742                 | 19,548         | 41,434              | 21,886              | 13,806                  |
| 14   | trimestre 1      | 2014 | 4,809                 | 17,897         | 38,708              | 20,811              | 13,088                  |
| 15   | trimestre 4      | 2013 | 6,609                 | 19,918         | 43,240              | 23,322              | 13,309                  |
| 16   | trimestre 3      | 2013 | 5,063                 | 17,575         | 37,494              | 19,919              | 12,512                  |
| 17   | trimestre 2      | 2013 | 5,142                 | 17,185         | 36,260              | 19,075              | 12,043                  |
| 18   | trimestre 1      | 2013 | 4,074                 | 15,548         | 33,561              | 18,013              | 11,474                  |
| 19   | trimestre 4      | 2012 | 7,224                 | 18,815         | 39,860              | 21,045              | 11,591                  |
| 20   | trimestre 3      | 2012 | 5,487                 | 16,986         | 36,193              | 19,207              | 11,499                  |
| 21   | trimestre 2      | 2012 | 4,714                 | 16,702         | 36,295              | 19,593              | 11,988                  |
| 22   | trimestre 1      | 2012 | 4,314                 | 15,204         | 33,542              | 18,338              | 10,890                  |
| 23   | trimestre 4      | 2011 | 5,578                 | 16,442         | 36,090              | 19,648              | 10,864                  |
| 24   | trimestre 3      | 2011 | 4,334                 | 13,915         | 30,077              | 16,162              | 9,581                   |
| 25   | trimestre 2      | 2011 | 4,373                 | 13,040         | 28,388              | 15,348              | 8,667                   |
| 26   | trimestre 1      | 2011 | 3,817                 | 11,783         | 25,854              | 14,071              | 7,966                   |
| 27   | trimestre 4      | 2010 | 5,080                 | 12,974         | 27,991              | 15,017              | 7,894                   |
| 28   | trimestre 3      | 2010 | 4,249                 | 12,129         | 25,675              | 13,546              | 7,880                   |
| 29   | trimestre 2      | 2010 | 4,088                 | 11,655         | 25,177              | 13,522              | 7,567                   |
| 30   | trimestre 1      | 2010 | 3,518                 | 10,715         | 23,595              | 12,880              | 7,197                   |
| 31   | trimestre 4      | 2009 | 4,827                 | 13,415         | 29,032              | 15,617              | 8,588                   |
| 32   | trimestre 3      | 2009 | 3,959                 | 12,064         | 26,007              | 13,943              | 8,105                   |
| 33   | trimestre 2      | 2009 | 3,677                 | 11,427         | 24,184              | 12,757              | 7,750                   |
| 34   | trimestre 1      | 2009 | 3,305                 | 10,443         | 22,526              | 12,083              | 7,138                   |
| 35   | trimestre 4      | 2008 | 4,053                 | 10,460         | 22,752              | 12,292              | 6,407                   |
| 36   | trimestre 3      | 2008 | 3,194                 | 9,396          | 19,770              | 10,374              | 6,202                   |
| 37   | trimestre 2      | 2008 | 3,169                 | 8,946          | 18,544              | 9,598               | 5,777                   |
| 38   | trimestre 1      | 2008 | 2,818                 | 8,271          | 17,257              | 8,986               | 5,453                   |
| 39   | trimestre 4      | 2007 | 3,224                 | 9,011          | 18,361              | 9,350               | 5,787                   |
| 40   | trimestre 3      | 2007 | 2,896                 | 8,475          | 17,264              | 8,789               | 5,579                   |
| 41   | trimestre 2      | 2007 | 2,909                 | 8,306          | 17,372              | 9,066               | 5,397                   |
| 42   | trimestre 1      | 2007 | 2,436                 | 7,550          | 16,225              | 8,675               | 5,114                   |
| 43   | trimestre 4      | 2006 | 2,619                 | 7,165          | 15,173              | 8,008               | 4,546                   |
| 44   | trimestre 3      | 2006 | 2,347                 | 6,835          | 14,369              | 7,534               | 4,488                   |
| 45   | trimestre 2      | 2006 | 2,379                 | 6,807          | 14,108              | 7,301               | 4,428                   |
| 46   | trimestre 1      | 2006 | 1,936                 | 6,123          | 12,765              | 6,642               | 4,187                   |
| 47   | trimestre 4      | 2005 | 2,612                 | 6,990          | 14,165              | 7,175               | 4,378                   |
| 48   | trimestre 3      | 2005 | 2,268                 | 6,516          | 13,228              | 6,712               | 4,248                   |
| 49   | trimestre 2      | 2005 | 2,375                 | 6,713          | 13,580              | 6,867               | 4,338                   |
| 50   | trimestre 1      | 2005 | 1,794                 | 5,696          | 11,828              | 6,132               | 3,902                   |
| 51   | trimestre 4      | 2004 | 2,263                 | 6,022          | 12,363              | 6,341               | 3,759                   |
| 52   | trimestre 3      | 2004 | 1,958                 | 5,588          | 11,411              | 5,823               | 3,630                   |
| 53   | trimestre 2      | 2004 | 1,749                 | 5,425          | 11,074              | 5,649               | 3,676                   |
| 54   | trimestre 1      | 2004 | 1,645                 | 5,304          | 11,069              | 5,765               | 3,659                   |
| 55   | trimestre 4      | 2003 | 2,300                 | 6,041          | 12,287              | 6,246               | 3,741                   |
| 56   | trimestre 3      | 2003 | 1,796                 | 5,557          | 11,358              | 5,801               | 3,761                   |
| 57   | trimestre 2      | 2003 | 1,837                 | 4,691          | 9,462               | 4,771               | 2,854                   |
| 58   | trimestre 1      | 2003 | 994.3                 | 2,154.00       | 4,149.60            | 1,996               | 1,160                   |
| 59   | trimestre 4      | 2002 | 1,172.30              | 2,380.30       | 4,507.30            | 2,127               | 1,208                   |
| 60   | trimestre 3      | 2002 | 1,104.70              | 2,360.40       | 4,342.20            | 1,982               | 1,256                   |
| 61   | trimestre 2      | 2002 | 1,181.40              | 2,464.30       | 4,474.40            | 2,010               | 1,283                   |
| 62   | trimestre 1      | 2002 | 887.8                 | 2,027.00       | 3,759.80            | 1,733               | 1,139                   |
| 63   | trimestre 4      | 2001 | 1,042.40              | 2,361.00       | 4,299.30            | 1,938               | 1,319                   |
| 64   | trimestre 3      | 2001 | 980.7                 | 2,236.10       | 4,123.60            | 1,888               | 1,255                   |
| 65   | trimestre 2      | 2001 | 989.9                 | 2,210.60       | 4,122.80            | 1,912               | 1,221                   |
| 66   | trimestre 1      | 2001 | 765.6                 | 1,907.90       | 3,636.50            | 1,729               | 1,142                   |
| 67   | trimestre 4      | 2000 | 916.7                 | 2,390.40       | 4,588.40            | 2,198               | 1,474                   |
| 68   | trimestre 3      | 2000 | 728.5                 | 2,128.30       | 4,229.70            | 2,101               | 1,400                   |
| 69   | trimestre 2      | 2000 | 740.9                 | 2,058.90       | 4,104.00            | 2,045               | 1,318                   |
| 70   | trimestre 1      | 2000 | 626.7                 | 1,930.80       | 3,913.60            | 1,983               | 1,304                   |
| 71   | trimestre 4      | 1999 | 720.4                 | 1,904.20       | 3,858.10            | 1,954               | 1,184                   |
| 72   | trimestre 3      | 1999 | 500.3                 | 1,707.80       | 3,613.80            | 1,906               | 1,208                   |
| 73   | trimestre 2      | 1999 | 516.9                 | 1,735.30       | 3,685.70            | 1,950               | 1,218                   |
| 74   | trimestre 1      | 1999 | 390.6                 | 1,492.6        | 3,331               | 1,838               | 1,102                   |
| 75   | trimestre 4      | 1998 | 512.9                 | 1,576.60       | 3,536.20            | 1,960               | 1,064                   |
| 76   | trimestre 3      | 1998 | 399.2                 | 1,387.00       | 3,061.30            | 1,674               | 988                     |
| 77   | trimestre 2      | 1998 | 364.1                 | 1,263.70       | 2,846.00            | 1,582               | 900                     |
| 78   | trimestre 1      | 1998 | 255                   | 1,072          | 2,482               | 1,410               | 817                     |
| 79   | trimestre 4      | 1997 | 515.8                 | 1,409.70       | 3,082.90            | 1,673               | 894                     |
| 80   | trimestre 3      | 1997 | 355.5                 | 1,220.50       | 2,706.60            | 1,486               | 865                     |
| 81   | trimestre 2      | 1997 | 300.7                 | 1,114.60       | 2,420.90            | 1,306               | 814                     |
| 82   | trimestre 1      | 1997 | 222                   | 992            | 2,265               | 1,273               | 770                     |

[Programa general](#)



## Ponencia de Investigación 4

### ANÁLISIS DE LA TENDENCIA DEL PRESUPUESTO DE LA NASA

Axel Tapia Ávalos. Dra. Alejandra Soria Pérez. axel.infimo@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas UJED

*axel.infimo@gmail.com*

Licenciatura.

NASA. Tendencia. Presupuesto. Serie de Tiempo.

En el presente trabajo se trata de analizar si es que el presupuesto anual que recibe la Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio (NASA por sus siglas en inglés) de E.U.A. sigue algún tipo de tendencia estacionaria, esto con el objetivo de conocer cómo ha cambiado al terminar la carrera espacial. El análisis de series de tiempo será la herramienta apropiada para abordar el problema.

#### • Introducción.

La Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio (NASA por sus siglas en inglés) es una agencia de E.U.A. que se dedica a la investigación y exploración aeroespacial y aeronáutica, así como al programa espacial civil. Creada en julio de 1958 como pieza fundamental en el desarrollo de la carrera espacial contra la U.R.S.S en el marco de la guerra fría, con el tiempo el gobierno federal le restó importancia al asignarle cada vez una menor cantidad de presupuesto, a pesar de lo cual, la NASA ha permanecido como una de las instituciones de investigación más productivas a nivel mundial. Se desea estudiar cómo ha cambiado dicho presupuesto entre los años 1975 (año en que la agencia ya no tenía tanto protagonismo) y 2014 para dejar un rango de 40 años.

El uso de series de tiempo nos indicará si existe una tendencia en los datos, y de que tipo.

#### • Marco teórico

Una serie de tiempo es un tipo de información cuantitativa, la cual se clasifica sobre la base del tiempo. Visualmente es una curva que evoluciona a lo largo del tiempo. Una serie de tiempo igualmente puede verse como un proceso estocástico, es decir, una colección de variables aleatorias en el tiempo  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Nuestro interés está enfocado en aquellos procesos estocásticos que sean estacionarios, es decir, que cumplan

1.  $E(Y_t) = \mu$  (su media es constante en el tiempo).
2.  $var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$  (su varianza es constante en el tiempo).
3.  $\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$  (el valor de la covarianza entre dos periodos depende solo de la distancia o rezago entre estos dos periodos y no del tiempo).

Un proceso estocástico es puramente aleatorio o de ruido blanco si tiene media igual a 0, varianza constante  $\sigma^2$  y no está serialmente correlacionado.

Suponga que  $u_t$  es un término de error de ruido blanco. Decimos que la serie  $Y_t$  es una caminata aleatoria sin deriva si  $Y_t = Y_{t-1} + u_t = Y_0 + \sum u_t$ , de donde se deduce que tiene  $E(Y_t) = Y_0$  y  $var(Y_t) = t\sigma^2$ .

De manera análoga una serie  $Y_t$  se denomina caminata aleatoria con deriva si  $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$ .

Estas series no son estacionales, sin embargo, al hacer los cambios  $Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = u_t$  y  $Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = \delta + u_t$  respectivamente, las series se vuelven estacionarias (series de primeras diferencias). (Gujarati & Porter, Econometría, 2010)

- Planteamiento del problema

El presupuesto que recibe la NASA ha tenido cambios drásticos en el tiempo, pues por lo general depende directamente de cómo está el clima político del momento. Por ejemplo, en los primeros 15 años de existencia recibió un ingreso bastante alto, de hasta el 4.41% del presupuesto federal. Esto debido a que en ese momento estaba en auge la guerra fría, un conflicto político/económico no bélico en el que las naciones del bloque Occidental (capitalistas liderados por E.U.A.) y las del bloque del Este (comunistas liderados por la U.R.S.S.). En este marco tuvo lugar una “carrera espacial” por ver quién sería el primero en ejercer un dominio sobre el espacio exterior, lo que tuvo como consecuencia la creación y financiación de nuestra agencia estudiada.

Sin embargo, a partir de 1975 aproximadamente, cuando la carrera espacial pasó a aseguno plano, el presupuesto comenzó a bajar poco a poco. Aunque hubo un pequeño repunte a principios de los años noventa cuando llegó a su fin la guerra fría, el presupuesto comenzó a descender nuevamente.

Al juzgar a simple vista los datos medidos en dólares constantes del 2014 pareciera observarse una tenue tendencia que haría a la serie estacionaria. Pero para estar seguros se procede a analizar los datos.

Se plantea analizar el presupuesto anual federal recibido por la NASA en términos de millones de dólares constantes del 2014, esto con el fin de determinar si es verdad que pudiera existir una tendencia estacionaria en los datos como se propone a priori. Esto se hace para tratar de inferir algunos posibles valores para los años próximos y darse una idea de como ha progresado científica y tecnológicamente la NASA a pesar de los cambios en sus ingresos.

Más que nada, este trabajo se hace con el fin de dar una posible aplicación al uso de las series de tiempo, tratando de con este ejemplo generar ideas en los demás alumnos de la carrera de las diversas opciones en las que pueden aplicar los conocimientos que han adquirido.

Una limitación importante a este trabajo es que el presupuesto está dado en dólares constantes de 2014. Pudiese ser más óptimo manejar los datos convertidos a dólares constantes de 2016, pero por comodidad y ahorro de tiempo se emplean los datos tal cual fueron obtenidos.

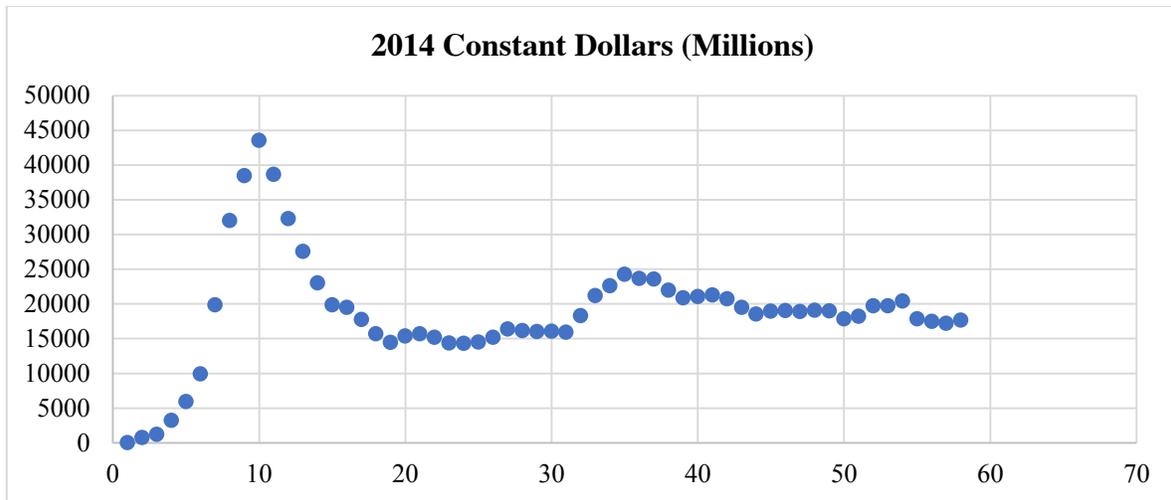
- Metodología

Se obtuvo la siguiente base de datos del artículo “Budget of NASA” de la Wikipedia en inglés:

| Number | Year | % of Fed Budget | 2014 Constant Dollars (Millions) | Number | Year | % of Fed Budget | 2014 Constant Dollars (Millions) |
|--------|------|-----------------|----------------------------------|--------|------|-----------------|----------------------------------|
| 1      | 1958 | 0.10%           | 732                              | 31     | 1988 | 0.85%           | 18,280                           |

|    |      |       |        |    |      |       |        |
|----|------|-------|--------|----|------|-------|--------|
| 2  | 1959 | 0.20% | 1,185  | 32 | 1989 | 0.96% | 21,168 |
| 3  | 1960 | 0.50% | 3,222  | 33 | 1990 | 0.99% | 22,618 |
| 4  | 1961 | 0.90% | 5,918  | 34 | 1991 | 1.05% | 24,235 |
| 5  | 1962 | 1.18% | 9,900  | 35 | 1992 | 1.01% | 23,668 |
| 6  | 1963 | 2.29% | 19,836 | 36 | 1993 | 1.01% | 23,546 |
| 7  | 1964 | 3.52% | 32,002 | 37 | 1994 | 0.94% | 21,979 |
| 8  | 1965 | 4.31% | 38,448 | 38 | 1995 | 0.88% | 20,879 |
| 9  | 1966 | 4.41% | 43,554 | 39 | 1996 | 0.89% | 21,042 |
| 10 | 1967 | 3.45% | 38,633 | 40 | 1997 | 0.90% | 21,280 |
| 11 | 1968 | 2.65% | 32,274 | 41 | 1998 | 0.86% | 20,712 |
| 12 | 1969 | 2.31% | 27,550 | 42 | 1999 | 0.80% | 19,467 |
| 13 | 1970 | 1.92% | 23,000 | 43 | 2000 | 0.75% | 18,547 |
| 14 | 1971 | 1.61% | 19,862 | 44 | 2001 | 0.76% | 18,940 |
| 15 | 1972 | 1.48% | 19,477 | 45 | 2002 | 0.72% | 19,045 |
| 16 | 1973 | 1.35% | 17,742 | 46 | 2003 | 0.68% | 18,885 |
| 17 | 1974 | 1.21% | 15,704 | 47 | 2004 | 0.66% | 19,078 |
| 18 | 1975 | 0.98% | 14,452 | 48 | 2005 | 0.63% | 19,001 |
| 19 | 1976 | 0.99% | 15,345 | 49 | 2006 | 0.57% | 17,844 |
| 20 | 1977 | 0.98% | 15,707 | 50 | 2007 | 0.58% | 18,194 |
| 21 | 1978 | 0.91% | 15,190 | 51 | 2008 | 0.60% | 19,700 |
| 22 | 1979 | 0.87% | 14,349 | 52 | 2009 | 0.57% | 19,714 |
| 23 | 1980 | 0.84% | 14,314 | 53 | 2010 | 0.52% | 20,423 |
| 24 | 1981 | 0.82% | 14,488 | 54 | 2011 | 0.51% | 17,833 |
| 25 | 1982 | 0.83% | 15,170 | 55 | 2012 | 0.50% | 17,471 |
| 26 | 1983 | 0.85% | 16,365 | 56 | 2013 | 0.49% | 17,219 |
| 27 | 1984 | 0.83% | 16,150 | 57 | 2014 | 0.50% | 17,647 |
| 28 | 1985 | 0.77% | 16,028 | 58 | 2015 | 0.49% |        |
| 29 | 1986 | 0.75% | 16,065 | 59 | 2016 | 0.50% |        |
| 30 | 1987 | 0.76% | 15,893 | 60 | 2017 | 0.47% |        |

Si graficamos los datos, en específico los dólares constantes, obtenemos lo siguiente

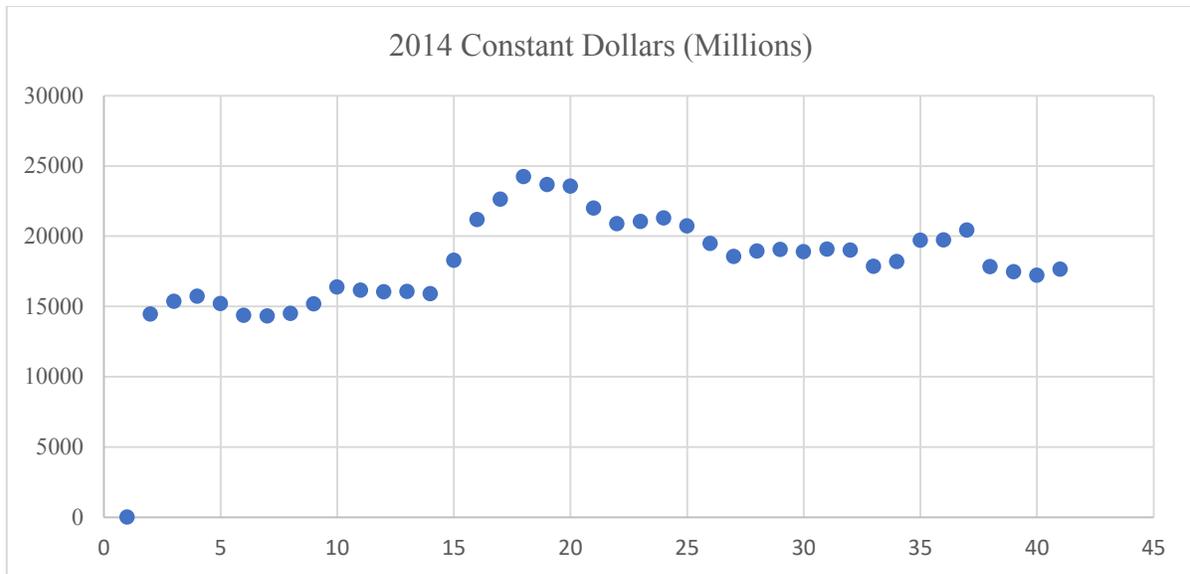


En los primeros años puede observarse el ascenso y declive del presupuesto con un máximo en el año 1967, para evitar este sesgo de los datos, se trabaja con 40 observaciones solamente, comenzando en 1975 y terminando en 2014. Esta última cota es debido a que los datos están en términos de dólares constantes del 2014.

| Number | Year | % of Fed Budget | 2014 Constant Dollars (Millions) |
|--------|------|-----------------|----------------------------------|
| 1      | 1975 | 0.98%           | 14,452                           |
| 2      | 1976 | 0.99%           | 15,345                           |
| 3      | 1977 | 0.98%           | 15,707                           |
| 4      | 1978 | 0.91%           | 15,190                           |
| 5      | 1979 | 0.87%           | 14,349                           |
| 6      | 1980 | 0.84%           | 14,314                           |
| 7      | 1981 | 0.82%           | 14,488                           |
| 8      | 1982 | 0.83%           | 15,170                           |
| 9      | 1983 | 0.85%           | 16,365                           |
| 10     | 1984 | 0.83%           | 16,150                           |
| 11     | 1985 | 0.77%           | 16,028                           |
| 12     | 1986 | 0.75%           | 16,065                           |
| 13     | 1987 | 0.76%           | 15,893                           |
| 14     | 1988 | 0.85%           | 18,280                           |
| 15     | 1989 | 0.96%           | 21,168                           |
| 16     | 1990 | 0.99%           | 22,618                           |
| 17     | 1991 | 1.05%           | 24,235                           |
| 18     | 1992 | 1.01%           | 23,668                           |

| Number | Year | % of Fed Budget | 2014 Constant Dollars (Millions) |
|--------|------|-----------------|----------------------------------|
| 19     | 1993 | 1.01%           | 23,546                           |
| 20     | 1994 | 0.94%           | 21,979                           |
| 21     | 1995 | 0.88%           | 20,879                           |
| 22     | 1996 | 0.89%           | 21,042                           |
| 23     | 1997 | 0.90%           | 21,280                           |
| 24     | 1998 | 0.86%           | 20,712                           |
| 25     | 1999 | 0.80%           | 19,467                           |
| 26     | 2000 | 0.75%           | 18,547                           |
| 27     | 2001 | 0.76%           | 18,940                           |
| 28     | 2002 | 0.72%           | 19,045                           |
| 29     | 2003 | 0.68%           | 18,885                           |
| 30     | 2004 | 0.66%           | 19,078                           |
| 31     | 2005 | 0.63%           | 19,001                           |
| 32     | 2006 | 0.57%           | 17,844                           |
| 33     | 2007 | 0.58%           | 18,194                           |
| 34     | 2008 | 0.60%           | 19,700                           |
| 35     | 2009 | 0.57%           | 19,714                           |
| 36     | 2010 | 0.52%           | 20,423                           |
| 37     | 2011 | 0.51%           | 17,833                           |
| 38     | 2012 | 0.50%           | 17,471                           |
| 39     | 2013 | 0.49%           | 17,219                           |
| 40     | 2014 | 0.50%           | 17,647                           |

Con su correspondiente diagrama de dispersión



Los datos ya no se dispersan tanto, aunque aún es notorio un máximo correspondiente al año 1991 (año en que cae el muro de Berlín y finaliza la guerra fría).

Para realizar las pruebas y transformaciones en los datos se utilizó el complemento XLSTAT de Excel.

Se procede a hacer una prueba Dickey-Fuller para determinar si la serie es estacionaria. Esta prueba en particular determina si hay la existencia de una raíz unitaria.

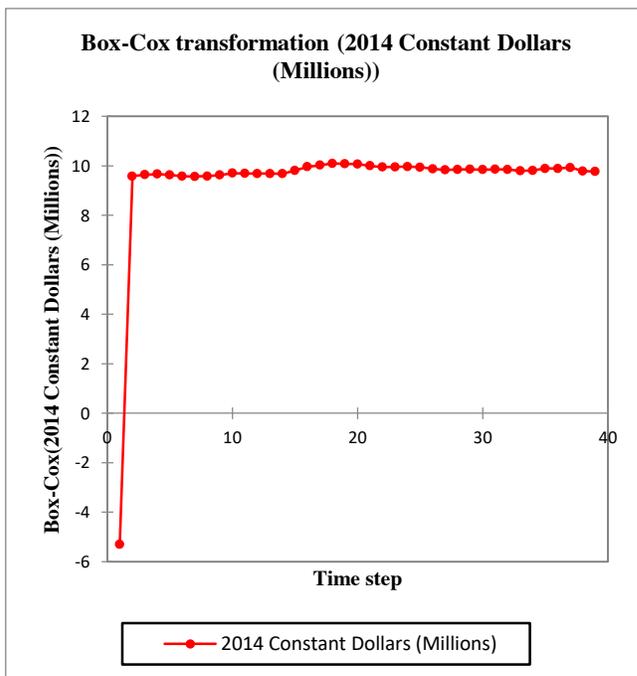
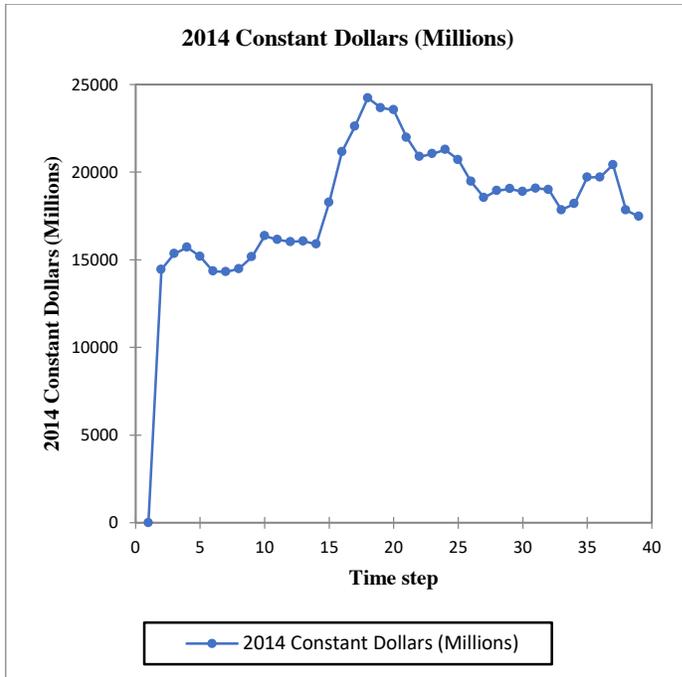
**Dickey-Fuller test**  
**(ADF(stationary) / k: 3 / 2014**  
**Constant Dollars (Millions)):**

|                      |        |
|----------------------|--------|
| Tau (Observed value) | -1.404 |
| Tau (Critical value) | -3.495 |
| p-value (one-tailed) | 0.814  |
| alpha                | 0.05   |

Como el p-value es mayor que el nivel de significancia escogido, no se puede rechazar la hipótesis nula de que existe una raíz unitaria, por lo tanto, la serie no es estacionaria.

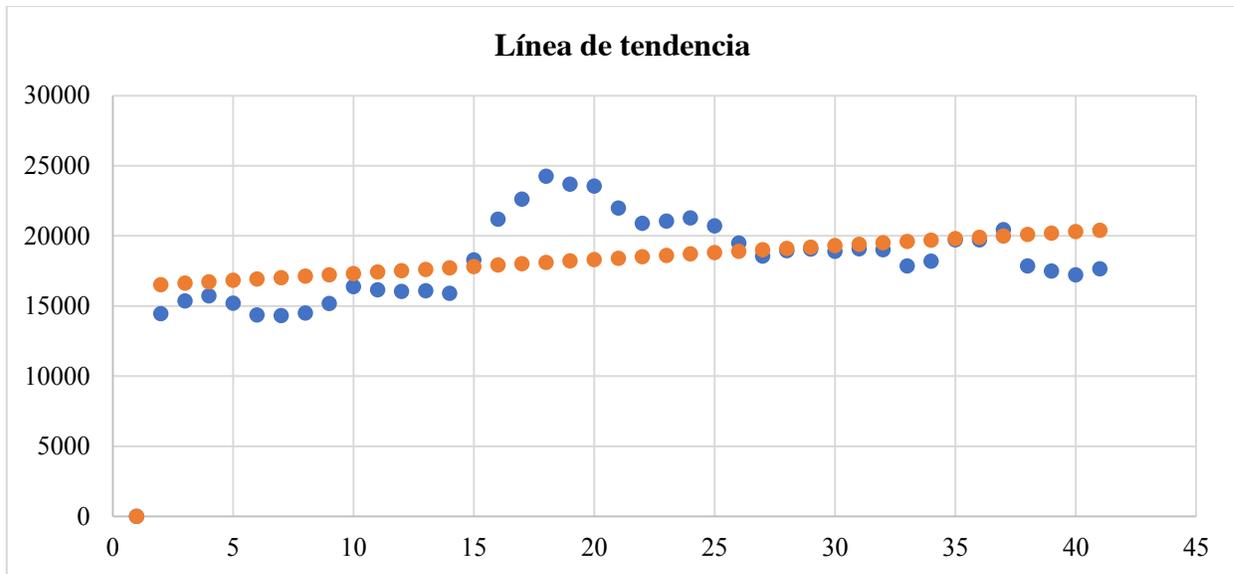
• Resultados

Se aplica una transformación Box-Cox para determinar si es que la serie es integrada de orden 1, y así, la serie de sus primeras diferencias si sea estacionaria, dando como resultado lo siguiente:



Finalmente se trazó una recta de tendencia utilizando una simple regresión lineal, para observar si dicha tendencia lleva alguna dirección. La recta resultante es

$$y = 16414.9 + 99.189x$$



#### • Conclusiones

Dentro de todo este análisis podemos ver que a pesar de que el presupuesto de la NASA medido en porcentaje del presupuesto federal ha ido disminuyendo a través de los años, realmente su presupuesto a seguido una tendencia en aumento, bastante pequeña pero significativa.

Aunque la serie de tiempo no es estacionaria, por lo cual no es tan factible analizarla para hacer algún pronóstico, la línea de tendencia parece indicar que el presupuesto seguirá en aumento en los próximos años.

Algo que hay que tener en cuenta, y que es un buen material para futuros trabajos, es si la pequeña tendencia compensa el aumento en la inflación del país.

#### • Referencias

Gujarati, Damodar N.; Porter, Dawn C.(2010). *Econometría*. Ciudad de México, México. McGraw-Hill.

Budget of NASA (2017, 15 de noviembre). Wikipedia. Recuperado el 15 de noviembre de 2017, de [https://en.wikipedia.org/wiki/Budget\\_of\\_NASA](https://en.wikipedia.org/wiki/Budget_of_NASA)

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 5

### TASA DE MORTALIDAD EN ACCIDENTES AÉREOS

L. E. José Jorge Estrada Alemán<sup>1</sup>, Dra. Diana Barraza Barraza<sup>2</sup>, Dra. Rosa Angélica Zamora Ríos<sup>2</sup>, Dr. Mario Alberto García Meza<sup>2</sup>, M. C. Miguel García Alvarado<sup>2</sup>,  
j.jorge0111@gmail.com

<sup>1</sup> Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas, Estudiante de la Maestría en Estadística Aplicada, <sup>2</sup> Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas  
j.jorge0111@gmail.com, diana.barraza@ujed.mx, rzamora@ujed.mx, marius.agm@gmail.com, mignewton33@hotmail.com

Maestría

Palabras clave: Inferencia estadística, muestreo, tasa de mortalidad

### Resumen

El transporte aéreo ha logrado disminuir los tiempos y las distancias en todo el mundo. A pesar de que la industria de la aviación es relativamente nueva, con respecto a los demás medios de transporte, es una de las industrias de transporte que mayores avances tecnológicos y de cobertura presenta día con día. Las estadísticas muestran que es el medio de transporte más seguro que existe en la actualidad, sin embargo, la percepción de la gente es que la probabilidad de muerte en un accidente aéreo es muy alta

### Fundamentos del objetivo de estudio.

#### 1.1 Línea de investigación

Debido al rápido flujo de ideas e información que se vive en la actualidad a causa de las redes sociales, durante los últimos años ha tomado fuerza el concepto de “No creas todo lo que piensas”, esto motivado principalmente a que mucha información que se comparte en estos medios de comunicación es errónea o tendenciosa. El presente trabajo se enfoca en cambiar el paradigma de la peligrosidad de los vuelos en avión y demostrar que la tasa de supervivencia, una vez que ocurre un accidente aéreo, es muy alta.

### Planteamiento del problema

#### 1.2 Antecedentes de la investigación

La percepción general es que los vuelos en avión son de alto riesgo, en gran motivo por la manera en que los medios de comunicación presentan los incidentes aéreos, incrementando negativamente el impacto social y la confianza que el público general tiene hacia este medio de transporte. Las estadísticas obtenidas indican que la probabilidad de morir en un vuelo, según el Consejo Nacional de Prevención de Riesgos (National Safety Council en inglés), es mucho menor que de morir a causa de un accidente automovilístico, bicicleta o motocicleta. Inclusive en los años recientes donde se han registrado accidentes aéreos con una mayor cobertura por parte de los medios de comunicación, la tasa de supervivencia, al parecer, no se vio afectada. La industria aérea es una de las más reguladas en el mundo, lo que proporciona gran cantidad de datos de cada uno de los vuelos, incluidos aquellos que no han sufrido algún percance. Muchas organizaciones a nivel mundial calculan tasas de supervivencia a partir de la información de sus registros. Esta investigación está basada en los registros de la National Transportation Security Board (NTSB). El propósito de esta investigación es demostrar que tasa de supervivencia a partir de los registros de la NTSB es estadísticamente la misma a la propuesta por la literatura.

### 1.3 Objetivo de la investigación

La proporción de sobrevivientes en accidentes aéreos durante los años de 2010 a 2015 es distinta a 95.7%.

#### Objetivos Particulares:

- Estimar la proporción de sobrevivientes en los vuelos accidentados durante los años de 2010 a 2015.

### 1.4 Preguntas de Investigación

- ✓ ¿El índice de supervivencia en un accidente aéreo es de 95.7% como lo plantean varios autores?

### 1.5 Justificación de la Investigación

El miedo irracional que a mucha gente le ocasiona volar en avión, es un claro ejemplo en donde las estadísticas pueden demostrar lo alejado de la realidad que se encuentran las creencias populares. Un ejemplo específico de esto es el 11 de septiembre de 2001, donde más gente murió en accidentes de auto durante los momentos de shock, que gente que iba en ambos aviones, tal y como explica Nassim Taleb en su libro "*El cisne negro*" (2007).

Por todas las aristas, hay un hecho que permanece invariable desde hace décadas: el avión es el medio de transporte más seguro que existe. Esta afirmación está basada en una fórmula muy sencilla: la cantidad de accidentes con los kilómetros recorridos por pasajeros y en el número de viajeros que optan por cada medio de transporte.

Por increíble que le parezca al lector, el índice de supervivencia en los accidentes de aviación es del 95,7%. Contrariamente a lo que la mayoría de las personas podrían llegar a creer, el resultado más probable después de un accidente aéreo, es sobrevivir a la razón antes mencionada, según los datos de Ben Sherwood, autor del bestseller "*The Survivors Club*" (2010).

### 1.6 Alcances y Limitaciones

Este estudio, se encuentra limitado por las siguientes consideraciones:

- La principal limitante es que dado la profundidad, el tiempo y las herramientas necesarias para las investigaciones que se realizan posteriormente a un accidente aéreo, aún no se cuenta con información disponible para los años de 2016 y 2017.
- Debido a causas desconocidas para el desarrollo de esta investigación no se cuenta con información previa al año 1962.
- Cada organización aérea emplea criterios distintos para catalogar algún percance como accidente, por lo tanto el número de accidentes puede variar dependiendo de los reportes que se consulten. En el presente estudio se utilizan los criterios de la National Transportation Safety Board (NTSB).
- La influencia en las estadísticas de mortalidad por parte de los avances tecnológicos, nos precisan a limitar el estudio entre los años de 2010 a 2015, para obtener una población más homogénea y que los resultados del estudio sean más significativos para el contexto en el que nos encontramos.

### Marco Teórico

La industria de transporte aéreo cumple un rol fundamental en la actividad económica mundial. Uno de los elementos clave para mantener la vitalidad de la aviación civil es garantizar operaciones seguras, confiables, eficientes y ecológicamente sustentables a niveles nacionales, regionales y mundiales. (Organización de Aviación Civil Internacional, 2015)

*“De acuerdo al Anexo 13 del Convenio sobre Aviación Civil Internacional, de la Organización de Aviación Civil Internacional (ICAO por sus siglas en Inglés) define como accidente aéreo a todo aquel suceso, relacionado con la utilización de una aeronave, que ocurre dentro del período comprendido entre el momento en que una persona entra a bordo de la aeronave, con intención de realizar un vuelo, y el momento en que todas las personas han desembarcado, durante el cual cualquier persona sufre lesiones mortales o graves a consecuencia de hallarse en la aeronave, o por contacto directo con cualquier parte de la aeronave, incluso las partes que se hayan desprendido de la aeronave, o por exposición directa al chorro de un reactor, excepto cuando las lesiones obedezcan a causas naturales. De igual manera están incluidos los eventos en los cuales la aeronave haya sufrido daños o roturas estructurales y/o la aeronave desaparece o sea totalmente inaccesible.” (2001)*

María González cita al profesor del Massachusetts Institute of Technology (MIT) Arnold Barnett, que explica que el riesgo de morir en un vuelo elegido de forma aleatoria (Q) en un viaje en coche es casi 7 veces más que el riesgo de morir en un vuelo nacional. En cuanto a la supervivencia una vez que ha ocurrido un accidente aéreo, es alrededor del 95,7%. González lo resume en una frase: "Es más probable ser presidente que morir en un avión" (2015).

Para ponerlo en perspectiva si una persona volara diariamente tendría un accidente cada 3.000 años, así lo afirman desde la Asociación de Compañías Españolas de Transporte Aéreo, incluso calculan las probabilidades, la aviación registra un accidente grave por cada 2.4 millones de vuelos (González, 2015).

Según los registros de la Aviation Safety Network (ASN), se han presentado dos años de alta fatalidad: 1973, cuando se llegaron a contabilizar hasta 2027 fallecidos en 67 accidentes de aviación en el mundo y 1985, año que los accidentes le costaron la vida a 2010 personas. Sin embargo, las cifras se quedan cortas si se comparan con la probabilidad de muerte en las carreteras, en donde cada día, según la Organización Mundial de la Salud (OMS) 3,500 personas fallecen por un accidente de tráfico, de los cuales 46% son peatones, ciclistas o motociclistas, lo que significa que, cada año, 1,277,000 mueren por esta causa (La Información, 2015).

De acuerdo con Ben Sherwood, el 80 por ciento de todos los accidentes aéreos suceden durante 11 minutos claves en un viaje por avión, ya sea, durante los primeros tres minutos después del despegue o en los ocho minutos antes del aterrizaje, por lo que el autor recomienda que se debe estar muy alerta (tanto pilotos como tripulación y pasajeros) de seguir los lineamientos de seguridad durante este periodo de tiempo (2010).

Las afirmaciones de Ben Sherwood, contrastan con los comentarios del vicesecretario del Colegio Oficial de Pilotos, Gustavo Barba, quien en una entrevista para TVE comentó que "de los últimos 21 accidentes de avión, 13 de ellos se han producido en ruta, es decir, en el aire. Dado que siempre se ha considerado que los momentos más peligrosos de un vuelo son el aterrizaje y el despegue, Barba cree que hay que cambiar la metodología de seguridad." (2015)

Es importante mencionar que se ha trabajado mucho para que sea el medio de transporte más seguro. No lo sería si no se hubiesen presentado miles de accidentes y no se hubiesen indagado las causas. Se ha investigado mucho, han aportado mucho, tanto la industria aérea como los pilotos, tripulantes y autoridades correspondientes (La Información, 2015).



Steven Johnson brinda un claro ejemplo de ello en su libro Futuro perfecto, donde menciona que en 1964 muchos aeropuertos, tenían una mini-oficina donde uno podía contratar a toda prisa un seguro de vida antes de subirse al avión, pero tenía su sentido, la posibilidad de morir en un accidente de vuelo era una entre un millón” (2013).

## Metodología

### 1.7 Tipología del Estudio

Según las categorizaciones que se pueden encontrar en el libro “*Metodología de la Investigación*” de Hernández Sampieri *et al* (2004), el presente trabajo se puede clasificar en los siguientes rubros:

- ✓ Según la intervención del investigador: No hubo intervención, los datos fueron recabados de repositorios, por lo tanto es clasificado No Experimental, Descriptivo.
- ✓ Según la planificación de las mediciones: Estudio Retrospectivo, se analizan sucesos pasados.
- ✓ Según el número de recolecciones de datos para el estudio: Estudio Transversal.

### 1.8 Método de Investigación

El método de investigación empleado es el inductivo y cuantitativo; ya que se hará inferencia con base estadística sobre los parámetros de una población, yendo de lo particular a lo general.

### 1.9 Hipótesis de Investigación

“La tasa de supervivencia del periodo de 2010 a 2015 en los vuelos de avión es distinta a la propuesta por los expertos del 95.7%”

$H_0$ : La tasa de supervivencia en un accidente aéreo es de 95.7%

$H_a$ : La tasa de supervivencia en un accidente aéreo es distinta a 95.7%

Donde  $H_0$  es la hipótesis nula y  $H_a$  es la hipótesis alternativa que se desea contrastar.

### 1.10 Técnicas y procedimientos para la recopilación de datos

La base de datos de accidentes de aviación del NTSB, obtenida del repositorio Kaggle, contiene información de 1962 en adelante sobre accidentes de aviación civil e incidentes a nivel mundial. La información contenida en esta base de datos se obtiene del informe preliminar que está disponible en línea dentro de unos días posteriores al accidente. La información fáctica se agrega cuando está disponible y, una vez finalizada la investigación, se sustituye el informe preliminar por una descripción final del accidente y su causa probable. Las descripciones narrativas completas pueden no estar disponibles para fechas anteriores a 1993, casos en revisión o donde el NTSB no tenía responsabilidad investigativa primaria. La base de datos completa comprende desde el año de 1962 hasta 2017, en los que se registran 79,293 accidentes e incidentes, sin embargo se trabajará únicamente con 9,910 registros que comprenden el periodo delimitado de nuestra base de datos (2010-2015).

Para la técnica de muestreo, se empleará un muestreo probabilístico, específicamente la técnica de muestreo aleatorio simple, esto dadas las condiciones de la base de datos, ya que al tener toda la población identificada y dado que no existe evidencia estadística que nos indique que alguna región o país del mundo o algún año entre 2010 y 2015 fue más propenso a accidentes, se pueden considerar equiprobables.

El cálculo del tamaño de la muestra se realizará empleando la fórmula para muestras de poblaciones conocidas:

$$n = \frac{Z_{\alpha}^2 (P)(Q)(N)}{(e^2(N - 1)) + (Z_{\alpha}^2)(P)(Q)}$$

Donde:

$n$  = Tamaño de la muestra  
 $Z_{\alpha}^2$  = Nivel de confianza (95%)  
 $P$  = Probabilidad de Sobrevivir (95.7%)  
 $Q$  = Probabilidad de Fallecer (4.3%)  
 $e^2$  = Error Estadístico (1%)  
 $N$  = Tamaño de la población (9910)

Cabe resaltar que el error estadístico a emplear es muy bajo por la razón de que debe ser muy puntual al tratarse de vidas humanas.

La Tabla 1 presenta todas las variables contenidas en la base de datos y una breve descripción de cada una de ellas.

*Tabla 1 Descripción Variables Base de Datos*

| Nombre de la columna | Descripción                 | Nombre de la columna   | Descripción                                  |
|----------------------|-----------------------------|------------------------|--|
| Event.Id             | Identificador del Accidente | Amateur.Built          | Construcción Amateur                         |
| Investigation.Type   | Tipo de Accidente           | Number.of.Engines      | Número de Motores                            |
| Accident.Number      | Número de Serie Accidente   | Engine.Type            | Tipo de Motores                              |
| Event.Date           | Fecha del Accidente         | FAR.Description        | Motivo del vuelo                             |
| Location             | Lugar de Accidente          | Schedule               | Itinerario                                   |
| Country              | País de Accidente           | Purpose.of.Flight      | Propósito del vuelo                          |
| Latitude             | Latitud                     | Air.Carrier            | Aerolínea                                    |
| Longitude            | Longitud                    | Total.Fatal.Injuries   | Total de pasajeros muertos                   |
| Airport.Code         | Código del Aeropuerto       | Total.Serious.Injuries | Total pasajeros con heridas mayores          |
| Airport.Name         | Nombre del Aeropuerto       | Total.Minor.Injuries   | Total pasajeros con heridas menores          |
| Injury.Severity      | Severidad de los Heridos    | Total.Uninjured        | Total pasajeros sin heridas                  |
| Aircraft.Damage      | Daño de la aeronave         | Weather.Condition      | Condiciones del Clima durante el Ac. cidente |
| Aircraft.Category    | Categoría de la aeronave    | Broad.Phase.of.Flight  | Fase de Vuelo durante el Accidente           |
| Registration.Number  | Número de Registro          | Report.Status          | Estatus del Reporte                          |
| Make                 | Fabricador                  | Publication.Date       | Fecha Publicación Reporte                    |
| Model                | Modelo                      |                        |  |

### 1.11 Análisis de la información.

Como se comentó previamente la información contenida en la base de datos corresponde a 79,293 accidentes ocurridos desde 1962 a 2017, ellos contienen no solo los accidentes ocurridos en vuelos comerciales, sino que también incluye vuelos amateurs y con tripulación menor a 14 personas.

Algunos accidentes e incidentes relevantes incluidos en esta base de datos son:

- Los 4 aviones accidentados el 11 de Septiembre de 2001
- 2 accidentes aéreos en el estado de Durango
- Accidente del jet de Juan Camilo Mouriño
- Accidente del Helicóptero de Francisco Blake Mora
- Suicidio del piloto alemán de Germanwings
- Acuatizaje en el Rio Hudson
- Vuelo 370 de Malaysia Airlines

La técnica estadística a emplear para poder cumplir con los objetivos del estudio serán pruebas de hipótesis. Para lo cual se estimará una proporción de sobrevivientes en los accidentes aéreos con los datos de la muestra, de la siguiente manera:

1. Cálculo del total de pasajeros en el avión:

$$\text{Total. Passengers} = \text{Total. Fatal. Injuries} + \text{Total. Serious. Injuries} + \text{Total. Minor. Injuries} + \text{Total. Uninjured}$$

2. Creación del “Índice de supervivencia”

$$\text{SurvIndex}(p_x) = \frac{\text{TotalPassengers} - \text{Total.Fatal.Injuries}}{\text{TotalPassengers}} = \frac{\text{Survivors}}{\text{TotalPassengers}}$$

Las variables presentadas en las ecuaciones 1 y 2 son las que se describieron en la tabla 1.

### Presentación de resultados y conclusiones

La estadística descriptiva que se presenta a continuación es de la totalidad de la base de datos, la cual nos ayudará a comprender las principales características en cuanto a Fatalidades en los Accidentes Aéreos (Tabla 2).

Como se puede observar en la Tabla 2, al menos el 75% de los accidentes no conllevaron ninguna fatalidad. El mayor número de muertos a consecuencia de un siniestro aéreo entre los años estudiados, es de 349, el cual corresponde al accidente “Colisión aérea de Charkhi Dadri” ocurrido el 12 de noviembre de 1996 cuando el Vuelo 763 de Saudi Arabian Airlines, un Boeing 747-168B, que se dirigía desde Nueva Delhi hacia Dhahran, Arabia Saudita, colisionó en el aire, sobre la villa de Charkhi Dadri, con el Vuelo 1907 de Kazakhstan Airlines, un Ilyushin Il-76 que volaba de Shymkent, Kazajistán hacia Nueva Delhi. Todas las 349 personas a bordo de las aeronaves murieron.

*Tabla 2 Estadística Descriptiva*

| Min. | 1st Qu. | Median | Mean   | 3rd Qu. | Max. |
|------|---------|--------|--------|---------|------|
| 0    | 0       | 0      | 0.5752 | 0       | 349  |

La Tabla 3 nos permitirá ver con mayor detalle la distribución de los pasajeros fallecidos en los accidentes. De los 79,293 accidentes ocurridos, el 99.87% tuvo menos de 50 fatalidades, por lo tanto sólo el 0.13% de los incidentes pueden considerarse catástrofes de gran escala.

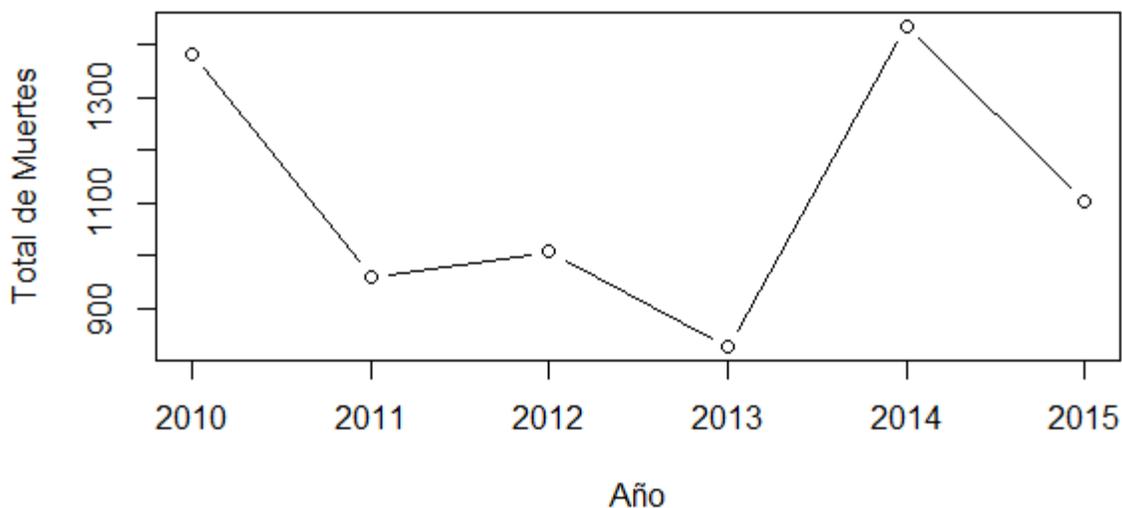
*Tabla 3 Frecuencias de Fatalidades en Accidentes Aéreos*

| Rango de Muertes |     | Frecuencia | Porcentaje |
|------------------|-----|------------|------------|
| 0                | 50  | 79,192     | 99.87%     |
| 51               | 100 | 41         | 0.05%      |
| 101              | 150 | 30         | 0.04%      |
| 151              | 200 | 16         | 0.02%      |
| 201              | 250 | 8          | 0.01%      |
| 251              | 300 | 4          | 0.01%      |
| 301              | 350 | 2          | 0.00%      |

Para 2010 a 2015 la cantidad de fatalidades se muestra en la Gráfica 1. El número de muertes en accidentes aéreos, no presenta una tendencia, sino que varía año con año. 2010 y 2014 fueron los años con mayor número de fatalidades colocándose en 1,382 y 1,436 respectivamente, por lo que la gráfica nos podría a llevar a pensar que existe una menor tasa de supervivencia en dichos años.

Una imagen distinta es la que se observa en 2011 y 2013 donde las fatalidades fueron las menores en los últimos 5 años, siendo 959 y 826 respectivamente.

El análisis de esta gráfica podría sugerir que el año 2014 tuvo una tasa de supervivencia menor a la global para 2010 a 2015.

*Gráfica 1 Fatalidades de 2010 a 2015*

### 1.12 Tratamiento de los datos y procesos estadísticos.

La base de datos tuvo que recibir un tratamiento para poder acotarla a los motivos de la investigación, aunada a razones de confiabilidad y homogeneidad de los datos.

Una vez delimitada la base de datos se procedió a la realización de la generación de la muestra. Sustituyendo los valores en la fórmula antes mencionada se obtiene lo siguiente:

$$n = \frac{(1.96^2)(.957)(.043)(9910)}{(0.01^2(9909)) + (1.96^2)(.957)(.043)} = 1,363.5$$

El resultado del cálculo arroja un tamaño de muestra de 1,363.5, el cual es redondeado a 1,364 incidentes. Cabe resaltar que es una muestra grande debido al margen de error con el que se desea trabajar.

Las estadísticas descriptivas de la muestra se presentan en las Tabla 4 y Tabla 5. En donde se puede observar que al igual que en la población total, al menos el 75% de los accidentes no conllevaron ninguna fatalidad. La frecuencia relativa se mantiene prácticamente igual en la muestra que en la población total, donde de nueva cuenta sólo un porcentaje extremadamente bajo de las fatalidades (0.14%) se pueden considerar catástrofes de gran escala.

*Tabla 4 Estadísticas Descriptivas Muestra*

| Min. | 1st Qu. | Median | Mean   | 3rd Qu. | Max. |
|------|---------|--------|--------|---------|------|
| 0    | 0       | 0      | 0.6774 | 0       | 295  |

*Tabla 5 Frecuencias de Fatalidades en Accidentes Aereos Muestra*

| Rango de Muertes |     | Frecuencia | Porcentaje |
|------------------|-----|------------|------------|
| 0                | 50  | 9,896      | 99.86%     |
| 51               | 100 | 4          | 0.04%      |
| 101              | 150 | 3          | 0.03%      |
| 151              | 200 | 4          | 0.04%      |
| 201              | 250 | 2          | 0.02%      |
| 251              | 300 | 1          | 0.01%      |
| 301              | 350 | 0          | 0.00%      |

Como se comentó al inicio del documento, la prueba de hipótesis establecida para esta investigación es: “La tasa de supervivencia del periodo de 2010 a 2015 en los vuelos de avión es distinta a la propuesta por los expertos del 95.7%” Por lo tanto la hipótesis se plantea de la siguiente manera:

$$H_0: P_m = 95.7\%$$

$$H_a: P_m \neq 95.7\%$$

Donde:

$$P_m = \text{Índice de supervivencia calculado para la muestra (Proporción)}$$

La prueba estadística correspondiente es una Ji-Cuadrada de dos colas, con un nivel de confianza del 95%.

La Tabla 6 presenta los resultados de la prueba ejecutada en R con la función *prop.test*. Considerando el p-valor se puede concluir que existe suficiente evidencia estadística para

aseverar que la tasa de supervivencia no es del 95.7% y que incluso es más baja 88.42% con un intervalo de confianza del 95% en (87.80% - 89.01%).

*Tabla 6 Prueba Estadística para el índice de supervivencia*

*1-sample proportions test with continuity correction*

*data: sum(SAF\$Survivors) out of sum(SAF\$TotalPassengers), null probability 0.957*

*X-squared = 1401.8, df = 1, p-value < 2.2e-16*

*alternative hypothesis: true p is not equal to 0.957*

*95 percent confidence interval:*

*0.8780085 0.8901165*

*sample estimates:*

*p*  
*0.8841989*

### Conclusiones

Los resultados de la prueba de hipótesis, permiten confirmar la hipótesis alternativa. Es importante señalarle al lector de este documento, que a pesar de tener una tasa de supervivencia menor, la proporción de sobrevivientes sigue siendo alta, con un intervalo que oscila entre (87.80% - 89.01%). La reducción de la tasa de supervivencia puede ser explicado por la inclusión de vuelos amateurs, los cuales por su naturaleza suelen tener tasas de supervivencia bajas. Para futuras investigaciones se recomienda realizar el mismo estudio con la base de datos de la Organización de Aviación Civil Internacional (ICAO por sus siglas en Inglés) o por lo menos delimitar su muestra a únicamente vuelos comerciales mayores a 14 pasajeros, de igual manera se puede llevar a cabo un estudio en donde se tome como unidad de muestreo los pasajeros totales del avión y no los accidentes aéreos, como se realizó en este estudio y por lo tanto la técnica de muestreo que se aplique sea la de muestreo estratificado.

### Bibliografía

González, M. (25 de Marzo de 2015). *Xataka Ciencia*. Obtenido de Si viajar en avión es lo más seguro, ¿Por qué le seguimos teniendo miedo?:

<https://www.xataka.com/vehiculos/si-viajar-en-avion-es-lo-mas-seguro-por-que-le-seguimos-teniendo-miedo>

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2004). *Metodología de la Investigación*. Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana.

Johnson, S. (2013). *Futuro Perfecto: Sobre el progreso en la era de las redes*. Madrid: Turner.

La Información. (24 de Marzo de 2015). La posibilidad de sufrir un accidente en avión es mínima: una entre 2,4 millones. *La Información*, págs.

[http://www.lainformacion.com/mundo/la-posibilidad-de-sufrir-un-accidente-en-avion-es-minima-una-entre-2-4-millones\\_IUpz8CAKMYccsu1gGFTTh5/](http://www.lainformacion.com/mundo/la-posibilidad-de-sufrir-un-accidente-en-avion-es-minima-una-entre-2-4-millones_IUpz8CAKMYccsu1gGFTTh5/).

Organización de Aviación Civil Internacional. (2001). *Investigación de accidentes e incidentes de aviación*. Montreal.

Organización de Aviación Civil Internacional. (2015). *Informe de seguridad operacional*. Montreal.

Sherwood, B. (2010). *El club de los supervivientes: Los secretos y la ciencia que podrían salvar tu vida*. Ciudad de México: Paidós.

Taleb, N. (2007). *El Cisne Negro: El impacto de lo altamente improbable*. Nueva York: Ediciones Paidós Ibérica S.A.

## Anexos

### 1.13 Anexo 1

#### Códigos en R

##### A. Importación de la base de datos

```
setwd("e:/Users/Jorge/Documents/Maestría/Primer Semestre/Herramientas
Computacionales para Estadística/Bases de Datos")
```

```
getwd()
```

```
Aviation <- read.csv("AviationData.csv", header = TRUE)
```

##### B. Creación de la columna año

```
typeof(Aviation$Event.Date)
```

```
Aviation$Year <- as.integer(format(as.Date(Aviation$Event.Date, '%Y-%m-%d'), '%Y'))
```

```
typeof(Aviation$Year)
```

##### C. Creación de la tabla Aviation1015 que contiene los accidentes entre los años 2010 a 2015

```
Aviation1015 <- Aviation[Aviation$Year >= 2010 & Aviation$Year <= 2015,]
```

##### D. Creación columna Total de Pasajeros

```
Aviation1015$TotalPassengers <- colSums(t(Aviation1015[,24:27]),na.rm = T)
```

```
AviationFinal <- Aviation1015[Aviation1015$TotalPassengers > 0,]
```

##### E. Tamaño, selección y creación de la muestra

```
Z <- 1.96
```

```
P <- .957
```

```
Q <- .043
```

```
N <- 9910
```

```
e <- .01
```

```
n=ceiling((((Z^2)*(P)*(Q)*(N))/((e^2)*(N-1)+(Z^2)*(P)*(Q))))
```

```
sampleaviation <- sample(x=1:N,size = n, replace = FALSE)
```

```
SAF <- AviationFinal[sampleaviation,]
```

```
SAF$Total.Fatal.Injuries[is.na(SAF$Total.Fatal.Injuries)] <- 0
```

```
SAF$SurvIndex <- (SAF$TotalPassengers-
SAF$Total.Fatal.Injuries)/SAF$TotalPassengers
SAF$Survivors <- (SAF$TotalPassengers-SAF$Total.Fatal.Injuries)
hist(SAF$SurvIndex)
summary(SAF$SurvIndex)
```

#### **F. Prueba de Hipótesis**

```
prop.test(n = sum(SAF$TotalPassengers), x = sum(SAF$Survivors), p=.957, conf.level =
.95, alternative = "two.sided")
```

#### **G. Obtención de los datos de 2014 y creación de tabla**

```
Aviation2014 <- AviationFinal[AviationFinal$Year == 2014,]
Aviation2014$Total.Fatal.Injuries[is.na(Aviation2014$Total.Fatal.Injuries)] <- 0
Aviation2014$SurvIndex <- (Aviation2014$TotalPassengers-
Aviation2014$Total.Fatal.Injuries)/Aviation2014$TotalPassengers
Aviation2014$Survivors <- (Aviation2014$TotalPassengers-
Aviation2014$Total.Fatal.Injuries)
```

#### **H. Prueba de Hipótesis**

```
prop.test(n = sum(Aviation2014$TotalPassengers), x = sum(Aviation2014$Survivors),
p=.8842, conf.level = .95, alternative = "less")
hist(SAF$Survivors/SAF$TotalPassengers, nclass = 4)
```

#### **I. Estadística Descriptiva y otras pruebas**

```
hist(SAF$Survivors/SAF$TotalPassengers, nclass = 4)
Aviation$Total.Fatal.Injuries[is.na(Aviation$Total.Fatal.Injuries)] <- 0
summary(Aviation$Total.Fatal.Injuries)
Aviation[which(Aviation$Total.Fatal.Injuries==max(Aviation$Total.Fatal.Injuries)),]
tabla <- hist(Aviation$Total.Fatal.Injuries, breaks = c(0,50,100,150,200,250,300,350))
cbind(tabla$breaks[-1],tabla$counts)
tabla2 <- hist(AviationFinal$Total.Fatal.Injuries, breaks =
c(0,50,100,150,200,250,300,350))
cbind(tabla2$breaks[-1],tabla2$counts)
qqnorm(SAF$Total.Fatal.Injuries)
qqline(SAF$Total.Fatal.Injuries)
summary(AviationFinal$Total.Fatal.Injuries)
TFI<-AviationFinal[, c(24,32)]
TFI$Total.Fatal.Injuries[is.na(TFI$Total.Fatal.Injuries)]<-0
resumen<-aggregate(x = TFI$Total.Fatal.Injuries, by=list(TFI$Year), FUN=sum)
```

```
plot(resumen, type="b", xlab="Año", ylab="Total de Muertes")
```

#### 1.14 Anexo 2 (Inferencia Estadística)

En el presente anexo se realiza una segunda prueba de comparación, con la siguiente hipótesis:

¿La tasa de supervivencia en el año 2014 fue menor a la tasa global de los años 2010-2015?

$H_0$ : La tasa de supervivencia en el año 2014 es similar a la tasa global de los años 2010 – 2015

$H_a$ : La tasa de supervivencia en el año 2014 fue menor a la tasa global de los años 2010 – 2015

Donde  $H_0$  es la hipótesis nula y  $H_a$  es la hipótesis alternativa que se desea contrastar.

La prueba de hipótesis es motivada por la gran cobertura mediática que los medios de comunicación dieron en particular a dos vuelos de la aerolínea de Malaysia Airlines y las estadísticas indican que las fatalidades fueron las más altas de los últimos 5 años.

Los tamaños de la muestra y la técnica de muestreo son las empleadas en el documento, únicamente se toma una sub-muestra del año 2014. La tasa de supervivencia a emplear es la de 88.42% obtenida de la prueba de hipótesis anterior.

La prueba estadística correspondiente es una Ji-Cuadrada de una cola, con un nivel de confianza del 95%.

*Tabla 7 Prueba Hipótesis Tasa Supervivencia 2014*

| <i>1-sample proportions test with continuity correction</i>  |
|--|
| <i>data: sum(Aviation2014\$Survivors) out of sum(Aviation2014\$TotalPassengers), null probability 0.8842</i> |
| <i>X-squared = 0.0091368, df = 1, p-value = 0.4619</i>   |
| <i>alternative hypothesis: true p is less than 0.8842</i>  |
| <i>95 percent confidence interval:</i>   |
| <i>0.000000 0.888579</i>   |
| <i>sample estimates:</i>   |
| <i>p</i>   |
| <i>0.8838845</i>   |

La Tabla 7 presenta los resultados de la prueba ejecutada en R con la función *prop.test*. Considerando el p-valor se puede concluir que existe suficiente evidencia estadística para aseverar que la tasa de supervivencia para el año 2014 fue menor a la tasa de supervivencia global para los años 2010-2015.

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 6

### **PALOMITAS PERFECTAS: UN PRIMER ACERCAMIENTO**

Axel Tapia Ávalos, José Feliciano Zamora Delfín. Saúl Nevárez Nieto.

axel.infimo@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas UJED

axel.infimo@gmail.com, chano-l@hotmail.com

Licenciatura.

Palomitas. Microondas. Cuadrado Latino. LSD. Diseño de Experimentos.

En el presente trabajo se propone un primer acercamiento al problema de cocinar la mayor cantidad de granos de una bolsa de palomitas para microondas, proponiendo primero que nada hacer una comparación entre productos de tres marcas y sabores diferentes, cocinadas en tres microondas con condiciones distintas, determinando con un arreglo en forma de cuadrado latino que combinación deja menos granos de maíz sin cocinar.

#### • Introducción.

En el presente trabajo buscamos dar un primer acercamiento a la investigación del problema de determinar bajo qué condiciones se cocina la mayor cantidad de granos de palomitas para microondas por paquete haciendo una comparación entre productos de tres marcas (Act II, Cinépolis y Great Value) y tres sabores (natural, mantequilla y extra mantequilla) cocinándolos en tres microondas a distintas potencias (90%, 95% y 100%) para determinar qué combinación es la que deja menor cantidad de granos sin convertirse en palomitas. Este estudio se realizó manejando los datos en un arreglo de cuadrado latino de 3x3.

#### • Marco teórico

En el diseño en cuadro latino (DCL) se controlan dos factores de bloque y se estudia un factor de tratamientos, por lo que se tienen cuatro fuentes de variabilidad que pueden afectar la respuesta observada, éstas son: los tratamientos, el factor de bloque I (columnas), el factor de bloque II (renglones) y el error aleatorio. Se llama cuadro latino por dos razones: es un cuadro debido a que tiene la restricción adicional de que los tres factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles, y es latino porque se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos o niveles del factor de interés. Sean A, B, C, ..., K, los k tratamientos a comparar, por lo tanto, ambos factores de bloques tienen también k niveles cada uno.

Si los niveles del factor A están identificados con las filas de una tabla y los niveles de B con las columnas de la tabla, entonces la característica definitoria de un diseño de cuadrado latino es que cada nivel del factor C aparece exactamente una vez en cada fila y exactamente una vez en cada columna.

El modelo estadístico para describir el comportamiento de las observaciones está dado por

$$Y_{ijl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varepsilon_{ijl}$$

Donde:



- $Y_{ijl}$  es la observación del tratamiento  $l$ , en el nivel  $i$  del factor renglón y en el nivel  $j$  del factor columna.
- $\mu$  es la media global poblacional.
- $\tau_i, \gamma_j, \delta_l$  son los efectos debido al tratamiento  $i, j, l$  respectivamente.
- $\varepsilon_{ijl}$  es el error atribuible a dicha observación.

Este modelo es ideal para evitar hacer un muestreo demasiado extenso, y se aplica en casos donde no hay interacción propia entre los factores.

De acuerdo con este modelo, la variabilidad total presente en los datos se puede descomponer como

$$SC_T = SC_{TRAT} + SC_A + SC_B + SC_E$$

Los grados de libertad correspondientes son

$$k^2 - 1 = (k - 1) + (k - 1) + (k - 1) + (k - 2)(k - 1)$$

El ANOVA para el diseño en cuadro latino es el siguiente

| Origen       | Grados libertad  | Suma Cuadrados | Cuadrado Medio | $f_t$                    | F tabla                         |
|--------------|------------------|----------------|----------------|--------------------------|---------------------------------|
| Factor A     | $k - 1$          | $SC_A$         | $CM_A$         | $\frac{CM_A}{CM_E}$      | $F_{\alpha, (k-1), (k-1)(k-2)}$ |
| Factor B     | $k - 1$          | $SC_B$         | $CM_B$         | $\frac{CM_B}{CM_E}$      | $F_{\alpha, (k-1), (k-1)(k-2)}$ |
| Tratamientos | $k - 1$          | $SC_{TRAT}$    | $CM_{TRAT}$    | $\frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$ | $F_{\alpha, (k-1), (k-1)(k-2)}$ |
| Error        | $(k - 2)(k - 1)$ | $SC_E$         | $CM_E$         |                          |                                 |
| Total        | $k^2 - 1$        | $SC_T$         |                |                          |                                 |

Donde se quiere probar la hipótesis

$$H_{0TRAT}: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$$

Frente a  $H_{1TRAT}: \delta_l \neq 0$  para algún  $l$ .

Análogamente para los factores A y B:

$$H_{0TRAT}: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0$$

Además  $H_{0A}$  y  $H_{0B}$  se plantean de manera análoga. (Gutiérrez Pulido & De la Vara Salazar, 2008).

- Planteamiento del problema.

Al terminar de cocinar palomitas para microondas siempre quedan algunos o varios granos de maíz que no terminan de explotar. Algunas veces para evitar esto tratamos de dejar la

bolsa en el microondas un mayor tiempo, teniendo como consecuencia que ahora se quemaron algunas palomitas aun dejando granos sin cocinar.

El proceso físico por el cual un grano de maíz se convierte en palomita ocurre porque el grano en su interior alberga un componente de agua, que al calentarse en el microondas entra en ebullición comenzando a expandir el grano hasta el punto en que este no aguanta la presión y explota liberando el vapor y convirtiéndose en palomita.

Es por esto último que es prácticamente imposible cocinar palomitas perfectas, debido a que siempre habrá algunos granos que carezcan de la suficiente agua en su interior para llegar a explotar. Sin embargo, es posible acercarse bastante.

Se propone dar un primer acercamiento a la solución del problema de determinar bajo qué condiciones se cocina la mayor cantidad de granos de palomitas para microondas investigando que factores afectan en mayor medida el resultado final de la cocción en el horno. De esta manera se da la opción de continuar el estudio centrándose solo en paquetes de palomitas que cumplan las características más favorables de este proyecto.

Esto tiene más que nada un uso práctico en la vida diaria donde se presenta el problema regularmente entre los consumidores del producto.

Además, se presenta esta curiosa aplicación del análisis y diseño de experimentos, mostrando que no solo se da en proyectos de gran escala como lo son la optimización y mejoramiento de procesos en empresas y fábricas, sino que se presenta a un nivel cotidiano también.

Debido a que las condiciones bajo las que se elaboran estos productos, pudiesen variar debido a su marca, lote, sabor, condiciones bajo las que se conservan, entre otros; se decidió escoger los factores que pudiesen ser más significativos para marcar la diferencia. La marca se consideró un factor obligado a considerar, pues es bien sabido que una marca como Act II suele manejar estándares de calidad más altos que marcas económicas como Great Value o Soriana, mientras que el sabor se consideró significativo debido a que las presentaciones como mantequilla o extra mantequilla al tener ese aditivo extra dentro del mismo producto puede afectar los resultados de su cocción. Sin embargo, nuestro factor principal de interés es el horno de microondas considerado a diferentes potencias, pues, aunque uno esperaría que a mayor potencia se cocine una mayor cantidad de palomitas, también se corre el riesgo de quemar algunas en el proceso. Con este trabajo se puede determinar si tiene validación estadística esta suposición.

Una de las limitantes para el desarrollo del presente trabajo fue el costo, por el cual se tuvo que manejar una muestra muy pequeña que no colabora en darle una base sólida a todo el estudio y desarrollo posterior del problema. Aún así, se propone como un buen primer acercamiento que sienta la base para un posible estudio posterior más detallado.

- Metodología

Para realizar el experimento se compraron tres bolsas por cada una de las nueve combinaciones de marca – sabor de palomitas, dando un total de 27 bolsas. Estas se dividieron en tres muestras iguales para usarse en los tres hornos de microondas.

El proceso de experimentación se realizó con los siguientes pasos.

- I. Cocinar una bolsa de palomitas de acuerdo a las indicaciones del empaque, ajustando el microondas a su potencia máxima.
  - II. Retirar la bolsa del horno y vaciarlas en un recipiente grande, de esta forma evaluar el estado en que se encuentran buscando evitar que hayan quedado palomitas quemadas. Mientras se realizan estos pasos el horno se enfría.
  - III. Con mucho cuidado se van pasando las palomitas en buen estado a otro recipiente, para ir separando a los granos sin cocinarse y a aquellos que quedaron en un estado a la mitad entre grano y paloma.
  - IV. Aquellos granos en estado intermedio se muerden, si presenta mucha resistencia se cuenta como grano, de lo contrario se considera como palomita.
  - V. Se cuentan los granos que hayan quedado sin cocinarse y se anota el dato.
  - VI. Se repite el primer paso ahora que el microondas se encuentra frío de nuevo.
- Bajo dicho algoritmo se cocinaron las tres muestras de palomitas a lo largo de un día.

• Resultados

El muestreo arrojó los siguientes datos:

| Horno 1     | Sabor       |             |             | Horno 2     | Sabor   |             |       |  |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------|-------------|-------|--|
| Marca       | Natural     | Mantequilla | Extra       | Marca       | Natural | Mantequilla | Extra |  |
| Act II      | 27          | 17          | 20          | Act II      | 25      | 21          | 45    |  |
| Cinépolis   | 18          | 18          | 8           | Cinépolis   | 40      | 22          | 23    |  |
| Great Value | 16          | 14          | 11          | Great Value | 28      | 39          | 66    |  |
|             | Horno 3     | Sabor       |             |             |         |             |       |  |
|             | Marca       | Natural     | Mantequilla | Extra       |         |             |       |  |
|             | Act II      | 22          | 73          | 42          |         |             |       |  |
|             | Cinépolis   | 44          | 26          | 17          |         |             |       |  |
|             | Great Value | 21          | 17          | 12          |         |             |       |  |

En la entrada correspondiente al horno 3, marca Act II, sabor Mantequilla se tuvo un pequeño error al colocar incorrectamente las palomitas en el horno, provocando que se quemasen varias palomitas y que 73 granos hayan quedado sin cocinarse.

Los datos se decidieron ordenar en un arreglo de cuadrado latino de la siguiente forma:

| Cuadrado    | Natural | Mantequilla | Extra |
|-------------|---------|-------------|-------|
| Act II      | A       | B           | C     |
| Cinépolis   | C       | A           | B     |
| Great Value | B       | C           | A     |

| Datos       | Natural | Mantequilla | Extra |
|-------------|---------|-------------|-------|
| Act II      | 27      | 21          | 42    |
| Cinépolis   | 44      | 18          | 23    |
| Great Value | 28      | 17          | 11    |

Al escoger este arreglo se buscó discriminar el dato donde se quemaron las palomitas para que no afecte de manera negativa al experimento.

Con estos datos se realizó la siguiente tabla ANOVA

| Origen   | G.L. | Cuadrados  | C.M.       | f calculado | F tabla    | Decisión |
|----------|------|------------|------------|-------------|------------|----------|
| A: Marca | 2    | 224.666667 | 112.333333 | 3.03603604  | 0.95238095 | Rechaza  |

|          |   |            |            |            |            |         |
|----------|---|------------|------------|------------|------------|---------|
| B: Sabor | 2 | 308.666667 | 154.333333 | 4.17117117 | 0.95238095 | Rechaza |
| T: Horno | 2 | 380.666667 | 190.333333 | 5.14414414 | 0.95238095 | Rechaza |
| Error    | 2 | 74         | 37         |            |            |         |
| Total    | 8 | 988        |            |            |            |         |

Como en los tres casos se rechaza la hipótesis nula de que los efectos de los factores sean cero, se realizó una prueba LSD a cada factor para determinar cuáles de los posibles diferentes pares de medias pudiesen resultar iguales estadísticamente, determinando con ello una jerarquía de los niveles en cada tratamiento de mejor a peor.

I. LSD para la marca.

| $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ | Diferencias | LSD        | Decisión |
|-------------------------|-------------|------------|----------|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ | 1.66666667  | 4.77656083 | Acepta   |
| $\bar{x}_2 - \bar{x}_3$ | 9.66666667  | 4.77656083 | Rechaza  |
| $\bar{x}_3 - \bar{x}_1$ | 11.33333333 | 4.77656083 | Rechaza  |

II. LSD para el sabor.

| $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ | Diferencias | LSD         | Decisión |
|-------------------------|-------------|-------------|----------|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ | 1.66666667  | 14.33333333 | Rechaza  |
| $\bar{x}_2 - \bar{x}_3$ | 9.66666667  | 6.66666667  | Rechaza  |
| $\bar{x}_3 - \bar{x}_1$ | 11.33333333 | 7.66666667  | Rechaza  |

III. LSD para el horno.

| $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ | Diferencias | LSD         | Decisión |
|-------------------------|-------------|-------------|----------|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ | 1.66666667  | 5.33333333  | Rechaza  |
| $\bar{x}_2 - \bar{x}_3$ | 9.66666667  | 10.33333333 | Rechaza  |
| $\bar{x}_3 - \bar{x}_1$ | 11.33333333 | 15.66666667 | Rechaza  |

• Conclusiones

Según las pruebas LSD en los factores sabor y horno todos los posibles pares de medias se consideran estadísticamente diferentes, en tanto que en la marca sólo Act II y Cinépolis son iguales, quedando ambas con una mayor cantidad de granos sin cocinar que las que presenta la marca Great Value.

Por lo que de acuerdo a la siguiente tabla de medias

| Marca       | Promedio   | Sabor       | Promedio   | Horno | Promedio   |
|-------------|------------|-------------|------------|-------|------------|
| Act II      | 30         | Natural     | 33         | A     | 18.6666667 |
| Cinépolis   | 28.3333333 | Mantequilla | 18.6666667 | B     | 24         |
| Great Value | 18.6666667 | Extra       | 25.3333333 | C     | 34.3333333 |

Podemos deducir que es más óptimo adquirir palomitas de la marca económica Great Value, pues estadísticamente difiere de las otras dos marcas y deja una menor cantidad de granos sin cocinar.

En cuanto al sabor la opción resulta ser el de mantequilla, y en nuestro factor de interés que es el horno es mejor la opción A, es decir, cocinar las palomitas a la máxima potencia, aun considerando el riesgo de que quedasen algunas palomitas quemadas.

- Referencias

Gutiérrez Pulido, Humberto; De la Vara Salazar, Román. (2008). *Análisis y diseño de experimentos*. Ciudad de México, México. McGraw-Hill.

Marín, E. (2 de febrero de 2017). *Vix. Por qué algunos granos de maíz no llegan a convertirse nunca en palomitas*. Recuperado de <http://es.gizmodo.com/por-que-algunos-granos-de-las-palomitas-de-maiz-no-expl-1792357270>

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 7

### CANTIDAD DE AZUCAR EN DISTINTOS TIPOS DE REFRESCOS

Jatzeny Barraza Valdez, Carlos Omar Silva Aguirre.

Asesor: Saúl Nevárez Nieto

*jat-01@hotmail.com*

Facultad de Ciencias Exactas

*jat-01@hotmail.com, cradle\_kako@hotmail.com*

Licenciatura

Palabra Clave: azúcar, ANOVA, hipótesis, refrescos, LSD

#### RESUMEN

En este trabajo, se realiza una investigación para determinar la cantidad de azúcar que contienen cuatro diferentes tipos de refrescos ya que es un producto muy consumido en nuestro país y es alarmante por las consecuencias que se producen al ingerirlo tanto. La práctica se realiza a partir de un experimento en casa y con la ayuda del análisis de varianza (ANOVA) de un factor para comparar los resultados obtenidos en dicha práctica.

#### INTRODUCCIÓN

Consumir con frecuencia bebidas azucaradas contribuye al exceso de peso, aumentando el riesgo de desarrollar obesidad, diabetes, enfermedades cardiovasculares, y algunos tipos de cáncer. La organización Mundial de la Salud (OMS) recomienda que la ingesta de azúcares libres debería reducirse a lo largo de la vida.

En esta investigación se muestra como se utilizan herramientas matemáticas como es el análisis de varianza de un factor, la prueba de hipótesis y el método LSD que se llevaron a cabo mediante un software llamado Excel, para así poder facilitar más el procedimiento y todo tipo de cálculo que se tenga que llevar a cabo para llegar a un resultado adecuado.

#### MARCO TEÓRICO

En (Coca-cola journey, s.f.) se dice que The Coca-Cola Company es la empresa de bebidas más grande del mundo, ofrece más de 500 marcas a consumidores en más de 200 países. De sus 21 marcas valuadas en mil millones de dólares, 19 de ellas cuentan con opciones bajas o sin calorías para ayudar a las personas a moderar su consumo de azúcares añadidos. Además de las bebidas de Coca-Cola, entre sus marcas líderes en el mundo se encuentran las bebidas a base de soya AdeS, té verde Ayakata, guas Dasani, cafés y tés Gold Peak, Honest Tea, jugos Minute Maid, bebidas deportivas Powerade, jugos Simply, smartwater, y agua de coco Zico. En México, su portafolio ofrece casi 70 marcas, de las cuales cerca del 40% son bajas o sin calorías; además de contar con marcas desarrolladas localmente como Ciel, Fresca, Fanta, Sidral Mundet, Santa Clara, y Jugos Del Valle.

En (pepsico mexico, s.f.) Se menciona que PepsiCo es líder global en alimentos y bebidas con productos deliciosos y cada vez más saludables que incluye Frito-Lay, Gatorade, Pepsi-Cola, Quaker y Tropicana con ingresos de más de \$63 mil millones de dólares en 2016. El portafolio de productos de PepsiCo incluye una amplia variedad de deliciosos alimentos y bebidas, incluyendo 22 marcas que generan más de \$1 mil millones de dólares cada una en ventas anuales aproximadamente.



Los productos de PepsiCo son disfrutados por consumidores mil millones de veces al día en más de 200 países y territorios alrededor del mundo.

Pepsi es una de las marcas de consumo más emblemáticas y reconocidas del mundo. En la actualidad, el portafolio de Pepsi incluye tres productos: Pepsi, Diet Pepsi y Pepsi MAX, y cada uno genera más de \$1 mil millones en ventas anuales al por menor. Aprenda más acerca de nuestra marca más emblemática. Las marcas de Pepsi-Cola incluyen Pepsi, Mountain Dew, Sierra Mist, SoBe, AMP Energy, IZZE, Naked Juice, Propel Mug, y Aguafina, entre otros.

La información contenida en las bebidas mostraba las siguientes cantidades de azúcar por cada media porción (100 ml)

| Refresco         | Cantidad de Azúcar (gr) |
|------------------|-------------------------|
| Coca-Cola        | 10.5                    |
| Fanta de Naranja | 9.3                     |
| Mirinda          | 13                      |
| Pepsi            | 11.33                   |

(Alianza por la salud alimentaria, 2013) Un estudio realizado por investigadores de Harvard calculó que al año mueren en México 22020 personas a causa del consumo de bebidas azucaradas, lo que representa 12% de las muertes ocurridas en el mundo asociadas al consumo de bebidas azucaradas.

Las principales causas de que tomar bebidas azucaradas ponga en riesgo la vida de sus consumidores son las siguientes:

1. Las bebidas azucaradas contienen únicamente azúcares añadidos. Estos son los azúcares que se añaden de manera artificial a los alimentos o bebidas.
2. A diferencia de los alimentos sólidos las bebidas azucaradas no generan saciedad, porque tu cerebro no las percibe. Si acostumbras a consumir estas bebidas entre comidas, el consumo de calorías durante la siguiente comida será igual que si no hubieras bebido el refresco o jugo, incrementando tu riesgo de padecer obesidad.
3. A diferencia del azúcar natural que contienen las frutas o la leche, por ejemplo, el azúcar añadido no proporciona otros nutrientes como vitaminas, minerales, fibras, proteínas etcétera. Estas bebidas contienen calorías vacías, esto es que las bebidas aportan mucha energía, pero ningún nutriente.

(Organización mundial de la salud, 2015) Los datos de que se dispone indican que la ingesta de azúcares libres en niños y adultos se debería reducir a menos del 10% de la ingesta calórica total, que equivale a 50 gramos (o unas 12 cucharaditas rasas) en el caso de una persona con un peso saludable que consuma aproximadamente 2000 calorías al día; para obtener mayores beneficios para la salud, esa cantidad debería ser inferior al 5%. Por azúcar libre se entienden todos los azúcares que los fabricantes, los cocineros o los propios consumidores añaden a los alimentos o las bebidas que se van a consumir, así como azúcares presentes de forma natural en la miel, los jarabes, y los zumos y concentrados de frutas.

## MODELO ESTADÍSTICO E HIPÓTESIS DE INTERÉS.



(presentacion pdf) El *análisis de varianza*, o de manera breve ANOVA, tiene que ver con el análisis de datos muestreados de más de dos poblaciones numéricas o de datos de experimentos en los que se han usado más de dos tratamientos; el más simple se conoce como ANOVA de un solo factor, de una sola clasificación o unidireccional.

El ANOVA de un solo factor se centra en la comparación de más de dos medias poblacionales o de tratamiento. Sea

$I$  = número de muestras comparadas.

$\mu_1$  = media de la población 1.

:

$\mu_I$  = media de la población  $I$ .

Las hipótesis de interés son:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$$

contra

$H_1$ : por lo menos dos de las  $\mu_i$  son diferentes

Si  $I = 4$ ,  $H_0$  es verdadera solo si las 4  $\mu_i$  son idénticas.  $H_1$  sería verdadera, por ejemplo, si

$$\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 = \mu_4,$$

si

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 \neq \mu_2$$

o si las 4  $\mu_i$  son diferentes entre sí.

Una prueba de estas hipótesis requiere que se tenga disponible una muestra aleatoria de cada población o tratamiento.

Usaremos la siguiente notación:

-Se denotará por  $I$  al número de muestras.

- $J$  será el número de individuos en cada muestra.

- $x_{ij}$  denota la medición  $j$ -ésima en la muestra  $i$ -ésima.

- $\bar{x}_i$  será la media de cada muestra,  $i = 1, \dots, I$ .

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij}}{J}, i = 1, \dots, I$$

$\bar{x}$  será la media global o la gran media.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}}{IJ}$$

*Suma de cuadrados*

La suma total de los cuadrados (STC), la suma de los cuadrados del tratamiento (SCT) y la suma de los cuadrados del error (SCE) están dadas por

$$STC = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x} \dots)^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{IJ}$$

$$STC = J \sum_{i=1}^I (\bar{x}_{i.} - \bar{x} \dots)^2 = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I x_{i.}^2 - \frac{x_{..}^2}{IJ}$$

$$SCE = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$$

Donde  $x_{i.} = \sum_{j=1}^J x_{ij}$  y  $x_{..} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}$

Otra fórmula para calcular la STC está dada de la siguiente forma

$$STC = SCT + SCE$$

Por consiguiente, si se calculan dos de las sumas de cuadrados, la tercera se puede obtener por medio de la ecuación anterior.

Las sumas de cuadrados divididas entre sus respectivos grados de libertad se llaman cuadrados medios. Los dos que más interesan son el cuadrado medio de tratamientos y el cuadrado medio del error, que se denotan por

$$CMT_r = \frac{STC}{I - 1}$$

$$CME = \frac{SCE}{I(J - 1)}$$

El estadístico de contraste para realizar la prueba ANOVA se construye de la forma siguiente:

$$F = \frac{CMT_r}{CME}$$

Que se distribuye según una F-fisher con  $I - 1$  grados de libertad del numerador y  $I(J - 1)$  grados de libertad del denominador.

La región de rechazo será  $F \geq F_{\alpha, I-1, I(J-1)}$ .

Todos estos cálculos se resumen en una tabla, llamada tabla de ANOVA, la cual es la siguiente:

|                    | GRADOS DE LIBERTAD | SUMA DE CUADRADOS | CUADRADO MEDIO   | F                   |
|--------------------|--------------------|-------------------|------------------|---------------------|
| <b>TRATAMIENTO</b> | I-1                | SCT               | CMT <sub>r</sub> | $\frac{CMT_r}{CME}$ |
| <b>ERROR</b>       | I(J-1)             | SCE               | CME              |                     |
| <b>TOTAL</b>       | IJ-1               | STC               |                  |                     |

*Método LSD.* Una vez que se rechazó  $H_0$  en el ANOVA, el problema es probar la igualdad de todos los posibles pares de medias con la hipótesis

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$



$$H_1: \mu_i \neq \mu_j$$

para toda  $i \neq j$ .

Para  $k$  tratamientos se tiene que el estadístico de prueba para cada una de las hipótesis dadas es la correspondiente diferencia en valor absoluto entre sus medias muestrales

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$$

Se rechaza la hipótesis  $H_0$  si ocurre que

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > t_{\frac{\alpha}{2}, I(J-1)} \sqrt{CME \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = LSD$$

Donde  $n_i$  y  $n_j$  son el número de observaciones para los tratamientos  $i$  y  $j$  respectivamente.

La cantidad LSD se llama diferencia mínima significativa, ya que es la diferencia mínima que debe existir entre dos medias muestrales para considerar que los tratamientos correspondientes son significativamente diferentes. Note que, si el diseño es balanceado, es decir, si  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$  la diferencia mínima significativa se reduce a:

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2}, I(J-1)} \sqrt{\frac{2CME}{n}}$$

*Prueba de hipótesis.* El propósito de la prueba de hipótesis es ayudarnos a tomar una decisión acerca de una población mediante el análisis de una muestra. Por medio de la prueba de hipótesis se determina si tales proposiciones son compatibles o no con los datos disponibles.

Una hipótesis estadística es una afirmación o conjetura acerca de una o más poblaciones.

En la práctica se toma una muestra aleatoria de la población de interés y se utilizan los datos que contiene tal muestra para proporcionar evidencias que confirmen o no la hipótesis. Si la evidencia de la muestra es inconsistente con la hipótesis planteada, entonces ésta se rechaza y si la evidencia apoya a la hipótesis planteada, entonces se acepta ésta.

La estructura de una prueba de hipótesis consiste en la formulación de una hipótesis nula, es decir, es la afirmación que se supone al principio como cierta ("creencia previa"), se denota por  $H_0$ . El rechazo de  $H_0$ , genera la aceptación de una hipótesis alternativa, que se denota por  $H_1$ .

Para tomar una decisión acerca de un parámetro es necesario una prueba estadística para cuantificar esta decisión. Esta prueba estadística mide qué tan cerca de la hipótesis nula se encuentra el valor de la muestra y suele seguir una distribución estadística conocida (normal, t-student, ji cuadrado).

La distribución apropiada de la prueba estadística se divide en dos regiones:

- a) región de rechazo (región crítica).
- b) región de no rechazo.

Esquema para realizar una prueba de hipótesis acerca de un parámetro  $\theta$ .

1. Plantear la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

- a)  $H_0: \theta \leq \theta_1, H_1: \theta > \theta_1$ .
- b)  $H_0: \theta \geq \theta_1, H_1: \theta < \theta_1$ .
- c)  $H_0: \theta = \theta_1, H_1: \theta \neq \theta_1$ .
2. Seleccionar el test estadístico o estadístico de prueba.
  3. Fijar  $\alpha$  (0.05, 0.01, 0.10).
  4. Construir la regla de decisión o región crítica con el valor elegido de  $\alpha$ .
  5. Extraer una muestra aleatoria de tamaño  $n$  y calcular el valor del test estadístico.
  6. Si el valor calculado del test estadístico cae en la región crítica rechazar  $H_0$ , en caso contrario no rechazar  $H_0$  y concluir que la muestra aleatoria no proporciona evidencia para rechazarla.

Hipótesis nula  $H_0: \mu = \theta_1$

Valor del estadístico de prueba  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

| Hipótesis alternativa | Región de rechazo para el nivel $\alpha$                              |
|-----------------------|---|
| $\mu > \theta_1$      | $Z \geq Z_\alpha$   |
| $\mu < \theta_1$      | $Z \leq -Z_\alpha$  |
| $\mu \neq \theta_1$   | $Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } Z \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ |

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Objetivos:

- 1.- Comparar los resultados obtenidos en la práctica con ayuda del análisis de varianza (ANOVA) de un factor.
- 2.- Determinar cuál de los refrescos analizados es el que contiene más azúcar.
- 3.- Comparar los resultados que se obtuvieron para cada refresco con los valores originales que vienen indicados en la etiqueta de la bebida, para determinar si son iguales las cantidades de azúcar.

*Justificación:* Se pretende dar a conocer que cantidad de azúcar contiene, es muy conveniente ya que esta investigación podría ayudar a los estudiantes y a la sociedad en general a conocer mejor sobre el límite de cantidad que se puede consumir diariamente para así llevar una vida más sana.

*Alcances y limitaciones:* Este trabajo solamente se analizaron 5 tipos de refrescos diferentes y como se pretende comparar medias mediante tablas ANOVA, el experimento sólo se realizó con dos latas de cada tipo debido al alto costo que tiene este producto.

El proyecto no causó problemas ya que la práctica se llevó a cabo en la casa de uno de los integrantes del equipo y el material para realizar dicha práctica era solo un sartén para calentar los refrescos y una báscula para pesar el residuo y por otra parte el tema expuesto se nos facilitó comprenderlo gracias a la ayuda del asesor.

## METODOLOGÍA

La metodología está integrada por cuatro secciones:

5. Tipología del estudio.
6. Técnicas y procedimientos para recopilar la información necesaria.
7. Técnicas para analizar la información obtenida.

*Tipología del estudio:* La investigación es de tipo documental ya que se obtiene la información de fuentes bibliográficas. También es explicativa debido a que enuncia las causas y consecuencias al consumir cierta cantidad de azúcar al tomar estos refrescos.

*Técnicas y procedimientos para recopilar la información:* Las técnicas que se utilizan para adquirir la información necesaria en esta investigación son la consulta bibliográfica, la revisión documental y la observación ya que recolecta la información de libros tanto físicos como electrónicos y de sitios oficiales de internet.

Para obtener las cantidades de azúcar de cada uno de los refrescos el primer paso fue tomar un recipiente y mediante una báscula determinar su peso, después se colocan en este recipiente 100 ml de refresco, en seguida se pone a hervir y al terminar, se pesa el recipiente junto con los residuos que quedan en él, y finalmente, a este resultado se le resta el peso que tiene originalmente el recipiente lo cual nos arroja la cantidad de azúcar del refresco con el cual se hizo el experimento; el procedimiento se repite para cada refresco.

*Técnicas para analizar la información obtenida:* Las técnicas de análisis de información que se utilizan en la investigación es el análisis de varianza (ANOVA) de un factor, en el cual todos los cálculos de dicho análisis en un software llamado Excel.

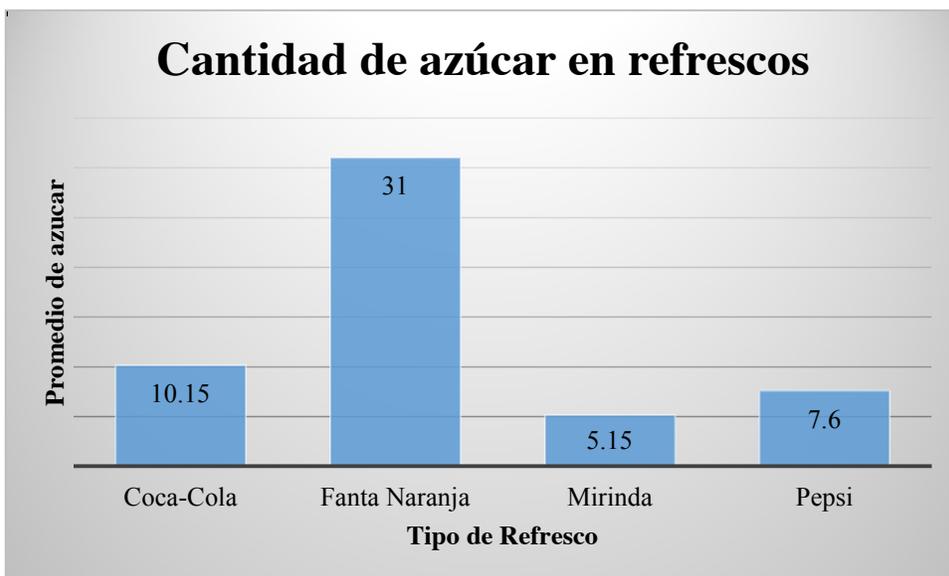
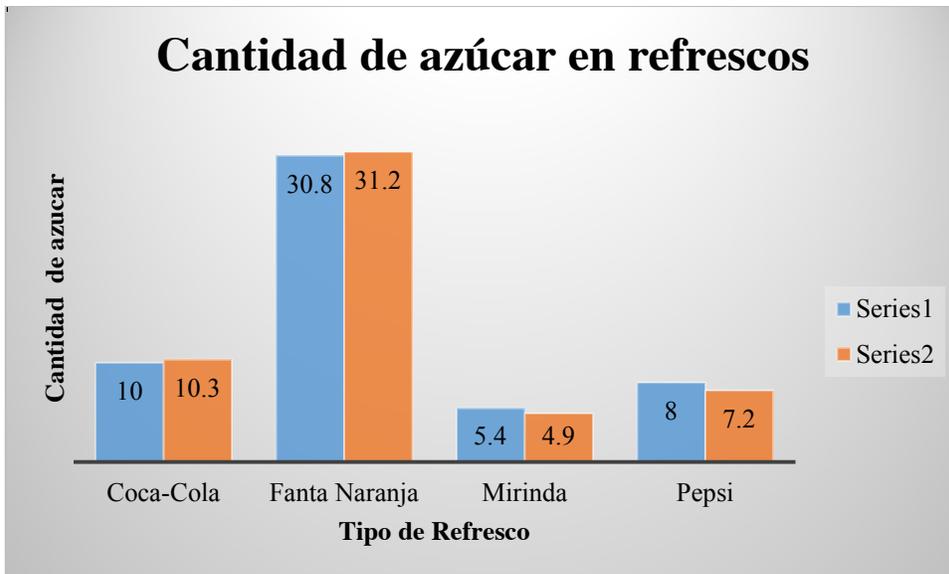
## RESULTADOS.

Se toman muestras de 100 mililitros de cada refresco para realizar el experimento y el resultado es el siguiente:

| Tipo de refresco | Cantidad de azúcar en gramos (refresco 1) | Cantidad de azúcar en gramos (refresco 2) | $\mu_1$ |
|------------------|---|---|---------|
| Coca-Cola        | 10  | 10.3                                      | 10.15   |
| Fanta Naranja    | 30.8                                      | 31.2                                      | 31      |
| Mirinda          | 5.4                                       | 4.9                                       | 5.15    |
| Pepsi            | 8   | 7.2                                       | 7.6     |

Gran Media: 13.475 gr.

Gráficamente se observa los resultados del experimento de la siguiente manera:



Al realizar el análisis de varianza, los cálculos efectuados se resumen en la siguiente tabla:

ANOVA

|             | GL | Suma de cuadrados | Cuadrado medio | F         |
|-------------|----|-------------------|----------------|-----------|
| Tratamiento | 3  | 844.005           | 281.335        | 1974.2807 |
| Error       | 4  | 0.57              | 0.1425         |           |
| Total       | 7  | 844.575           |                |           |

Las hipótesis planteadas son:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_4$$

$H_1$ : por lo menos dos de las  $\mu_i$  son diferentes

$$F_{0.05,3,4} = 6.26$$

$F \geq F_{0.05,3,4}$ , por lo tanto  $H_0$  se rechaza, es decir que al menos dos de las medias son diferentes.

Método LSD

Una vez que se rechaza  $H_0$  se prueba la igualdad de todos los posibles pares de medias con las hipótesis

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$

$$H_1: \mu_i \neq \mu_j$$

Para toda  $i \neq j$ .

El estadístico de prueba para cada una de las hipótesis dadas es  $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$ .

|               |             |       |
|---------------|-------------|-------|
| Coca-Cola     | $\bar{x}_1$ | 10.15 |
| Fanta Naranja | $\bar{x}_2$ | 31    |
| Mirinda       | $\bar{x}_3$ | 7.15  |
| Pepsi         | $\bar{x}_4$ | 7.6   |

$$t_{0.025,4} = 2.776$$

$$LSD=1.04$$

|                           |       |               |                  |
|---------------------------|-------|---------------|------------------|
| $ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 $ | 20.85 | $20.85 > LSD$ | Se rechaza $H_0$ |
| $ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 $ | 3     | $3 > LSD$     | Se rechaza $H_0$ |
| $ \bar{x}_1 - \bar{x}_4 $ | 2.55  | $2.55 > LSD$  | Se rechaza $H_0$ |
| $ \bar{x}_2 - \bar{x}_3 $ | 23.85 | $23.85 > LSD$ | Se rechaza $H_0$ |
| $ \bar{x}_2 - \bar{x}_4 $ | 23.4  | $23.4 > LSD$  | Se rechaza $H_0$ |
| $ \bar{x}_3 - \bar{x}_4 $ | 0.45  | $0.45 < LSD$  | Se acepta $H_0$  |

Prueba de Hipótesis

$$H_0: \mu = \theta_1$$

$$H_1: \mu \neq \theta_1$$

Para comparar la cantidad de azúcar en las etiquetas de los refrescos y la cantidad de azúcar en que se obtiene en cada refresco en el experimento se hace una prueba de hipótesis.

| Tipo de refresco | $\bar{X}$ | Estadístico de prueba t | $t_{\alpha/2,3}$ | Desiscion        |
|------------------|-----------|-------------------------|------------------|------------------|
| Coca-Cola        | 10.15     | -2.33                   | 3.182            | Se acepta $H_0$  |
| Fanta Naranja    | 31        | 108.5                   | 3.182            | Se rechaza $H_0$ |
| Mirinda          | 5.15      | -31.4                   | 3.182            | Se rechaza $H_0$ |

|       |     |       |       |                  |
|-------|-----|-------|-------|------------------|
| Pepsi | 7.6 | -9.32 | 3.182 | Se rechaza $H_0$ |
|-------|-----|-------|-------|------------------|

## CONCLUSIONES

EL refresco que contiene más azúcar según el experimento realizado es la Fanta Naranja con una cantidad promedio de 31 gramos de azúcar, comparándolo con la cantidad que indica la etiqueta de este refresco la diferencia es muy representativa, por lo que lo más conveniente para los consumidores sería no consumir este refresco. Al realizar la tabla ANOVA se llega al resultado de que  $H_0$  se rechaza, es decir que al menos dos de las medias son diferentes, luego se aplicó el método LSD para verificar cuales son las medias que difieren, en el cual se obtiene que todas las medias de los refrescos son diferentes entre sí, con excepción de la Mirinda y la Pepsi. Por otra parte al realizar la prueba de hipótesis, se llegó al resultado de que solamente la Coca-Cola es el único refresco que se asemeja a la cantidad de azúcar de su etiqueta con la cantidad que se obtiene en el experimento. Si posteriormente alguna persona desea realizar un estudio similar al que se presenta en este trabajo recomendaríamos que para obtener mejores resultados, se realice el experimento con más muestras y así obtener conclusiones más confiables.

## Referencias

- Alianza por la salud alimentaria. (10 de octubre de 2013). *alianzasalud.org*. Obtenido de <http://alianzasalud.org.mx/2013/10/las-bebidas-azucaradas-y-los-riesgos-a-la-salud/>
- Coca-cola journey. (s.f.). *coca-colamexico*. Obtenido de <http://www.coca-colamexico.com.mx/historia>
- Organizacion mundial de la salud. (septiembre de 2015). *who.int*. Obtenido de media centre: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs394/es/>
- pepsico mexico. (s.f.). *pepsico.com.mx*. Obtenido de <http://www.pepsico.com.mx/Quienes-Somos>
- presentacion pdf. (s.f.). *dropbox*. Obtenido de <https://www.dropbox.com/sh/fb6suie8tgq2c8j/AAAOPrjHvqDtXxboE1rqUU3Ia/Libros?dl=0&preview=Presentacion.pdf>

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 8

### EVALUACIÓN DE LA DENSIDAD FORESTAL EN LA ZONA ESTE DE LA SIERRA DE PUEBLA

L. M. A. Jesús Carreón Rodríguez<sup>1</sup>, Dr. Juan Antonio López Hernández<sup>2</sup>, Dra. Diana Barraza Barraza<sup>3</sup>, Dra. Rosa Angélica Zamora Ríos<sup>3</sup>, Dr. Mario Alberto García Meza<sup>3</sup>, M. C. Miguel García Alvarado<sup>3</sup>, [jescarod@gmail.com](mailto:jescarod@gmail.com)



<sup>1</sup> Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas, Estudiante de la Maestría en Estadística Aplicada, <sup>2</sup> Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Forestales, <sup>3</sup> Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas  
jescarod@gmail.com, juanant79@yahoo.com.mx, diana.barraza@ujed.mx, rzamora@ujed.mx,  
marius.agm@gmail.com, mignewton33@hotmail.com

### Maestría

Palabras clave: Inferencia estadística, muestreo, densidad forestal.

## RESUMEN

Se evaluó la composición y diversidad de especies forestales en bosques templados en la zona este del Estado de Puebla, registrándose información dasométrica de altura total (m), diámetro a la altura del pecho (cm) y cobertura de copa de ejemplares con un diámetro a la altura del pecho mayor o igual a 7.5 cm. Se cuantificó su densidad a través de cantidad de árboles por sitio experimental, con inferencia estadística, calcular la densidad por hectárea. La diversidad y la riqueza de especies se estimaron por género, familia y orden. Se obtuvieron 11 especies arbóreas. La familia con mayor riqueza fue Pinus, con seis especies, de las cuales *P. montezumae* y *A. religiosa* fueron las de mayor abundancia, 391 y 389 árboles, respectivamente.

## INTRODUCCIÓN

Los bosques proporcionan una gran variedad de beneficios naturales: purificación del aire, protección de cuencas hidrográficas y la conservación de la biodiversidad, siendo a la vez fuentes de alimento, fibra y medicina. Desempeñan un papel importante en el mantenimiento de la estabilidad del clima global ya que remueven grandes cantidades de dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) –un gas de efecto invernadero (GEI)– de la atmósfera a medida que crecen, almacenando el carbono en la biomasa de sus hojas, ramas, tallos y raíces. Almacenan grandes cantidades de CO<sub>2</sub> en la vegetación y el suelo, lo intercambian con la atmósfera mediante la fotosíntesis y la respiración, son fuentes de carbono atmosférico, radicando en ello la importancia de la conservación del bosque. De esta manera, los bosques juegan un rol principal no solo como factor de desarrollo de un país y de sus modelos de sostenibilidad, sino que adquieren protagonismo mundial por su probable reconocimiento como sumideros en los sistemas contables de los ciclos de carbono (Dauber *et al.*, 2002).

Los bosques y selvas del mundo son importantes para la sociedad en general por proveer consumos directos y materias primas industriales, por sus funciones ecológicas que disminuyen la erosión, eliminan el bióxido de carbono del aire, reducen el calentamiento del planeta, regulan el régimen de lluvias, favorecen la recarga de los acuíferos y preservan la biodiversidad de la flora y la fauna (FAO, 2011).

México forma parte de los 10 países mega diversos y con mayor superficie de bosques primarios en el mundo, se ubica en la cuarta nación en riqueza de especies (SEMARNAT, 2011). Tiene una superficie arbolada mayor de 64.8 millones de ha, de las cuales 52% corresponden a bosques templados (CONAFOR, 2012). Se distribuyen en la Sierra Madre Oriental, Sierra Madre Occidental y Sierra Madre del Sur. En este tipo de bosques predominan los del género *Pinus*, *Abies*, *Quercus*, *Juniperus* y bosques mesófilos de montaña (Granados *et al.*, 2007).



El objetivo del manejo forestal es asegurar la sustentabilidad de los bosques, garantizando de forma continua y sostenible los bienes y servicios que proveen (biodiversidad, captura de carbono, regulación del ciclo hídrico) y el aprovechamiento de bienes (leñas, madera). Sin embargo, el manejo forestal es muy complejo debido a la interacción de variables topográficas, edáficas y climáticas que influyen sobre la dinámica de la masa. En este escenario, es de utilidad la aplicación de herramientas estadísticas que permitan la descripción de los sitios de muestreo para detectar la posible deforestación, con la finalidad de realizar propuestas para llevar a cabo una reforestación planificada, lo cual contribuirá a la conservación de los bosques.

Los resultados que se presentan se han obtenido a partir de los datos recogidos en la red de Sitios Permanentes de Investigación Forestal (SPIS) del Estado de Puebla, establecidos en el año 2008 y remedidos en 2012 por prestadores de servicios técnicos forestales de la región, bajo la supervisión de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales del Estado de Puebla y personal del Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Campo Experimental Valle del Guadiana, Durango. Dichos trabajos fueron financiados por la Comisión Nacional Forestal (CONAFOR).

El objetivo principal de la red, que comenzó a instalarse en 2008, fue establecer un área experimental permanente de la que pudiera obtenerse información adecuada y suficiente para elaborar modelos de crecimiento (curvas de calidad de estación, tablas de producción, diagramas de manejo de la densidad, modelos dinámicos de rodal, modelos de árbol individual, etc.), además de otras herramientas silvícolas (tarifas de cubicación con clasificación de productos, ecuaciones de biomasa, etc.) de apoyo para la gestión forestal de los bosques del estado de Puebla.

## MARCO TEÓRICO

Un bosque es un área de tierra que tiene una dimensión mínima de 0.5-0.1 ha, una cubierta de la copa de los árboles mayor a 10-30%, y árboles con un potencial para alcanzar una altura mínima de 2-5 metros en la madurez. Los bosques cubren aproximadamente el 30% del área total del planeta, o cerca de 4 mil millones de hectáreas, y crecen en variedad de formas, tamaños y densidades (Walquer *et al.*, 2011).

El aprovechamiento de los bosques templados en el Estado de Puebla se ha realizado en dos directrices; la primera se refiere al sistema administrativo de manejo aplicado por las empresas concesionadas por el gobierno federal para extraer el potencial maderable de los bosques templados de la región. La segunda directriz es el esquema técnico implementado por estas empresas, que estuvo centrado en el Método Mexicano de Ordenación de Montes (MMOM), que fue establecido como norma para aprovechar los bosques templados no solo de la región sino de todo el país desde mediados de los cuarenta (Cuanalo *et al.*, 1987). En las últimas décadas, el Método Mexicano de Ordenación de Bosques Irregulares (MMOBI) y el Método de Desarrollo Silvícola (MDS), han sido los métodos de ordenamientos forestal más utilizados. El MMOBI se utiliza en áreas donde factores como el topográfico y el de situaciones de protección ecológica especiales (áreas protegidas), son limitantes para la utilización de técnicas intensivas. El MDS tiene como objetivo captar el máximo potencial productivo del suelo, mediante el uso de técnicas silvícolas adecuadas y lograr un rendimiento sostenido (en volumen y en productos) por medio del concepto de bosque normal regular.

El crecimiento es un cambio gradual en el tiempo de un ser vivo a través de un proceso natural fisiológico definido y una curva de crecimiento. El crecimiento de los árboles o masas forestales están representados por su propio desarrollo, mismo que puede ser referido a la altura, diámetro o volumen, conforme un árbol o una masa se desarrolla, en relación a un lapso de tiempo determinado (Alemán, 2001). La mayoría de los estudios de crecimiento están basados en las características del sitio, incluyendo el conjunto de factores ambientales. La superficie terrestre y la atmósfera reflejan la energía solar que llega en forma de radiación de onda corta y es enviada al espacio en forma de radiación infrarroja de onda larga. Dichas radiaciones son absorbidas por los gases de efecto invernadero impidiendo que la energía pase directamente de la superficie terrestre al espacio (SEMARNAT, 1998).

Debido a que estos factores se presentan a escalas temporales, el enfoque de investigación ecológica de largo plazo y el desarrollo de un plan de monitoreo forestal permanente son importantes (Valles y Quiñones, 2004). El monitoreo forestal, a través del establecimiento y remediación de SPIS constituyen una fuente de información importante en manejo e investigación forestal para estudiar la ecología y dinámica natural de las masas forestales y conocer los efectos del aprovechamiento de los bosques (Kleinn y Morales, 2002). Esta información permite conocer la dinámica de crecimiento de las poblaciones forestales con diferentes regímenes de manejo, caracterizar adecuadamente el ecosistema, predecir el incremento de los bosques y desarrollar técnicas de manejo sustentable (Manzanilla, 1980; Alder y Sinnott, 1992; Valles y Quiñones, 2004; Diéguez, 2009; Corral *et al.*, 2009). Además de apoyar la toma de decisiones de los inversionistas en manejo de bosques o plantaciones forestales (Kleinn y Morales, 2002).

En base a este contexto es imprescindible tener un amplio conocimiento de la estructura, la distribución de las diferentes especies forestales que están localizadas en el bosque (Gadow, 2012). La biodiversidad contempla toda clase de variedad natural, diversidad de comunidades a nivel paisaje, entre comunidades y especies dentro de una misma comunidad (Del Río *et al.*, 2003), por lo que la diversidad de especies es un aspecto muy importante para el manejo forestal y la conservación. Los índices de diversidad y estructura son herramientas que apoyan la toma de decisiones en el manejo de áreas boscosas donde se observan procesos de sucesión natural y efectos antropogénicos. Un adecuado conocimiento de estos índices permitirá el establecimiento de rodales tipo como norma de conducción de acciones de manejo (Wehenkel *et al.*, 2014). Dichas áreas son especialmente importantes para conocer la estructura y el desarrollo de diferentes ecosistemas (Gadow, 1999).

La estructura arbórea es un indicador adecuado de la biodiversidad por lo que los árboles son los elementos más relevantes de la estructura del ecosistema forestal (Del Río *et al.*, 2003), y la estructura arbórea sirve para evaluar el status de un ecosistema, el cual cambia fácilmente al aplicar tratamientos silvícolas, cambiando la estructura del bosque (Hernández *et al.*, 2013). Lo que quiere decir, que la estructura actual de un bosque es el resultado de procesos que han ocurrido en el pasado y que han determinado la composición de especies, su distribución espacial y la frecuencia de tamaño de individuos dentro de poblaciones (Pham *et al.*, 2004). La estructura del bosque y su dinámica, está ligada con su estabilidad ante factores bióticos y abióticos, por lo que evaluar esta variable es importante para el manejo del sistema y la generación de servicios directos e indirectos (Del Río *et al.*, 2003).



La evaluación de masas forestales mediante indicadores de diversidad como la abundancia, dominancia y frecuencia de las especies, sirve para describir la relación de las especies de una población (Jiménez *et al.*, 2001). Estos indicadores se pueden determinar en diferentes ecosistemas forestales (Gavilán & Rubio, 2005).

Desde el punto de vista técnico, la gestión forestal requiere contar con información sobre la estructura, crecimiento, producción y regeneración natural, tanto de las especies de valor comercial, como de las que aún tienen un valor económico desconocido para detectar cambios en el estado de los mismos o para definir las prácticas que conduzcan a alcanzar un manejo sustentable (Aguirre *et al.*, 2008). Por ello el objetivo de este trabajo es evaluar la composición y diversidad de especies forestales en bosques templados en la zona este del estado de Puebla, con la finalidad de emitir recomendaciones que ayuden a preservar el entorno y las probables reforestaciones que ayuden a que esto suceda.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

La disminución de superficie arbolada en México, ha generado problemas ecológicos, económicos y sociales. Esta disminución es causada por aprovechamientos forestales mal planeados, modificación en el régimen del fuego, avance de la frontera agrícola, pastoreo, contaminación atmosférica, plagas y enfermedades forestales (López-Feldman, 2012). La importancia del conocer la composición de los recursos forestales, permitirá identificar las áreas de oportunidad para un mejor manejo del ecosistema, con la finalidad de, que una vez conocida la densidad, tener posibilidades de realizar de manera planificada las reforestaciones que sean requeridas, y mediante análisis posteriores incrementar el índice de supervivencia.

### **Objetivo general**

- Estimar la densidad del bosque templado en la zona este del Estado de Puebla.

### **Objetivos particulares**

- Determinar la composición de género predominantes en el bosque de la zona este del estado de Puebla.
- Determinar la diversidad de las especies forestales predominantes en el bosque de la zona este del estado de Puebla.

### **Hipótesis de investigación**

La densidad presente en las localidades muestreadas es igual a la densidad idónea establecida por CONAFOR.

### **Justificación**

A través del estudio, se pretende establecer la distribución natural de la densidad de las especies arbóreas en la zona este del estado de Puebla, permitiendo un mayor conocimiento del entorno forestal, con ello, elaborar mejores planes de manejo que permitan un mejor desarrollo de las condiciones ecológicas, y de manera importante, estar en posibilidades de implementar políticas públicas que regulen de manera estricta la conservación y equilibrio de los bosques.

### **Alcances y limitaciones**

La investigación se desarrolló en la zona este del estado de Puebla, en la región forestal Centro y Pico de Orizaba, perteneciente a la Unidad de Manejo Forestal con clave 2105 (Figura 1).

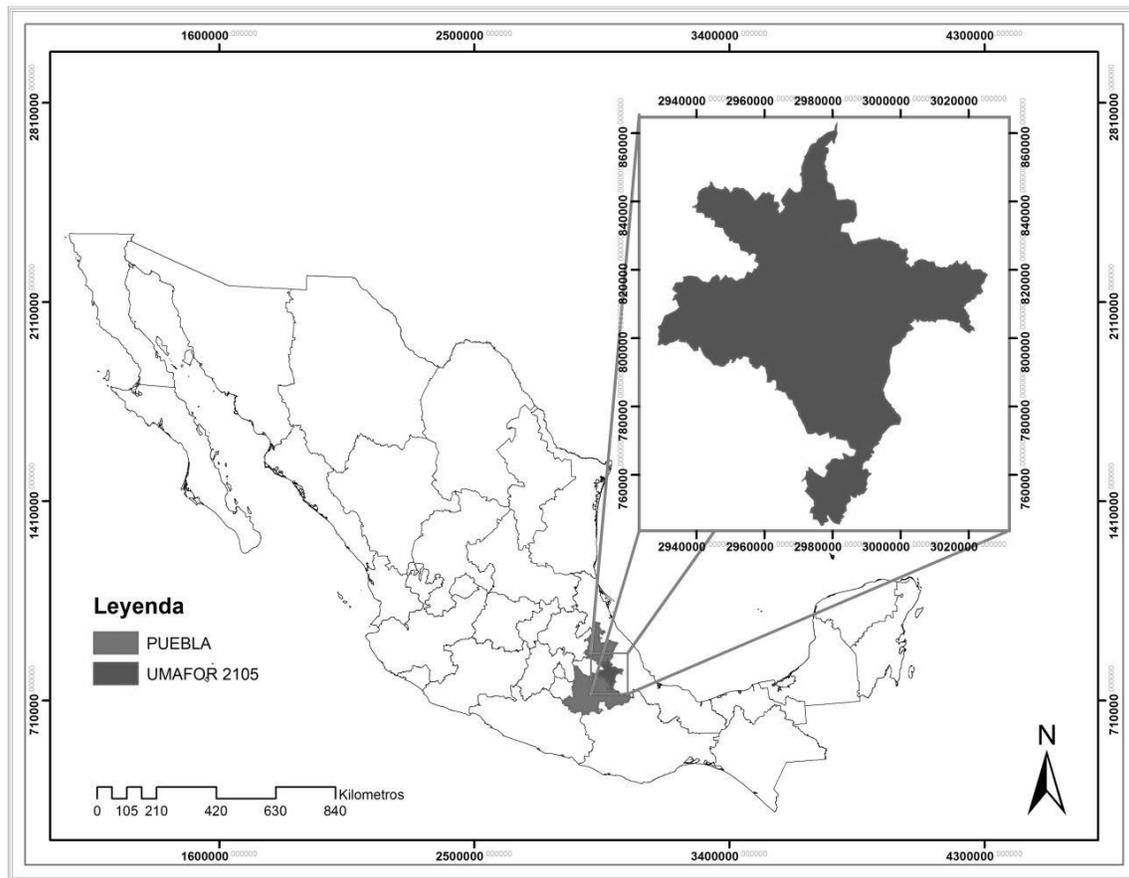


Figura 1. Localización del área de estudio que comprende la UMAFOR 2105, en Puebla.

La unidad de manejo forestal (UMAFOR 2105), se localiza al este del estado de Puebla colindando con el estado de Veracruz, al norte con Teziutlán, al sur con Tehuacán y al oeste con Cholula y Tecamachalco. En esta región existe variedad de climas, es la zona más fría del estado de Puebla, donde heladas y granizadas son frecuentes. La UMAFOR tiene una extensión total de 414,817.596 ha, es decir el 12.28% de la superficie total del Estado; comprende 22 municipios; por su ubicación geográfica, es una zona rica en biodiversidad, se tienen 7 ecosistemas forestales, predominando los de clima templado frío. El principal potencial es el aprovechamiento de recursos forestales maderables de clima templado frío, así como el aprovechamiento de especies no maderables como *Yuca periculosa*, *Nolina parviflora* y *P. cembroides*.

## METODOLOGÍA

El área de estudio está integrada por 45 sitios permanentes de investigación silvícola, establecidos mediante una planeación estratégica (Kohl *et al.*, 1995), distribuidos en 21 localidades del Estado. Se consideraron las condiciones ecológicas en que habitan las

especies forestales y su distribución. El centro del sitio se marcó en fotografías aéreas y se registraron coordenadas geográficas para facilitar su posterior localización.

Los sitios son de forma cuadrada de 50 x 50 m, con una parcela central de 30 x 30 m, y una franja de protección de 10 m en su perímetro. La parcela central se dividió en cuatro cuadrantes, los cuales se delimitan con estacas ubicadas en cada uno de los puntos cardinales norte, este, sur y oeste. En la parcela central de los sitios de monitoreo (30 x 30), se midieron todas las especies arbóreas con diámetro a la altura del pecho mayor o igual a 7.5 cm. A cada individuo se le realizaron mediciones dasométricas de altura total (h), diámetro normal 1.30 cm (DAP) y diámetro de copa (Valles y Quiñones, 2004).

La información se obtuvo mediante la medición de los árboles en los sitios de muestreo de las localidades, las variables a analizar fueron: árboles por sitio, medida del diámetro (Diámetro\_cm), la cual se mide con la corteza, a la altura del pecho sobre el terreno; la altura (Alt\_m) obtenida mediante varios instrumentos (la tabla dendrométrica, Blume-Leiss, Suunto, Haga, Relascopio Bitterlich) en varias etapas:

1. Distancia del árbol (a 15, 20, 30 ó 40 metros). Para evitar los errores de medición, la distancia desde el árbol debe ser equivalente a su altura.
2. Observación de la copa del árbol.
3. Observación de la base del árbol.
4. Adición o sustracción de los dos resultados de observación.
5. Corrección por pendiente

La información recabada se concentró en una base de datos elaborada por personal especializado en la región forestal previamente establecida. El diseño de muestreo aplicado fue estratificado. Esta técnica, perteneciente a la familia de muestreos probabilísticos, consiste en dividir toda la población objeto de estudio en diferentes subgrupos o estratos disjuntos, de manera que un individuo sólo puede pertenecer a un estrato.

### Análisis de la información

Se determinó la abundancia de cada especie en relación con el número de árboles; su cobertura, en función del área de copa; y su frecuencia con base en su presencia en los sitios de muestreo. Las variables evaluadas se utilizaron para obtener un valor ponderado denominado índice de valor de importancia (IVI), que adquiere valores porcentuales en una escala de 0 a 100 (Mostacedo y Fredericksen, 2000).

Para evaluar la contribución estructural de las especies respecto a la densidad en el área de estudio se utilizará la estimación de las siguientes variables estructurales: abundancia, cobertura, frecuencia e IVI. Las fórmulas para estos cálculos se describen a continuación:

$$A_i = \frac{N_i}{S} \qquad AR_i = \left( \frac{A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \right) * 100$$

Donde  $A_i$  es la abundancia absoluta,  $AR_i$  es la abundancia relativa de la especie  $i$  respecto a la abundancia total,  $N_i$  es el número de individuos de la especie  $i$ , y  $S$  la superficie de muestreo (ha).

Para calcular el tamaño de la muestra se usará la fórmula para poblaciones finitas y conocidas (Murray y Larry, 2009).

$$n = \frac{Z_{\alpha}^2 N p q}{i^2 (N - 1) + Z_{\alpha}^2 p q}$$

Donde:

- n: tamaño muestral
- N: tamaño de la población
- Z: nivel de confianza deseado.
- p: prevalencia esperada del parámetro a evaluar
- q: 1 – p
- i: error previsto

El muestreo aleatorio estratificado (MAE) está definido por la siguiente fórmula:

$$\frac{Z_{\alpha}^2 \sum_{h=1}^L W_h p_h (1 - p_h)}{e^2}$$

donde:

- L Es el número de estratos en que se particiona la muestra.
- p Es la proporción que se busca en el total de la población.
- e Es el margen de error aceptado.
- $W_h$  Es el peso que el  $h$ -ésimo estrato tiene en la muestra.

## PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### Cálculo de la muestra

La población consta de 14 localidades con 41 sitios de muestreo dentro de los cuales se distribuyen 1,555 árboles; se consideraron 13 variables. El cálculo de la muestra se determinó de acuerdo a la fórmula para tal efecto, considerando una población (N) de 45 sitios, una probabilidad de éxito (p) de 0.5, por lo que la probabilidad de fracaso (q) fue 1 – p = 0.5, un error de 0.1 con un nivel de confianza ( $\alpha$ ) = 95% dando como valor de Z = 1.96. Considerando estos datos el tamaño de muestra fue de 30.86118, es decir, 31 sitios de muestreo fueron los considerados para el análisis.

### Tipo de muestreo

De acuerdo al muestreo aleatorio estratificado, se obtuvieron las muestras de manera proporcional. El Cuadro 1 presenta la composición de la muestra por estrato. Dentro de la muestra se encontró la presencia de 1,010 árboles distribuidos en 11 especies (Cuadro 2). Se registraron 11 especies arbóreas (Figura 2), distribuidas en cinco géneros e igual número de familias, la familia con mayor riqueza en especies fue *Pinacea*, con seis especies *A. religiosa*, *P. hartwegii*, *P. montezumae* (var. *Rudis*), *P. greggii*, *P. pseudostrobus*, *P. rudis* (Cuadro 2).

Cuadro 1. Proporción de la muestra de acuerdo muestreo aleatorio estratificado

| Localidad | Sitios |
|-----------|--------|
|-----------|--------|

|                                | Total | %    | Muestra |
|--------------------------------|-------|------|---------|
| San Juan Arcos                 | 9     | 20%  | 6       |
| Miguel Hidalgo                 | 6     | 13%  | 4       |
| La Jícara                      | 2     | 4%   | 1       |
| San Martín Ojo de Agua         | 3     | 7%   | 2       |
| Predio Santa Ana               | 2     | 4%   | 1       |
| Texmalaquilla                  | 4     | 9%   | 3       |
| Ahuatepec del Camino           | 2     | 4%   | 2       |
| El Cajón                       | 5     | 11%  | 3       |
| La Mora                        | 2     | 4%   | 2       |
| La Predio de Joaquín Colombres | 1     | 2%   | 1       |
| Atzitzintla                    | 4     | 9%   | 3       |
| Barrio La Cuchilla             | 2     | 4%   | 1       |
| Las Cuevas                     | 1     | 2%   | 1       |
| Santa María Aserradero         | 2     | 4%   | 1       |
| Total general                  | 45    | 100% | 31      |

Cuadro 2. Distribución de árboles por nombre científico.

| Especie                     |                    | Orden              | Familia             | Árboles |       |
|-----------------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------|-------|
| Nombre científico           | Nombre común       |                    |                     | Cant.   | %     |
| <i>P. montezumae</i>        | Ocote              | <i>Pinales</i>     | <i>Pinaceas</i>     | 391     | 38.71 |
| <i>A. religiosa</i>         | Oyamel             | <i>Pinales</i>     | <i>Pinaceas</i>     | 389     | 38.51 |
| <i>P. hartwegii</i>         | Pino Hartwegii     | <i>Pinales</i>     | <i>Pinaceas</i>     | 120     | 11.88 |
| <i>Alnus jorulensis</i>     | Aile               | <i>Fagales</i>     | <i>Betuláceas</i>   | 38      | 3.76  |
| <i>P. pseudostrobus</i>     | Chamite            | <i>Pinales</i>     | <i>Pinaceas</i>     | 20      | 1.98  |
| <i>Q. laurina</i>           | Encino Blanco      | <i>Fagales</i>     | <i>Fagaceae</i>     | 17      | 1.68  |
| <i>Cupressus lusitanica</i> | Lindleyi           | <i>Pinales</i>     | <i>Cupressaceae</i> | 13      | 1.29  |
| <i>P. rudis</i>             | Pino rudis         | <i>Pinales</i>     | <i>Pinaceas</i>     | 12      | 1.19  |
| <i>Juniperus monticola</i>  | Sabino de Castilla | <i>Coniferales</i> | <i>Cupressaceae</i> | 5       | 0.50  |
| <i>Q. glabrescens</i>       | Encino             | <i>Fagales</i>     | <i>Fagaceae</i>     | 4       | 0.40  |
| <i>P. greggii</i>           | Pino Greggii       | <i>Pinales</i>     | <i>Pinaceas</i>     | 1       | 0.10  |
| Total general               |                    |                    |                     | 1,010   |       |

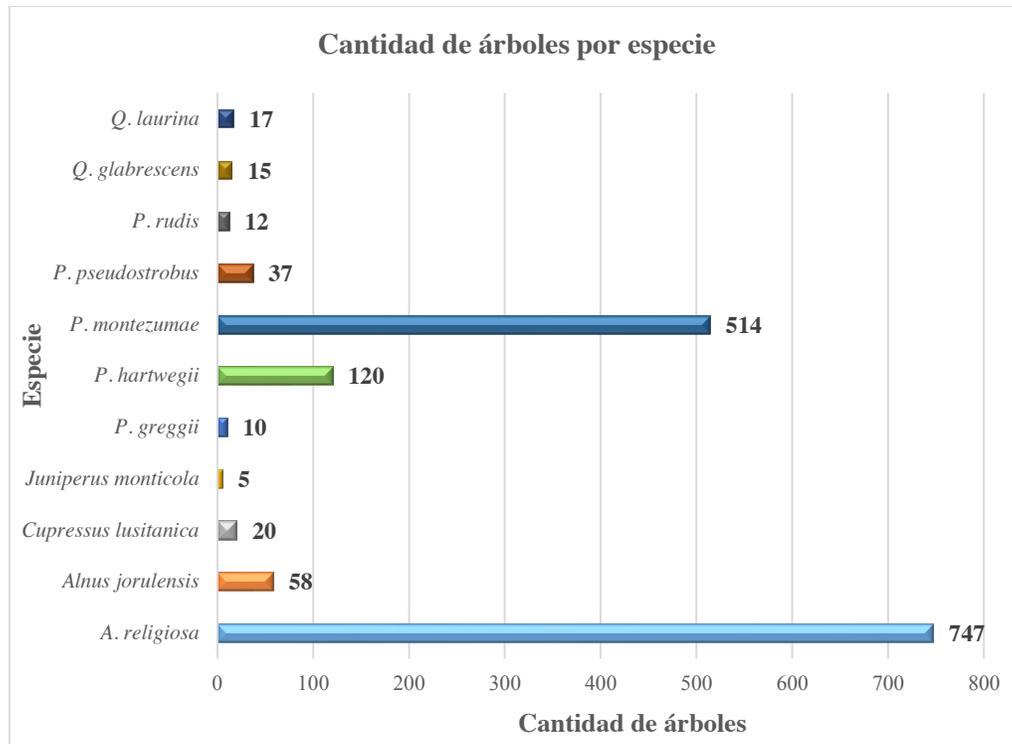


Figura 2. Distribución de árboles por especie

### Densidad

De acuerdo a la CONAFOR (2010), la densidad ideal depende de la forma del terreno (Cuadro 3), la distancia entre plantas varía de dos a cinco metros y la distancia que deben de tener entre hileras va de 1.732 a 4.33 m. Lo recomendable para reforestación es tres metros entre plantas y 2.598 entre hileras, es decir 1,100 p/ha, ello con la finalidad de garantizar una tasa de supervivencia de 50 a 55%, permitiendo a 600 árboles aproximadamente llegar a la edad adulta.

Cuadro 3. Densidad de acuerdo a la forma del terreno. Fuente CONAFOR.

| Distancia (m) entre |         | Densidad (p/ha) |
|---------------------|---------|-----------------|
| Plantas             | Hileras |                 |
| 2                   | 1.732   | 2,500           |
| 3                   | 2.598   | 1,100           |
| 4                   | 3.464   | 625             |

CONAFOR como la entidad reguladora en el sector forestal, determinó que la densidad es de 1,100 árboles por hectárea (a/ha), la localidad Predio de Joaquín Colombres presenta la mayor densidad, 833.33 a/ha, seguido de las localidades Ahuatepec del Camino, Las Cuevas, La Mora, Barrio La Cuchilla y La Jicara con 583.33, 577.78, 516.67, 511.11 y 500.00 a/ha en promedio, respectivamente (Cuadro 4).

Cuadro 4. Densidad por Localidad.

| Localidad                   | Árboles | Densidad (a/ha) |
|-----------------------------|---------|-----------------|
| Predio de Joaquín Colombres | 75      | 833.33          |

|                        |              |               |
|------------------------|--------------|---------------|
| Ahuatepec del Camino   | 105          | 583.33        |
| Las Cuevas             | 52           | 577.78        |
| La Mora                | 93           | 516.67        |
| Barrio La Cuchilla     | 46           | 511.11        |
| La Jícara              | 45           | 500.00        |
| Santa María Aserradero | 32           | 355.56        |
| Texmalaquilla          | 89           | 329.63        |
| San Martín Ojo de Agua | 58           | 322.22        |
| San Juan Arcos         | 168          | 311.11        |
| Miguel Hidalgo         | 105          | 291.67        |
| El Cajón               | 62           | 229.63        |
| Atzitzintla            | 58           | 214.82        |
| Predio Santa Ana       | 22           | 40.74         |
| <b>Total general</b>   | <b>1,010</b> | <b>401.26</b> |

### Composición de género

La densidad total muestra una superioridad en frecuencia por los géneros *Pinus* y *Abies* con 933 árboles que representa el 92.38% del total, los cuatro géneros restantes representan solo 7.62% (Cuadro 5).

Cuadro 5. Frecuencia de árboles por género.

| Género               | Árboles      |               |
|----------------------|--------------|---------------|
|                      | Cantidad     | %             |
| <i>Pinus</i>         | 544          | 53.86         |
| <i>Abies</i>         | 389          | 38.51         |
| <i>Alnus</i>         | 38           | 3.76          |
| <i>Quercus</i>       | 21           | 2.08          |
| <i>Cupressus</i>     | 13           | 1.29          |
| <i>Juniperus</i>     | 5            | 0.50          |
| <b>Total general</b> | <b>1,010</b> | <b>100.00</b> |

### Diversidad de especies

Las especies de mayor abundancia fue *P. montezumae* y *A. religiosa* con 391 y 389 árboles, respectivamente; los cuales al ser del género *Pinus* representan 83.60% de la totalidad de los árboles pertenecientes a este género (Cuadro 6).

Cuadro 6. Abundancia de árboles por localidad y especie.

| Localidad            | Especie              |                     |                         |                 |                         |                   |
|----------------------|----------------------|---------------------|-------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------|
|                      | <i>P. montezumae</i> | <i>A. religiosa</i> | <i>Alnus jorulensis</i> | <i>P. rudis</i> | <i>P. pseudostrobus</i> | <i>Q. laurina</i> |
| Ahuatepec del Camino |                      | 40                  |                         | 12              | 18                      | 17                |
| Atzitzintla          | 27                   | 29                  | 2                       |                 |                         |                   |
| Barrio La Cuchilla   |                      | 46                  |                         |                 |                         |                   |
| El Cajón             | 27                   | 33                  |                         |                 |                         |                   |
| La Jícara            | 42                   |                     |                         |                 |                         |                   |

|                        |     |     |    |    |    |    |
|------------------------|-----|-----|----|----|----|----|
| La Mora                | 92  |     |    |    |    |    |
| La Predio de Joaquín   | 75  |     |    |    |    |    |
| Colombres              |     |     |    |    |    |    |
| Las Cuevas             |     |     | 6  |    |    |    |
| Miguel Hidalgo         | 34  | 23  |    |    |    |    |
| Predio Santa Ana       |     | 22  |    |    |    |    |
| San Juan Arcos         | 40  | 103 | 23 |    | 2  |    |
| San Martín Ojo de Agua | 33  |     |    |    |    |    |
| Santa María Aserradero |     | 32  |    |    |    |    |
| Texmalaquilla          | 21  | 61  | 7  |    |    |    |
| Total general          | 391 | 389 | 38 | 12 | 20 | 17 |

Cuadro 6. Continuación.

| Localidad              | Especie                     |                            |                       |                   |                     | Total general |
|------------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------|-------------------|---------------------|---------------|
|                        | <i>Cupressus lusitanica</i> | <i>Juniperus monticola</i> | <i>Q. glabrescens</i> | <i>P. greggii</i> | <i>P. hartwegii</i> |               |
| Ahuatepec del Camino   | 13                          | 5                          |                       |                   |                     | 105           |
| Atzitzintla            |                             |                            |                       |                   |                     | 58            |
| Barrio La Cuchilla     |                             |                            |                       |                   |                     | 46            |
| El Cajón               |                             |                            |                       |                   | 2                   | 62            |
| La Jicara              |                             |                            | 1                     |                   | 2                   | 45            |
| La Mora                |                             |                            |                       | 1                 |                     | 93            |
| La Predio de Joaquín   |                             |                            |                       |                   |                     | 75            |
| Colombres              |                             |                            |                       |                   |                     | 75            |
| Las Cuevas             |                             |                            | 1                     |                   | 45                  | 52            |
| Miguel Hidalgo         |                             |                            |                       |                   | 48                  | 105           |
| Predio Santa Ana       |                             |                            |                       |                   |                     | 22            |
| San Juan Arcos         |                             |                            |                       |                   |                     | 168           |
| San Martín Ojo de Agua |                             |                            | 2                     |                   | 23                  | 58            |
| Santa María Aserradero |                             |                            |                       |                   |                     | 32            |
| Texmalaquilla          |                             |                            |                       |                   |                     | 89            |
| Total general          | 13                          | 5                          | 4                     | 1                 | 120                 | 1010          |

### Prueba de hipótesis

De acuerdo a la normatividad de CONAFOR, la densidad debe ser 1,100 a/ ha, al realizar la prueba de hipótesis para saber si la densidad de las localidades Ahuatepec del Camino y Miguel Hidalgo son iguales a las establecidas por la Comisión, se estableció que  $H_0: \mu_1 = 1,100$  y  $H_1: \mu_1 \neq 1,100$ , obteniendo los siguientes resultados:

| Localidad                   | $\mu$  | Estadístico | Valor para contrastar |
|-----------------------------|--------|-------------|-----------------------|
| Predio de Joaquín Colombres | 833.33 | 12.706      | 3.591                 |
| Miguel Hidalgo              | 291.67 | 3.182       | 15.397                |

Con los resultados del contraste se observa que para la localidad Predio de Joaquín Colombres en los dos sitios muestreados, no existe evidencia estadística suficiente para rechazar  $H_0$ , porque el valor a contrastar (3.591) es menor que el estadístico (12.706), lo que permite concluir que las medias son iguales, es decir, 833.33 es estadísticamente igual a 1,100. Por otra parte, la Localidad Miguel Hidalgo en tres sitios muestreados, existe información estadística suficiente para rechazar  $H_0$ , porque el valor a contrastar (15.397) es menor que el estadístico (3.182), lo que permite concluir que las medias son iguales, es decir, 291.67 es estadísticamente diferente a 1,100.

## CONCLUSIONES

Las características estructurales y de composición de un bosque natural son las principales variables que se deben tomar en cuenta en el manejo de los recursos forestales, con el fin de realizar un aprovechamiento sustentable del recurso. Los resultados obtenidos del análisis de datos de este estudio muestran que se encontraron 11 especies, las cuales se distribuyen en cinco géneros, la familia con mayor riqueza en especies fue *Pinaceae*, con seis especies *A. religiosa*, *P. hartwegii*, *P. montezumae* (var. *Rudis*), *P. greggii*, *P. pseudostrobus*, *P. rudis*.

El sitio con la densidad más cercana a la establecida por CONAFOR fue Predio de Joaquín Colombres con 833.33 a/ha, las 13 localidades restantes presentaron densidades menores a 600 a/ha, lo que representa un área de oportunidad para realizar un plan de reforestación.

El género con la frecuencia mayor fue *Pinus* y *Abies* con 92.38%, mientras que las especies de mayor abundancia fue *P. montezumae* y *A. religiosa* con 38.71 y 38.51% árboles. Éstas representan una fuente de ingresos muy importante por ser de las especies más utilizadas en la extracción de madera, el primero de ellos es un árbol de hasta 35 m y tronco de 80 cm, por lo que es utilizado en la construcción y como combustible.

La localidad Predio de Joaquín Colombres, al tener media estadísticamente igual a la establecida por CONAFOR, el resto de los sitios son susceptibles de reforestar mediante un plan estructurado.

## BIBLIOGRAFÍA

- Aguirre, O., Corral, J. J., Vargas, B., & Jiménez, J. 2008. Evaluación de modelos de diversidad-abundancia del estrato arbóreo en un bosque de niebla. *Rev. Fitotec. Mex.*, 31(3), 281-289.
- Alder D. y Synnott T.J. 1992. Permanent Sample Plot Techniques for Mixed Tropical Forest. *Tropical Forestry Papers 25*. Oxford Forestry Institute, Oxford.
- Albert, M. 1999. Analyse der eingriffsbedingten Strukturveränderung und Durchforstungsmodellierung in Mischbeständen. PhD Diss., Faculty of Forest Sciences, Univ. Göttingen, Germany. Hainholz Verlag.
- Aleman V.R. 2001. Evaluación de la calidad de sitio para cuatro especies de pino en el P.P Sierra de Nayar, municipio de Durango. Tesis para obtener el grado de Ingeniero en Ciencias Forestales. Durango, Dgo. UJED. Escuela de Ciencias Forestales. 80p.
- Cabrera, J., Motta, M. T., & Ortíz, R. 2001. Tendencias del mercado forestal y cálculo de rentabilidad: herramientas claves para el establecimiento de plantaciones forestales productivas (CORMADERA ed., pp. 137). Quito, Ecuador: OIMT-CORMADERA.

- Castellanos-Bolaños, J. F., Treviño-Garza, E. J., Aguirre-Calderón, Ó. A., Jiménez-Pérez, J., Musalem-Santiago, M., & López-Aguillón, R. 2008. Estructura de bosques de *Pinus patula* bajo manejo en Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. *Madera y Bosques*, 14(2), 51-63.
- Comisión Nacional Forestal (CONAFOR). 2012. Inventario Nacional Forestal y de Suelos, informe del 2004-2009. Primera edición. CONAFOR. Zapopan, Jalisco, México. 173 p.
- Corral-Rivas, J., O. Aguirre, J. Jiménez y S. Corral. 2005. Un análisis del efecto del aprovechamiento forestal sobre la diversidad estructural en el Bosque Mesófilo de Montaña “El Cielo”, Tamaulipas, México. *Investigaciones agrarias. Sistemas de Recursos Forestales* 14(2):217-228.
- Corral-Rivas, J., Vargas, L.B; Wehenkel, CH., O. Aguirre; Álvarez, G.J.G y Rojo A.A. 2009. Guía para el establecimiento de sitios de investigación forestal y de suelos en bosques del estado de Durango. Editorial de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Primera Edición 2009. p 71.
- Cuanalo, De la C. J., Villa, S.A.B., Castro, R.A. 1987. Cuarenta años de Administración Técnica en la Unidad Industrial de Explotación Forestal de San Rafael (1947-1987). UIEF de San Rafael. Boletín No. 13. San Rafael, México. 104p.
- Dauber E, Terán J, Guzmán R. 2002. Estimación de biomasa y carbono en bosques naturales de Bolivia. *Revista Forestal Iberoamericana* 1: 13–23
- Del Río, M., Montes, F., Cañellas, I., & Montero, G. 2003. Revisión: Índices de diversidad estructural en masas forestales. *Invest. Agrar: Sist. Recur. For.*, 12(1), 159-176. doi: 10.5424/795.
- Diéguez-Aranda U, Rojo Alboreca A, Castedo-Dorado F, Álvarez González J.G., Barrio-Anta M, Crecente-Campo F, *et al.* 2009. Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Xunta de Galicia, Santiago de Compostela, Spain; 2009. ISBN: 978-84-692-7395-1.
- FAO. 2011. *Situación de los bosques del mundo 2011*. Roma. [www.fao.org/docrep/013/i2000s/i2000s00.htm](http://www.fao.org/docrep/013/i2000s/i2000s00.htm).
- Franklin, J. F., Spies, T. A., Van Pelt, R., Carey, A. B., Thornburgh, D. A., Berg, D. R., & Bible, K. (2002). Disturbances and structural development of natural forest ecosystems with silvicultural implications, using Douglas-fir forests as an example. *Forest Ecology and Management*, 155(1), 399-423.

- Gadow, k. v., A. Rojo-Alboreca, J.G. Álvarez-González y R. Rodríguez Soalleiro. 1999. "Ensayos de crecimiento. Parcelas permanentes, temporales y de intervalo". Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales. Fuera de Serie, núm. 1. 229-310.
- García, O. 1994. Minimum data for forest plantation management. En: García, O., Martínez Millán, F.J. 1998. Seminario sobre modelos de crecimiento. Universidad Politécnica de Madrid.
- Gavilán, R. G., y Rubio, A. 2005. ¿Pueden los índices de diversidad biológica ser aplicados como parámetros técnicos de la gestión forestal? I Reunión sobre ecología, ecofisiología y suelos forestales, Pontevedra. <http://www.secforestales.org/web/images/stories/c20.pdf>.
- Granados, S. D., G. F. López R. y M. A. Hernández G. 2007. Ecología y silvicultura en bosques templados. Revista Chapingo. Serie Ciencias Forestales y del Ambiente 13(1):67-83.
- Hernández, J., Aguirre, O.A., Alanís, E., Jiménez, J., González, M.A. 2013. Efecto del manejo forestal en la diversidad y composición arbórea de un bosque templado del noroeste de México. Chapingo serie Ciencias Forestales y del Ambiente. 19(3):189-199.
- Jiménez, J., Aguirre, O., & Kramer, H. 2001. Análisis de la estructura horizontal y vertical en un ecosistema multicohortal de pino-encino en el norte de México. Invest. Agrar. Sist. Recur. For., 10(2), 355-366. doi: 10.5424/729.
- Kohl M., Ch. T. Scoott and A. Zingg. 1995. Evaluation of permanent sample surveys for growth and yield studies: a Swiss example. For. Ecol. Manage. 71: 187-194.
- López-Feldman, A. 2012. Deforestation in México: A preliminary analysis. University Library of Munich, Germany. López M.A., Velásquez-Mendoza J., Velásquez-Mendoza A., González-Romero V. y Cetina-Alcalá V.M. 1998. Estado nutrimental de Abies religiosa en una área con problemas de contaminación ambiental. Agrociencia Serie Recursos Naturales Renovables. 1: 53-59.
- Mostacedo, B. y Fredericksen, T.S. 2000. Manual de métodos básicos de muestreo y análisis en ecología vegetal. BOLFOR; Santa Cruz, Bolivia. 87p.
- Murray R. Spiegel y Larry J. Stephens. (2009). Estadística. 4ta edición. Mc Graw-Hill. México, D. F
- Oliver, C.D. y B.C. Larson. 1996. Forest Stand Dynamics. John Wuley & Sons. New York, USA. 520 p.
- Ozdemir, I., Ozkan, K., Mert, A., Ozkan, U. Y., Senturk, O., & Alkan, O. 2012. [Mapping forest stand structural diversity using RapidEye satellite data].
- Saravanan, S., Ravichandran, K., Balasubramanian, A., & Paneerselvam, K. 2013. Structure and floristic composition of tree diversity in Andaman tropical evergreen forest of middle Andaman, India. Indian Journal of Forestry, 36(2), 167-171.
- Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT). 2011. *Anuario estadístico de la producción forestal 2009*. México. <http://www.semarnat.gob.mx/temas/gestionambiental/forestalsuelos/Anuarios/>.

- Simula, M. 2001. Comercio y medio ambiente en la producción forestal (D. D. s. D. M. ambiente, Trans.) (2001 ed., pp. 45). Washington, D.C.: Inter-American Development Bank.
- Solís, M. R., Aguirre, C. Ó. A., Treviño, G. E. J., Jiménez, P. J., Jurado, Y. E., & Corral, R. J. 2006. Efecto de dos tratamientos silvícolas en la estructura de ecosistemas forestales en Durango, México. *Madera y Bosques*, 12(2), 49-64.
- Valles, G. A. G. y Quiñones, CH. A. 2004. Manual para el establecimiento de sitios permanentes de investigación silvícola (SPIS) en bosques naturales. Folleto Científico Núm. 22. CEVAG – INIFAP. SAGARPA. 36p.
- Walker, W., A. Baccini, M. Nepstad, N. Horning, D. Knight, E. Braun, y A. Bausch. 2011. Guía de Campo para la Estimación de Biomasa y Carbono Forestal. Versión 1.0. Woods Hole Research Center, Falmouth, Massachusetts, USA.
- Wehenkel, C., Corral-Rivas, J. J., & Gadov, K. V. 2014. Quantifying differences between ecosystems with particular reference to selection forests in Durango/Mexico. *Forest Ecology and Management*, 316, 117-124.

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 9

### AUTOCORRELACIÓN

José Feliciano Zamora Delfín, Asesor: Dr. Alejandra Soria Pérez, [ale\\_godel@hotmail.com](mailto:ale_godel@hotmail.com)  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
[chano-1@hotmail.com](mailto:chano-1@hotmail.com)

8º Semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas  
Palabras clave: Autocorrelación, Detección, Corrección

### RESUMEN

En este trabajo se estudiara si existe autocorrelación en una base de datos donde utilizaremos el software XLSTAT para recabar dicha información y obtener resultados más precisos. La base de datos a utilizar fue extraída de FEMSA que es una empresa de consumo líder en Latinoamérica y fundada en 1890, y en 126 años ha ido desarrollándose y participando en mercados mundiales, como es coca cola FEMSA y FEMSA comercio.

### INTRODUCCIÓN

La autocorrelación surge cuando los términos de error del modelo  $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$  no son independientes entre sí, es decir, cuando:  $E(u_i u_j) \neq 0$ . Para todo  $i \neq j$ . Entonces los errores estarán vinculados entre sí. Los estimadores Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) ayudan a encontrar los parámetros poblacionales en el modelo ya



mencionado, bajo esta circunstancia, dejan de ser eficientes. La autocorrelación generalmente aparece en datos de series de tiempo aunque también se presenta en el caso de una muestra de corte transversal.

### MARCO TEORICO

La información que se encuentra aquí en este documento fue recabada en (Gujarati & Porter, Econometria, 2010) y la base de datos se obtuvo de coca cola FEMSA, (Fomento Económico Mexicano, 1950) de dicha información se utilizaron como variables ingresos totales, costos de venta y gastos de operación representado en millones de pesos mexicanos.

### CAUSAS DE LA AUTOCORRELACIÓN

Entre las principales causas que hacen que aparezca la autocorrelación en una muestra tenemos las siguientes:

- Inercia. Cuando existen tendencias marcadas que influyen en los valores futuros de la serie.
- Sesgos de especificación. Cuando se elige mal la forma funcional o cuando se omiten variables, lo cual genera un comportamiento sistemático en el término estocástico.
- Tiempo de ajuste. Implica el tiempo que los agentes económicos deben tomar para procesar información de un período dado. Así un fenómeno sucedido en un período determinado puede impactar en uno o varios posteriores.
- Preparación de datos. En datos de corte transversal al “ordenar” los datos con respecto alguna variable (consumo ordenado de mayor a menor por la variable ingreso) puede introducir un proceso “aparentemente” autocorrelacionado.

### PROBLEMAS DE LA AUTOCORRELACIÓN

Con la presencia de autocorrelación los estimadores obtenidos con mínimos cuadrados ordinarios dejan de ser los mejores estimadores lineales insesgados (MELI), en el sentido que dejan de ser aquellos con varianza mínima, aun cuando sean insesgados.

En consecuencia se tendría como principales problemas:

- Estimadores poco eficientes.
- Invalidez de las pruebas de contraste usuales.

Ignorar el problema de la autocorrelación lleva a que las pruebas t y f dejen de ser válidas ya que muy probablemente arrojen conclusiones erradas. Debido a que la matriz de varianzas y covarianzas estarán erradas.

No se deben dejar de considerar ciertos aspectos al analizar el problema:

- En la práctica el  $p = \frac{E(u_t u_{t-1})}{var(u_{t-1})}$  no se conoce, por lo tanto hay que estimarlo y esto genera pérdidas de grados de libertad, el problema en muestras pequeñas es relevante si el  $\rho$  estimado es mayor a 0,3 cuando el proceso es autorregresivo de primer orden.



Entonces, según la hipótesis nula de que los resultados sucesivos (en este caso, residuos) son independientes, y si suponemos que  $N_1 > 10$  y  $N_2 > 10$ , el número de rachas está (asintóticamente) normalmente distribuido con

$$\text{Media: } E(R) = \frac{2N_1N_2}{N} + 1$$

$$\text{Varianza: } \sigma_R^2 = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N)}{(N)^2(N - 1)}$$

Si la hipótesis nula de aleatoriedad es sostenible, y según las propiedades de la distribución normal, debemos esperar que:

$$\text{Prob. } [E(R) - 1.96\sigma_R \leq R \leq E(R) + 1.96\sigma_R] = 0.95$$

Regla de decisión:

No rechace la hipótesis nula de aleatoriedad a 95% de confianza si  $R$ , el número de rachas, está en el intervalo de confianza anterior; rechace la hipótesis nula si la  $R$  estimada se encuentra fuera de estos límites.

#### CONTRASTE DE DURBIN WATSON:

Para detectar la presencia de autocorrelación en una serie de datos la prueba más utilizada y que es calculada en, prácticamente, todos los programas econométricos, es la de Durbin Watson. Para este fin se define el estadístico de la siguiente manera:

$$d = \frac{\sum_2^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})}{\sum_1^n (\hat{u}_t^2)}$$

| Hipótesis nula                              | Decisión     | Si                          |
|---|--------------|-----------------------------|
| No hay autocorrelación positiva             | Rechazar     | $0 < d < dL$                |
| No hay autocorrelación positiva             | Sin decisión | $dL \leq d \leq dU$         |
| No hay correlación negativa                 | Rechazar     | $4 - dL < d < 4$            |
| No hay correlación negativa                 | Sin decisión | $4 - dU \leq d \leq 4 - dL$ |
| No hay autocorrelación, positiva o negativa | No rechazar  | $dU < d < 4 - dU$           |

Qué hacer cuando hay autocorrelación:

1. Trate de averiguar si se trata de autocorrelación pura y no el resultado de una mala especificación del modelo.
2. Si se trata de autocorrelación pura, se puede utilizar una transformación apropiada del modelo original de manera que en el modelo transformado no se presente el problema de la autocorrelación (pura).
3. En muestras grandes se puede utilizar el método **Newey-West**(Gujarati & Porter, Econometría , 2010)para obtener los errores estándar de los estimadores de MCO.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tenemos una base de datos de la empresa FEMSA que nos muestra sus ingresos por año en millones de pesos, la cual se muestra a continuación. Dicha base será utilizada para ver si existe autocorrelación en los datos.

|                | <i>X1</i>             |                 | <i>X2</i>           |                  | <i>Y</i> |
|----------------|-----------------------|-----------------|---------------------|------------------|----------|
| Utilidad bruta | Utilidad de operación | Costo de ventas | Gastos de operación | Ingresos totales |          |
| 22,825         | 6,491                 | 27,283          | 16,334              | 50,108           |          |
| 22,297         | 6,090                 | 29,060          | 16,207              | 51,357           |          |
| 22,388         | 7,167                 | 27,145          | 15,221              | 49,533           |          |
| 18,877         | 5,644                 | 23,474          | 13,233              | 42,351           |          |
| 18,444         | 6,004                 | 21,495          | 12,440              | 39,939           |          |
| 16,915         | 4,908                 | 20,182          | 12,007              | 37,097           |          |
| 19,315         | 6,649                 | 21,427          | 12,666              | 40,742           |          |
| 17,934         | 5,467                 | 19,727          | 12,467              | 37,661           |          |
| 17,492         | 5,630                 | 19,058          | 11,862              | 36,550           |          |
| 15,758         | 4,504                 | 18,616          | 11,254              | 34,374           |          |
| 18,508         | 6,374                 | 21,059          | 12,134              | 39,567           |          |
| 19,585         | 5,825                 | 22,196          | 13,760              | 41,781           |          |
| 19,548         | 5,742                 | 21,886          | 13,806              | 41,434           |          |
| 17,897         | 4,809                 | 20,811          | 13,088              | 38,708           |          |
| 19,918         | 6,609                 | 23,322          | 13,309              | 43,240           |          |
| 17,575         | 5,063                 | 19,919          | 12,512              | 37,494           |          |
| 17,185         | 5,142                 | 19,075          | 12,043              | 36,260           |          |
| 15,548         | 4,074                 | 18,013          | 11,474              | 33,561           |          |
| 18,815         | 7,224                 | 21,045          | 11,591              | 39,860           |          |
| 16,986         | 5,487                 | 19,207          | 11,499              | 36,193           |          |
| 16,702         | 4,714                 | 19,593          | 11,988              | 36,295           |          |
| 15,204         | 4,314                 | 18,338          | 10,890              | 33,542           |          |
| 16,442         | 5,578                 | 19,648          | 10,864              | 36,090           |          |
| 13,915         | 4,334                 | 16,162          | 9,581               | 30,077           |          |
| 13,040         | 4,373                 | 15,348          | 8,667               | 28,388           |          |
| 11,783         | 3,817                 | 14,071          | 7,966               | 25,854           |          |
| 12,974         | 5,080                 | 15,017          | 7,894               | 27,991           |          |
| 12,129         | 4,249                 | 13,546          | 7,880               | 25,675           |          |
| 11,655         | 4,088                 | 13,522          | 7,567               | 25,177           |          |
| 10,715         | 3,518                 | 12,880          | 7,197               | 23,595           |          |
| 13,415         | 4,827                 | 15,617          | 8,588               | 29,032           |          |
| 12,064         | 3,959                 | 13,943          | 8,105               | 26,007           |          |
| 11,427         | 3,677                 | 12,757          | 7,750               | 24,184           |          |
| 10,443         | 3,305                 | 12,083          | 7,138               | 22,526           |          |
| 10,460         | 4,053                 | 12,292          | 6,407               | 22,752           |          |
| 9,396          | 3,194                 | 10,374          | 6,202               | 19,770           |          |
| 8,946          | 3,169                 | 9,598           | 5,777               | 18,544           |          |
| 8,271          | 2,818                 | 8,986           | 5,453               | 17,257           |          |
| 9,011          | 3,224                 | 9,350           | 5,787               | 18,361           |          |
| 8,475          | 2,896                 | 8,789           | 5,579               | 17,264           |          |
| 8,306          | 2,909                 | 9,066           | 5,397               | 17,372           |          |
| 7,550          | 2,436                 | 8,675           | 5,114               | 16,225           |          |
| 7,165          | 2,619                 | 8,008           | 4,546               | 15,173           |          |
| 6,835          | 2,347                 | 7,534           | 4,488               | 14,369           |          |
| 6,807          | 2,379                 | 7,301           | 4,428               | 14,108           |          |

|          |          |       |       |          |
|----------|----------|-------|-------|----------|
| 6,123    | 1,936    | 6,642 | 4,187 | 12,765   |
| 6,990    | 2,612    | 7,175 | 4,378 | 14,165   |
| 6,516    | 2,268    | 6,712 | 4,248 | 13,228   |
| 6,713    | 2,375    | 6,867 | 4,338 | 13,580   |
| 5,696    | 1,794    | 6,132 | 3,902 | 11,828   |
| 6,022    | 2,263    | 6,341 | 3,759 | 12,363   |
| 5,588    | 1,958    | 5,823 | 3,630 | 11,411   |
| 5,425    | 1,749    | 5,649 | 3,676 | 11,074   |
| 5,304    | 1,645    | 5,765 | 3,659 | 11,069   |
| 6,041    | 2,300    | 6,246 | 3,741 | 12,287   |
| 5,557    | 1,796    | 5,801 | 3,761 | 11,358   |
| 4,691    | 1,837    | 4,771 | 2,854 | 9,462    |
| 2,154.00 | 994.3    | 1,996 | 1,160 | 4,149.60 |
| 2,380.30 | 1,172.30 | 2,127 | 1,208 | 4,507.30 |
| 2,360.40 | 1,104.70 | 1,982 | 1,256 | 4,342.20 |
| 2,464.30 | 1,181.40 | 2,010 | 1,283 | 4,474.40 |
| 2,027.00 | 887.8    | 1,733 | 1,139 | 3,759.80 |
| 2,361.00 | 1,042.40 | 1,938 | 1,319 | 4,299.30 |
| 2,236.10 | 980.7    | 1,888 | 1,255 | 4,123.60 |
| 2,210.60 | 989.9    | 1,912 | 1,221 | 4,122.80 |
| 1,907.90 | 765.6    | 1,729 | 1,142 | 3,636.50 |
| 2,390.40 | 916.7    | 2,198 | 1,474 | 4,588.40 |
| 2,128.30 | 728.5    | 2,101 | 1,400 | 4,229.70 |
| 2,058.90 | 740.9    | 2,045 | 1,318 | 4,104.00 |
| 1,930.80 | 626.7    | 1,983 | 1,304 | 3,913.60 |
| 1,904.20 | 720.4    | 1,954 | 1,184 | 3,858.10 |
| 1,707.80 | 500.3    | 1,906 | 1,208 | 3,613.80 |
| 1,735.30 | 516.9    | 1,950 | 1,218 | 3,685.70 |
| 1,492.6  | 390.6    | 1,838 | 1,102 | 3,331    |
| 1,576.60 | 512.9    | 1,960 | 1,064 | 3,536.20 |
| 1,387.00 | 399.2    | 1,674 | 988   | 3,061.30 |
| 1,263.70 | 364.1    | 1,582 | 900   | 2,846.00 |
| 1,072    | 255      | 1,410 | 817   | 2,482    |
| 1,409.70 | 515.8    | 1,673 | 894   | 3,082.90 |
| 1,220.50 | 355.5    | 1,486 | 865   | 2,706.60 |
| 1,114.60 | 300.7    | 1,306 | 814   | 2,420.90 |
| 992      | 222      | 1,273 | 770   | 2,265    |

Ilustración 4: Tabla de datos FEMSA

## METODOLOGÍA

Se aplicara Método grafico para detectar la autocorrelación en los datos.

El supuesto de no autocorrelación del modelo clásico se relaciona con las perturbaciones poblacionales  $ut$ , las cuales no pueden observarse directamente. En su lugar disponemos de valores sustitutos, los residuos  $\hat{u}t$ , a partir del procedimiento usual MCO. Podemos graficar  $\hat{u}t$  respecto de  $\hat{u}t-1$ , es decir, el residuo en el tiempo  $t$  frente a su valor en el tiempo  $(t - 1)$ . Si los residuos no son aleatorios, debemos obtener gráficas similares a las que aparecen en *Ilustración 7*.

Tablas a utilizar para el cálculo de Durbin Watson

| n   | k' = 1         |                | k' = 2         |                | k' = 3         |                | k' = 4         |                | k' = 5         |                | k' = 6         |                | k' = 7         |                | k' = 8         |                | k' = 9         |                | k' = 10        |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|     | d <sub>L</sub> | d <sub>U</sub> |
| 6   | 0.390          | 1.142          | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 7   | 0.435          | 1.036          | 0.294          | 1.676          | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 8   | 0.497          | 1.003          | 0.345          | 1.489          | 0.229          | 2.102          | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 9   | 0.554          | 0.998          | 0.408          | 1.389          | 0.279          | 1.875          | 0.183          | 2.433          | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 10  | 0.604          | 1.001          | 0.466          | 1.333          | 0.340          | 1.733          | 0.230          | 2.193          | 0.150          | 2.690          | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 11  | 0.653          | 1.010          | 0.519          | 1.297          | 0.396          | 1.640          | 0.286          | 2.030          | 0.193          | 2.453          | 0.124          | 2.892          | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 12  | 0.697          | 1.023          | 0.569          | 1.274          | 0.449          | 1.575          | 0.339          | 1.913          | 0.244          | 2.280          | 0.164          | 2.665          | 0.105          | 3.053          | —              | —              | —              | —              | —              | —              |
| 13  | 0.738          | 1.038          | 0.616          | 1.261          | 0.499          | 1.526          | 0.391          | 1.826          | 0.294          | 2.150          | 0.211          | 2.490          | 0.140          | 2.838          | 0.090          | 3.182          | —              | —              | —              | —              |
| 14  | 0.776          | 1.054          | 0.660          | 1.254          | 0.547          | 1.490          | 0.441          | 1.757          | 0.343          | 2.049          | 0.257          | 2.354          | 0.183          | 2.667          | 0.122          | 2.981          | 0.078          | 3.287          | —              | —              |
| 15  | 0.811          | 1.070          | 0.700          | 1.252          | 0.591          | 1.464          | 0.488          | 1.704          | 0.391          | 1.967          | 0.303          | 2.244          | 0.226          | 2.530          | 0.161          | 2.817          | 0.107          | 3.101          | 0.068          | 3.374          |
| 16  | 0.844          | 1.086          | 0.737          | 1.252          | 0.633          | 1.446          | 0.532          | 1.663          | 0.437          | 1.900          | 0.349          | 2.153          | 0.269          | 2.416          | 0.200          | 2.681          | 0.142          | 2.944          | 0.094          | 3.201          |
| 17  | 0.874          | 1.102          | 0.772          | 1.255          | 0.672          | 1.432          | 0.574          | 1.630          | 0.480          | 1.847          | 0.393          | 2.078          | 0.313          | 2.319          | 0.241          | 2.566          | 0.179          | 2.811          | 0.127          | 3.053          |
| 18  | 0.902          | 1.118          | 0.805          | 1.259          | 0.708          | 1.422          | 0.613          | 1.604          | 0.522          | 1.803          | 0.435          | 2.015          | 0.355          | 2.238          | 0.282          | 2.467          | 0.216          | 2.697          | 0.160          | 2.925          |
| 19  | 0.928          | 1.132          | 0.835          | 1.265          | 0.742          | 1.415          | 0.650          | 1.584          | 0.561          | 1.767          | 0.476          | 1.963          | 0.396          | 2.169          | 0.322          | 2.381          | 0.255          | 2.597          | 0.196          | 2.813          |
| 20  | 0.952          | 1.147          | 0.863          | 1.271          | 0.773          | 1.411          | 0.685          | 1.567          | 0.598          | 1.737          | 0.515          | 1.918          | 0.436          | 2.110          | 0.362          | 2.308          | 0.294          | 2.510          | 0.232          | 2.714          |
| 21  | 0.975          | 1.161          | 0.890          | 1.277          | 0.803          | 1.408          | 0.718          | 1.554          | 0.633          | 1.712          | 0.552          | 1.881          | 0.474          | 2.059          | 0.400          | 2.244          | 0.331          | 2.434          | 0.268          | 2.625          |
| 22  | 0.997          | 1.174          | 0.914          | 1.284          | 0.831          | 1.407          | 0.748          | 1.543          | 0.667          | 1.691          | 0.587          | 1.849          | 0.510          | 2.015          | 0.437          | 2.188          | 0.368          | 2.367          | 0.304          | 2.548          |
| 23  | 1.018          | 1.187          | 0.938          | 1.291          | 0.858          | 1.407          | 0.777          | 1.534          | 0.698          | 1.673          | 0.620          | 1.821          | 0.545          | 1.977          | 0.473          | 2.140          | 0.404          | 2.308          | 0.340          | 2.479          |
| 24  | 1.037          | 1.199          | 0.960          | 1.298          | 0.882          | 1.407          | 0.805          | 1.528          | 0.728          | 1.658          | 0.652          | 1.797          | 0.578          | 1.944          | 0.507          | 2.097          | 0.439          | 2.255          | 0.375          | 2.417          |
| 25  | 1.055          | 1.211          | 0.981          | 1.305          | 0.906          | 1.409          | 0.831          | 1.523          | 0.756          | 1.645          | 0.682          | 1.776          | 0.610          | 1.915          | 0.540          | 2.059          | 0.473          | 2.209          | 0.409          | 2.362          |
| 26  | 1.072          | 1.222          | 1.001          | 1.312          | 0.928          | 1.411          | 0.855          | 1.518          | 0.783          | 1.635          | 0.711          | 1.759          | 0.640          | 1.889          | 0.572          | 2.026          | 0.505          | 2.168          | 0.441          | 2.313          |
| 27  | 1.089          | 1.233          | 1.019          | 1.319          | 0.949          | 1.413          | 0.878          | 1.515          | 0.808          | 1.626          | 0.738          | 1.743          | 0.669          | 1.867          | 0.602          | 1.997          | 0.536          | 2.131          | 0.473          | 2.269          |
| 28  | 1.104          | 1.244          | 1.037          | 1.325          | 0.969          | 1.415          | 0.900          | 1.513          | 0.832          | 1.618          | 0.764          | 1.729          | 0.696          | 1.847          | 0.630          | 1.970          | 0.566          | 2.098          | 0.504          | 2.229          |
| 29  | 1.119          | 1.254          | 1.054          | 1.332          | 0.988          | 1.418          | 0.921          | 1.512          | 0.855          | 1.611          | 0.788          | 1.718          | 0.723          | 1.830          | 0.658          | 1.947          | 0.595          | 2.068          | 0.533          | 2.193          |
| 30  | 1.133          | 1.263          | 1.070          | 1.339          | 1.006          | 1.421          | 0.941          | 1.511          | 0.877          | 1.606          | 0.812          | 1.707          | 0.748          | 1.814          | 0.684          | 1.925          | 0.622          | 2.041          | 0.562          | 2.160          |
| 31  | 1.147          | 1.273          | 1.085          | 1.345          | 1.023          | 1.425          | 0.960          | 1.510          | 0.897          | 1.601          | 0.834          | 1.698          | 0.772          | 1.800          | 0.710          | 1.906          | 0.649          | 2.017          | 0.589          | 2.131          |
| 32  | 1.160          | 1.282          | 1.100          | 1.352          | 1.040          | 1.428          | 0.979          | 1.510          | 0.917          | 1.597          | 0.856          | 1.690          | 0.794          | 1.788          | 0.734          | 1.889          | 0.674          | 1.995          | 0.615          | 2.104          |
| 33  | 1.172          | 1.291          | 1.114          | 1.358          | 1.055          | 1.432          | 0.996          | 1.510          | 0.936          | 1.594          | 0.876          | 1.683          | 0.816          | 1.776          | 0.757          | 1.874          | 0.698          | 1.975          | 0.641          | 2.080          |
| 34  | 1.184          | 1.299          | 1.128          | 1.364          | 1.070          | 1.435          | 1.012          | 1.511          | 0.954          | 1.591          | 0.896          | 1.677          | 0.837          | 1.766          | 0.779          | 1.860          | 0.722          | 1.957          | 0.665          | 2.057          |
| 35  | 1.195          | 1.307          | 1.140          | 1.370          | 1.085          | 1.439          | 1.028          | 1.512          | 0.971          | 1.589          | 0.914          | 1.671          | 0.857          | 1.757          | 0.800          | 1.847          | 0.744          | 1.940          | 0.689          | 2.037          |
| 36  | 1.206          | 1.315          | 1.153          | 1.376          | 1.098          | 1.442          | 1.043          | 1.513          | 0.988          | 1.588          | 0.932          | 1.666          | 0.877          | 1.749          | 0.821          | 1.836          | 0.766          | 1.925          | 0.711          | 2.018          |
| 37  | 1.217          | 1.323          | 1.165          | 1.382          | 1.112          | 1.446          | 1.058          | 1.514          | 1.004          | 1.586          | 0.950          | 1.662          | 0.895          | 1.742          | 0.841          | 1.825          | 0.787          | 1.911          | 0.733          | 2.001          |
| 38  | 1.227          | 1.330          | 1.176          | 1.388          | 1.124          | 1.449          | 1.072          | 1.515          | 1.019          | 1.585          | 0.966          | 1.658          | 0.913          | 1.735          | 0.860          | 1.816          | 0.807          | 1.899          | 0.754          | 1.985          |
| 39  | 1.237          | 1.337          | 1.187          | 1.393          | 1.137          | 1.453          | 1.085          | 1.517          | 1.034          | 1.584          | 0.982          | 1.655          | 0.930          | 1.729          | 0.878          | 1.807          | 0.826          | 1.887          | 0.774          | 1.970          |
| 40  | 1.246          | 1.344          | 1.198          | 1.398          | 1.148          | 1.457          | 1.098          | 1.518          | 1.048          | 1.584          | 0.997          | 1.652          | 0.946          | 1.724          | 0.895          | 1.799          | 0.844          | 1.876          | 0.749          | 1.956          |
| 45  | 1.288          | 1.376          | 1.245          | 1.423          | 1.201          | 1.474          | 1.156          | 1.528          | 1.111          | 1.584          | 1.065          | 1.643          | 1.019          | 1.704          | 0.974          | 1.768          | 0.927          | 1.834          | 0.881          | 1.902          |
| 50  | 1.324          | 1.403          | 1.285          | 1.446          | 1.245          | 1.491          | 1.205          | 1.538          | 1.164          | 1.587          | 1.123          | 1.639          | 1.081          | 1.692          | 1.039          | 1.748          | 0.997          | 1.805          | 0.955          | 1.864          |
| 55  | 1.356          | 1.427          | 1.320          | 1.466          | 1.284          | 1.506          | 1.247          | 1.548          | 1.209          | 1.592          | 1.172          | 1.638          | 1.134          | 1.685          | 1.095          | 1.734          | 1.057          | 1.785          | 1.018          | 1.837          |
| 60  | 1.383          | 1.449          | 1.350          | 1.484          | 1.317          | 1.520          | 1.283          | 1.558          | 1.249          | 1.598          | 1.214          | 1.639          | 1.179          | 1.682          | 1.144          | 1.726          | 1.108          | 1.771          | 1.072          | 1.817          |
| 65  | 1.407          | 1.468          | 1.377          | 1.500          | 1.346          | 1.534          | 1.315          | 1.568          | 1.283          | 1.604          | 1.251          | 1.642          | 1.218          | 1.680          | 1.186          | 1.720          | 1.153          | 1.761          | 1.120          | 1.802          |
| 70  | 1.429          | 1.485          | 1.400          | 1.515          | 1.372          | 1.546          | 1.343          | 1.578          | 1.313          | 1.611          | 1.283          | 1.645          | 1.253          | 1.680          | 1.223          | 1.716          | 1.192          | 1.754          | 1.162          | 1.792          |
| 75  | 1.448          | 1.501          | 1.422          | 1.529          | 1.395          | 1.557          | 1.368          | 1.587          | 1.340          | 1.617          | 1.313          | 1.649          | 1.284          | 1.682          | 1.256          | 1.714          | 1.227          | 1.748          | 1.199          | 1.783          |
| 80  | 1.466          | 1.515          | 1.441          | 1.541          | 1.416          | 1.568          | 1.390          | 1.595          | 1.364          | 1.624          | 1.338          | 1.653          | 1.312          | 1.683          | 1.285          | 1.714          | 1.259          | 1.745          | 1.232          | 1.777          |
| 85  | 1.482          | 1.528          | 1.458          | 1.553          | 1.435          | 1.578          | 1.411          | 1.603          | 1.386          | 1.630          | 1.362          | 1.657          | 1.337          | 1.685          | 1.312          | 1.714          | 1.287          | 1.743          | 1.262          | 1.773          |
| 90  | 1.496          | 1.540          | 1.474          | 1.563          | 1.452          | 1.587          | 1.429          | 1.611          | 1.406          | 1.636          | 1.383          | 1.661          | 1.360          | 1.687          | 1.336          | 1.714          | 1.312          | 1.741          | 1.288          | 1.769          |
| 95  | 1.510          | 1.552          | 1.489          | 1.573          | 1.468          | 1.596          | 1.446          | 1.618          | 1.425          | 1.642          | 1.403          | 1.666          | 1.381          | 1.690          | 1.358          | 1.715          | 1.336          | 1.741          | 1.313          | 1.767          |
| 100 | 1.522          | 1.562          | 1.503          | 1.583          | 1.482          | 1.604          | 1.462          | 1.625          | 1.441          | 1.647          | 1.421          | 1.670          | 1.400          | 1.693          | 1.378          | 1.717          | 1.357          | 1.741          | 1.335          | 1.765          |
| 150 | 1.611          | 1.637          | 1.598          | 1.651          | 1.584          | 1.665          | 1.571          | 1.679          | 1.557          | 1.693          | 1.543          | 1.708          | 1.530          | 1.722          | 1.515          | 1.737          | 1.501          | 1.752          | 1.486          | 1.767          |
| 200 | 1.664          | 1.684          | 1.653          | 1.693          | 1.643          | 1.704          | 1.633          | 1.715          | 1.623          | 1.725          | 1.613          | 1.735          | 1.603          | 1.746          | 1.592          | 1.757          | 1.582          | 1.768          | 1.571          | 1.779          |

Ilustración 5: Tabla de datos de durbin-Watson (econometrica2010)

Método a utilizar para corregir la autocorrelación en el modelo.

Método de los mínimos cuadrados generalizados.

Como conocemos las consecuencias de la autocorrelación, sobre todo la falta de eficiencia de los estimadores de MCO, quizá deseemos corregir el problema. El remedio depende del conocimiento respecto a la naturaleza de la interdependencia entre las perturbaciones; es decir, conocer la estructura de la autocorrelación.

Considere el modelo de regresión de dos variables:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \tag{1}$$



Si se conoce el coeficiente de autocorrelación de primer orden, el problema de la autocorrelación se resuelve muy fácil. Si (1) es válida en el tiempo  $t$ , también lo es para el tiempo  $(t - 1)$ .

Por tanto,

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + u_{t-1} \quad (2)$$

Al multiplicar (2) por  $\rho$  en ambos miembros, obtenemos

$$\rho Y_{t-1} = \rho \beta_1 + \rho \beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1} \quad (3)$$

Si restamos (1) de (3), resulta

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (4)$$

Donde:  $\varepsilon_t = (u_t - \rho u_{t-1})$

Expresamos (5) como:

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2^* X_t^* + \varepsilon_t \quad (5)$$

Como el término de error en (5) satisface los supuestos usuales de MCO, los aplicamos a las variables transformadas  $Y^*$  y  $X^*$  para obtener estimadores con todas las propiedades óptimas; a saber, que sean MELI.

La regresión (4) se conoce como generalizada, cuasi generalizada ecuación en diferencias. Implica la regresión de  $Y$  sobre  $X$ , pero no en la forma original, sino en la forma de diferencias, que se obtiene al restar una proporción  $(-\rho)$  del valor de una variable en el periodo anterior de su valor en el periodo actual.

Otra solución al problema de autocorrelación:

Camuflando la autocorrelación consiste en la mejora de la especificación; una vez agotados todos los recursos para ajustar la especificación del modelo, siempre cabe la alternativa de corregir los síntomas evitando en parte los efectos indeseables de una inadecuada estimación MCO en un contexto en que esta estrategia no es válida.

La forma para hacer esta corrección sea simplemente camuflar el mal dato de Durbin Watson añadiendo la endógena retardada en la regresión.

Se propone a utilizar el estadístico "h" de Durbin en lugar de Dw original.

$$h = \rho \sqrt{\frac{n}{1 - n * var}}$$

## RESULTADOS

### Método de Durbin-Watson

Para poder observar si hay autocorrelación en los datos usaremos el método de Durbin Watson con el programa XLSTAT.

| Regression of variable Ingresos totales:       |        |
|--|--------|
| Goodness of fit statistics (Ingresos totales): |        |
| Observations                                   | 82.000 |
| Sum of weights                                 | 82.000 |
| DF   | 79.000 |

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| R <sup>2</sup>          | 0.999      |
| Adjusted R <sup>2</sup> | 0.999      |
| RMSE                    | 190877.782 |
| RMSE                    | 456.896    |
| MAPE                    | 3.543      |
| DW                      | 1.475      |
| CP                      | 3.000      |
| AIC                     | 1000.014   |
| SBC                     | 1007.234   |
| PC                      | 0.001      |

Ilustración 6: Análisis de Regresión de la base de datos

Se puede concluir que si existe autocorrelación positiva ya que el resultado de Durbin-Watson que nos proporciona XLSTAT es de 1.475 y que según la cantidad de datos (son 82) y el número de variables independientes (son k2) ubicándolo en la tabla de Durbin-Watson donde:

- D<sub>I</sub> es un valor crítico inferior
- D<sub>U</sub> es un valor crítico superior

Nos da los intervalos de: Ilustración 5

- D<sub>I</sub> = 1.458
- D<sub>U</sub> = 1.553

Y ya que el resultado de Durbin-Watson es de 1.475 que es mayor al valor crítico inferior pero es menor al valor crítico superior entonces se dice que no podemos decidir si hay una autocorrelación.

Método Grafico:

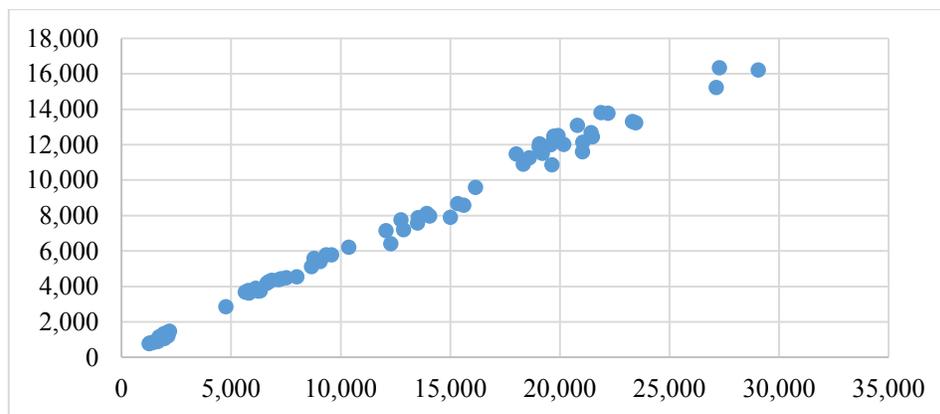


Ilustración 7: Grafica de residuos de Datos (FEMSA, 1950)

Como vemos en **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** que los residuos están demasiado agrupados entonces podemos decir que tienen una correlación positiva.

Método de las rachas:

Al observar que el total de residuos son positivos tenemos que solo contamos una racha y al obtener esto podemos decir que tiene una autocorrelación positiva que es lo que nos menciona este método.

Corrigiendo la autocorrelación:

Se propone a utilizar el estadístico "h" de Durbin en lugar de DW original.

$$h = \rho \sqrt{\frac{n}{1 - n * var}}$$

Método de los mínimos cuadrados generalizados

Al aplicar este método se aplicaron dos iteraciones al modelo para poder corregir la autocorrelación del modelo.

| Regression of variable Ingresos totales:       |           |
|--|-----------|
| Goodness of fit statistics (Ingresos totales): |           |
| Observations                                   | 80.000    |
| Sum of weights                                 | 80.000    |
| DF   | 77.000    |
| R <sup>2</sup>                                 | 0.998     |
| Adjusted R <sup>2</sup>                        | 0.998     |
| MSE  | 90427.432 |
| RMSE   | 300.712   |
| MAPE   | 3.738     |
| DW   | 1.783     |
| Cp   | 3.000     |

Ilustración 8: Resultado de DW ya corregida la Autocorrelación

Se puede concluir que si existe autocorrelación positiva ya que el resultado de Durbin-Watson que nos proporciona XLSTAT es de 1.783 y que según la cantidad de datos (son 80) y el número de variables independientes (son k2) ubicándolo en la tabla de Durbin-Watson donde:

Nos da los intervalos de: Ilustración 5

- $D_l = 1.41$
- $D_u = 1.541$

Ya que el valor  $d_u$  es menor que  $d$  y menor que  $4-d_u$  podemos decir que ya no existe autocorrelación en los datos y ya está corregida.

Método gráfico:

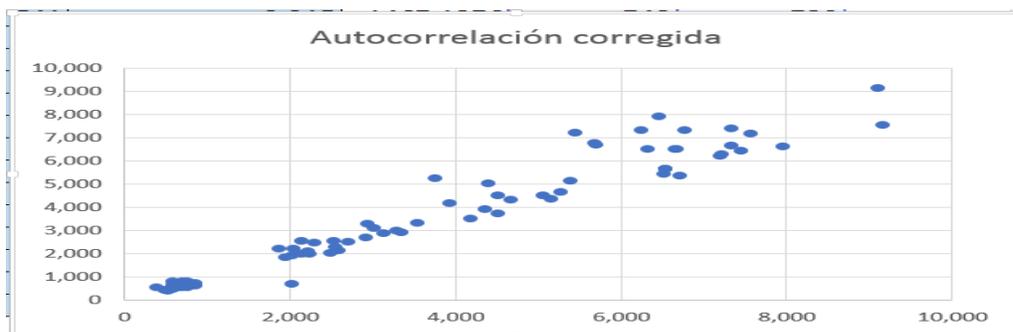


Ilustración 9: Grafica de residuos ya corregida la Autocorrelación

Al momento de corregir la autocorrelación observamos por el método gráfico que tenemos nuestros datos dispersos y esto no dice que no hay autocorrelación entre ellos.

## CONCLUSIONES

Como vemos el software XLSTAT nos facilitó rápido el cálculo de Durbin-Watson pero aun así se tuvo que hacer referencia a las tablas del mismo para dar una explicación a los resultados obtenidos. Hay que recalcar que existen 3 métodos más para realizar el cálculo y obtener resultados semejantes, al obtener el resultado de DW y rechazar el mismo se tuvo que corregir la autocorrelación utilizando el método de mínimos cuadrados generalizados y así eliminar la autocorrelación.

## Bibliografía

Fomento Económico Mexicano. (1950). *FEMSA*. Obtenido de Bienvenidos a FEMSA:  
[www.femsa.com/es](http://www.femsa.com/es)

Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2010). *Econometria*. México: Mc Graw Hill.

[Programa general](#)

## Ponencia de Investigación 10

### TIEMPO DE SOLIDIFICACIÓN DE GELATINAS

Juan Candia Vargas, Dra. Rosa A. Zamora, [lma.candia@gmail.com](mailto:lma.candia@gmail.com)

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

[lma.candia@gmail.com](mailto:lma.candia@gmail.com)

Licenciatura.

Palabras clave: ANOVA, Prueba de Normalidad.

## RESUMEN

En el trabajo se expone el resultado de un experimento de solidificación de gelatinas, observando el ambiente, recipiente y tiempo para obtener datos que nos permitan determinar cómo afectan al resultado final y a su vez decidir cuál de las marcas tiene mejor rendimiento al momento de prepararlas.

## INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se realiza el análisis estadístico del tiempo requerido por distintas marcas de gelatina para obtener la consistencia conocida y deseada de este producto. Realizado mediante el análisis de varianza, en el cuál se confrontaron dos hipótesis de acuerdo a tres factores que se sospecha influye en el tiempo de preparación de este producto: el medio en el cual se deja la mezcla (ambiente, refrigerador y congelador), el tipo de recipiente (vidrio, plástico y cerámica) y la marca (Jell-O, Pronto y D'Gari).

Además, se llevó a cabo con objetos que son fácilmente encontrados en una casa común para representar lo que puede hacerse caseramente.

### MARCO TEÓRICO

Un análisis de varianza (ANOVA) prueba la hipótesis de que las medias de dos o más poblaciones son iguales, el procedimiento funciona comparando la varianza entre las medias de los grupos y la varianza dentro de los grupos. Los ANOVA evalúan la importancia de uno o más factores al comparar las medias de la variable de respuesta en los diferentes niveles de los factores. La hipótesis nula establece que todas las medias de la población (medias de los niveles de los factores) son iguales mientras que la hipótesis alternativa establece que al menos una es diferente (Minitab Inc, 2017).

Consideremos una muestra aleatoria de datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que proceden de cierta distribución desconocida denotada por  $F(x)$ . Se quiere verificar si dichos datos provienen de una población con una distribución normal, mediante las hipótesis estadísticas.

$H_0$ : Los datos proceden de una distribución normal ( $F(x)$  es normal).

$H_a$ : Los datos no proceden de una distribución normal ( $F(x)$  no es normal).

Los pasos para la prueba de Shapiro-Wilks son:

- 1) Se ordenan los datos de mayor a menor, denotemos los datos ordenados por  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(k)}$ .
- 2) Se obtienen los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  donde  $k$  es aproximadamente  $n/2$ .
- 3) Se calcula el estadístico  $W$  definido como:

$$W = \frac{1}{(n-1)S^2} \left[ \sum_{i=1}^k a_i (X_{(n-i+1)} - X_{(i)}) \right]^2$$

Donde  $S^2$  es la varianza muestral.

- 4) Por último, si el valor del estadístico es mayor que su valor crítico asociado a un  $\alpha$  seleccionado, que puede calcularse fácilmente en MICROSOFT® EXCEL con la función, `DISTR.NORM.ESTAND.INV(1- $\alpha$ )`, se rechaza la normalidad de los datos.

Haciendo referencia a estos pasos, será lo primero a realizar antes del análisis de varianza (Gutiérrez Pulido & de la Vara Salazar, 2008).

En el caso de este experimento se usará el análisis de varianza unifactorial, conocido como ANOVA unifactorial que se enfoca en la comparación de más de dos medias de población o tratamientos. Sean:

$l$  := el número de poblaciones o tratamientos que se están comparando

$\mu_1$  := la media de la población  $l$  o la respuesta promedio verdadera cuando se aplica el tratamiento  $l$ .

⋮

$\mu_l$  := la media de la población  $l$  o la respuesta promedio verdadera cuando se aplica el tratamiento  $l$ .

Las hipótesis pertinentes son

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l \quad (1)$$

Contra

$$H_a: \text{por lo menos dos de las } \mu_i \text{ son diferentes } (2)$$

Una prueba de estas hipótesis requiere que se tenga disponible una muestra aleatoria de cada población o tratamiento (Devore, 2008).

Si se acepta  $H_0$  se confirma que los efectos sobre la respuesta de los  $l$  tratamientos son estadísticamente nulos, y en caso de rechazar se estaría concluyendo que al menos un efecto es diferente de cero.

Para probar las hipótesis dadas por las relaciones (1) y (2) mediante la técnica de ANOVA, se debe separar la variabilidad total de los datos. Para ello se tiene que una medida de la variabilidad total es la suma total de cuadrados dada por:

$$SCTotal = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y^2_{..}}{N}$$

Al sumar y restar dentro del paréntesis la medida del tratamiento  $i$ ,  $(\bar{Y}_l)$  :

$$SCTotal = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} [(Y_{ij} - \bar{Y}_l) + (\bar{Y}_l - \bar{Y}_{..})]^2$$

Y desarrollando el cuadrado,  $SCTotal$  se puede partir en dos componentes:

$$SCTotal = \sum_{i=1}^l n_i (\bar{Y}_l - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_l)^2$$

$$SCTrat = \sum_{i=1}^l n_i (\bar{Y}_l - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_l^2 - n \bar{Y}^2$$

$$SCE = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_l)^2$$

Se hace la simplificación de la ecuación de  $SCTotal$  de la siguiente manera:

$$SCTotal = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij}^2 - 2Y_{ij}\bar{Y}_{..} + \bar{Y}_{..}^2)$$

$$SCTotal = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - 2 \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}\bar{Y}_{..} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} \bar{Y}_{..}^2$$

$$SCTotal = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - 2n\bar{Y}_{..}\bar{Y}_{..} + n\bar{Y}_{..}^2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - n\bar{Y}_{..}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore SCTotal &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - n\bar{Y}_{..}^2 \\ SCTrat &= \sum_{i=1}^l n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^l n_i (\bar{Y}_i^2 - 2\bar{Y}_i \bar{Y}_{..} + \bar{Y}_{..}^2) \\ SCTrat &= \sum_{i=1}^l n_i (\bar{Y}_i^2 - 2\bar{Y}_i \bar{Y}_{..} + \bar{Y}_{..}^2) = \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_i^2 - 2 \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_i \bar{Y}_{..} + \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_{..}^2 = \\ SCTrat &= \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_i^2 - 2n\bar{Y}_{..} \bar{Y}_{..} + n\bar{Y}_{..}^2 = \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_i^2 - n\bar{Y}_{..}^2 \\ \therefore SCTrat &= \sum_{i=1}^l n_i \bar{Y}_i^2 - n\bar{Y}_{..}^2 \end{aligned}$$

Como  $SCTotal = SCTrat + SCE$ , entonces  $SCTrat = SCTotal - SCE$ , de aquí en adelante será la manera de calcular la  $SCTrat$ , donde el primer componente es la suma de cuadrados de tratamientos ( $SCTrat$ ) y el segundo es la suma de cuadrados del error ( $SCE$ ). Al observar con detalle se aprecia que la  $SCTrat$  mide la variación entre tratamientos y la  $SCE$  mide la variación dentro de tratamientos.

Como hay un total de  $N = \sum_{i=1}^{n_i} n_i$  observaciones, la  $SCTotal$  tiene  $N-1$  grados de libertad. Hay  $l$  tratamientos, así que  $SCTrat$  tiene  $l-1$  grados de libertad, mientras que la  $SCE$  tiene  $N-l$  grados de libertad.

Para calcular la  $SCTotal$  se requiere calcular la gran media de la siguiente manera:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

El concentrado de las ecuaciones utilizadas se muestra en la tabla 1.

Tabla 8. Concentrado de ecuaciones

| Fuente de variabilidad | Suma de cuadrados | Grados de libertad | Cuadrado Medio                      | Vo                       | Fo           |
|------------------------|-------------------|--------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------|
| Tratamientos           | $SC_{Trat}$       | $l-1$              | $CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{l-1}$ | $\frac{CM_{Trat}}{CM_E}$ | $P(F > F_0)$ |
| Error                  | $SCE$             | $N-l$              | $CM_E = \frac{SCE}{N-l}$            |                          |              |
| Total                  | $SC_{Total}$      | $N-1$              |                                     |                          |              |

Fuente: (Gutiérrez Pulido & de la Vara Salazar, 2008).

Para comparar las hipótesis debemos conocer el estadístico denominado  $V_0$  y el valor a comparar es el de  $F$  el cual es obtenido de la tabla  $F$  de Fisher con los grados de libertad que tenemos en la tabla, es decir,  $v_1 = l - 1$ ,  $v_2 = N - l$  donde el valor es buscado de la siguiente manera  $F_{(\alpha, v_1, v_2)}$  y  $\alpha$  es el nivel de significancia a utilizar para la prueba, de aquí en adelante el nivel de significancia será de  $\alpha = 0.05$ .

El análisis de la varianza es una potente herramienta estadística, de gran utilidad tanto en la industria, para el control de procesos, como en el laboratorio de análisis, para el control de métodos analíticos. Los ejemplos de aplicación son múltiples, pudiéndose agrupar, según el objetivo que persiguen, en dos principalmente: la comparación de múltiples columnas de datos y la estimación de los componentes de variación de un proceso (Boqué R., 2015).

#### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Las gelatinas son un alimento preparado que se elabora tanto de manera industrial como casera, presentando como principal problema el tiempo que se tarda en estar lista. Es por eso que se ha optado por realizar una investigación estadística sobre cuál de los factores (ambiente recipiente o marca) es el que más influye en dicha medida.

#### METODOLOGÍA

Los datos obtenidos experimentalmente se trataron con el software MICROSOFT® EXCEL 2016 e IBM SPSS versión 21.

Dichos datos se muestran en la tabla 2

Tabla 9. Datos Obtenidos Experimentalmente

| Marca  | Recipiente | Medio        | Tiempo (min) |
|--------|------------|--------------|--------------|
| D'Gari | cerámica   | Ambiente     | 610.00       |
| Pronto | cerámica   | Congelador   | 55.00        |
| D'Gari | Vidrio     | Refrigerador | 130.00       |
| D'Gari | Plástico   | Congelador   | 70.00        |
| Jell-O | cerámica   | Refrigerador | 110.00       |
| Pronto | Plástico   | Refrigerador | 120.00       |
| Jell-O | Plástico   | Ambiente     | 640.00       |
| Jell-O | Vidrio     | Congelador   | 75.00        |
| Pronto | Vidrio     | Ambiente     | 600.00       |

Los datos a tratar se estarán mostrando a continuación dependiendo de las diferentes pruebas que se les hará. La primera prueba es la solidificación dependiendo de la marca de cada una de las gelatinas de la muestra, se calcula la gran media y la suma de cuadrados de los valores de la tabla con las ecuaciones antes mencionadas, después se hará lo mismo con los recipientes y los distintos medios donde se dejó la mezcla.

En la tabla 3 se muestra el tiempo de respuesta con respecto a la marca.

Tabla 10. Comparación marca-tiempo

| Marca  | Tiempo de Respuesta (min) |     |     |
|--------|---------------------------|-----|-----|
| Pronto | 600                       | 120 | 55  |
| Jell-O | 75                        | 640 | 110 |
| D'Gari | 130                       | 70  | 610 |

En la tabla 4 se muestra el tiempo de respuesta con respecto al recipiente.

Tabla 11. Comparación recipiente-tiempo

| Recipiente | Tiempo de Respuesta (min) |     |     |
|------------|---------------------------|-----|-----|
| Vidrio     | 600                       | 75  | 130 |
| Plástico   | 120                       | 640 | 70  |
| Cerámica   | 55                        | 110 | 610 |

Tabla 12. Comparación medio-tiempo

| MEDIO       | Tiempo de Respuesta (min) |     |     |
|-------------|---------------------------|-----|-----|
| Ambiente    | 600                       | 640 | 610 |
| Refrigerado | 130                       | 120 | 110 |
| Congelador  | 75                        | 70  | 55  |

## RESULTADOS

Para aplicar el ANOVA, es necesario corroborar el supuesto de normalidad, lo cual se realiza por medio de la prueba Shapiro-Wilks. El valor de significancia en este caso es de  $\alpha = 0.05$ , empezado la prueba con la marca de las gelatinas:

Ho: Los datos proceden de una distribución normal.

Contra

Ha: Los datos no proceden de una distribución normal.

Tabla 13. Prueba de Shapiro-Wilks de la marca

| Marca  | Estadístico | gl | Sig   |
|--------|-------------|----|-------|
| Pronto | 0.838       | 3  | 0.209 |
| Jell-O | 0.796       | 3  | 0.106 |
| D'Gari | 0.832       | 3  | 0.194 |

Como la significancia asintótica (sig.) es mayor que el valor del  $\alpha$  propuesto, aceptamos Ho y lo que indica que los datos si obedecen a una distribución normal.

Tabla 14. Prueba de Shapiro-Wilks del tipo de recipiente

| Recipiente | Estadístico | gl | Sig   |
|------------|-------------|----|-------|
| plástico   | 0.815       | 3  | 0.151 |

|          |       |   |       |
|----------|-------|---|-------|
| vidrio   | 0.828 | 3 | 0.182 |
| cerámica | 0.824 | 3 | 0.172 |

Las hipótesis son las misma para este caso, en el que también la significación asintótica es mayor que el valor del  $\alpha$  propuesto, por lo tanto, aceptamos  $H_0$ , lo que indica que los datos obedecen a una distribución normal.

Tabla 15. Prueba de Shapiro-Wilks del Medio

| Medio        | Estadístico | gl | Sig   |
|--------------|-------------|----|-------|
| Ambiente     | 0.923       | 3  | 0.463 |
| Refrigerador | 1           | 3  | 1     |
| Congelador   | 0.923       | 3  | 0.463 |

Nuevamente, la significación asintótica es mayor que el valor propuesto de  $\alpha$ , por lo tanto, los datos obedecen a una distribución normal.

Ahora que ya se comprobó la normalidad de los datos se puede hacer uso del análisis de varianza para el estudio de los datos obtenidos.

Las gráficas de normalidad que se muestran en las ilustraciones 1, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9, representan los resultados antes obtenidos en las tablas 6, 7 y 8. En los gráficos se observa que los datos se encuentran con una distancia muy pequeña a la recta de normalidad y por lo tanto se corrobora que los datos obedecen una distribución normal.

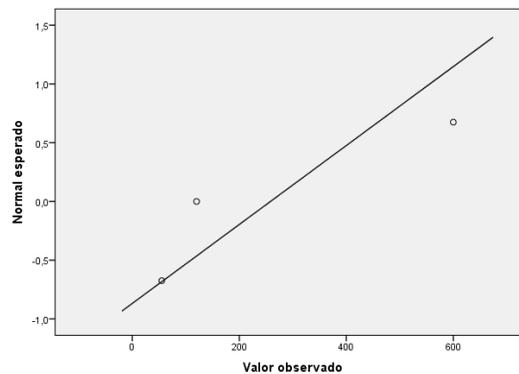


Ilustración 10. Gráfica Q-Q normal de tiempo para marca pronto

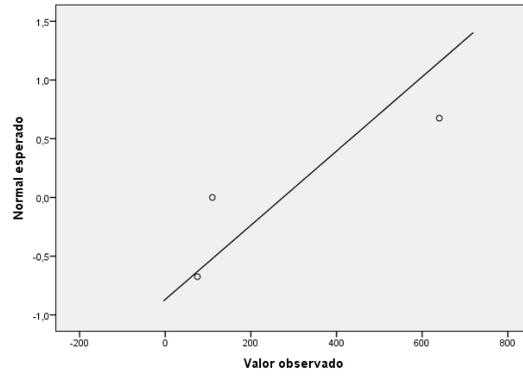


Ilustración 11. Gráfico Q-Q normal de tiempo para la marca Jell-O

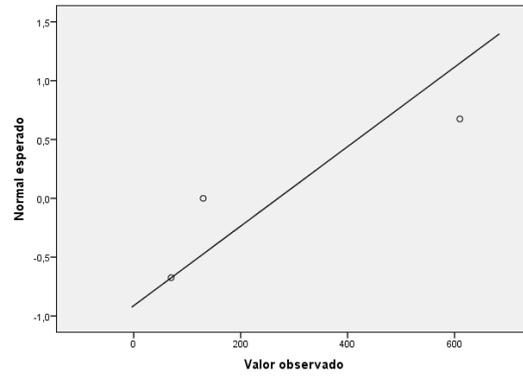


Ilustración 12. Gráfico Q-Q normal de tiempo para marca D'Gari

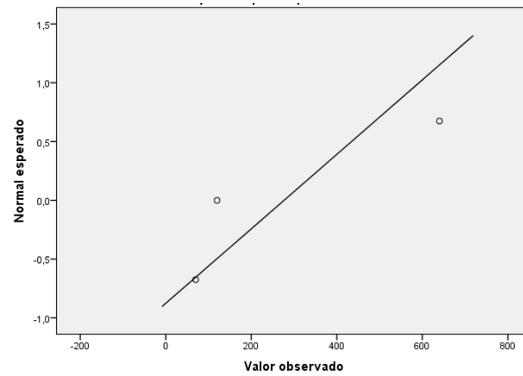


Ilustración 13. Gráfico Q-Q normal de tiempo para el recipiente plástico

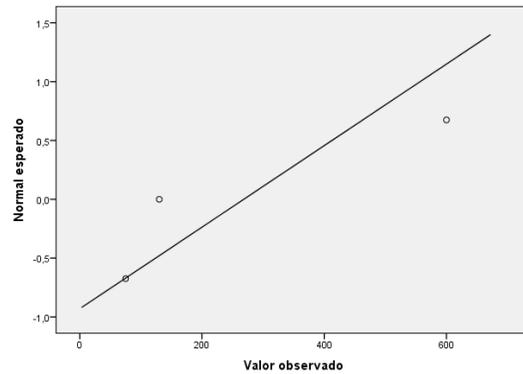


Ilustración 14. Gráfico Q-Q normal de tiempo para el recipiente de vidrio

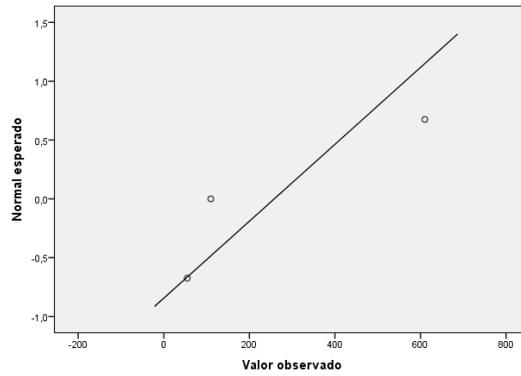


Ilustración 15. Gráfico Q-Q normal de tiempo para el recipiente de cerámica

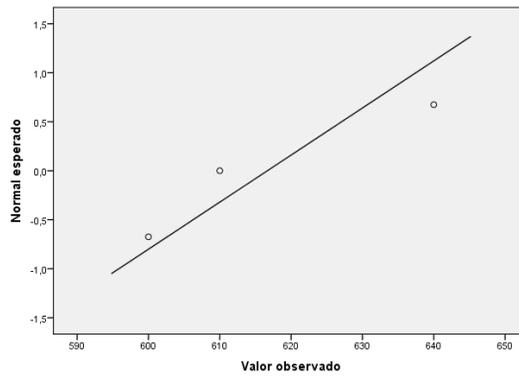


Ilustración 16. Gráfico Q-Q normal de tiempo para el medio igual a ambiente

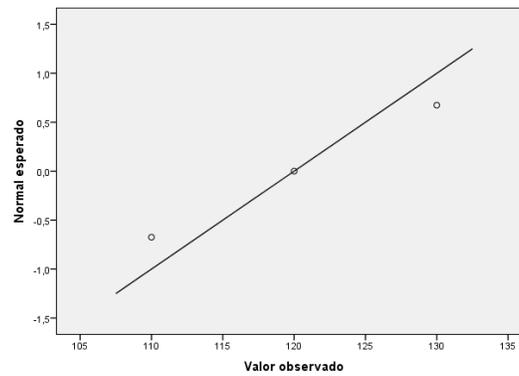


Ilustración 17. Gráfico Q-Q normal de tiempo para el medio igual a refrigerador

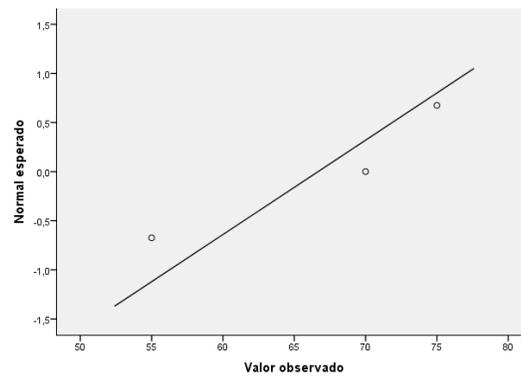


Ilustración 18. Gráfico Q-Q normal de tiempo para el medio igual a congelador

Por lo planteado en el marco teórico, y demostrado que los datos obedecen a una distribución normal, las hipótesis a probar para el factor marca son las siguientes:

Ho: En las tres gelatinas, en promedio solidifican de igual manera.

Contra la hipótesis alternativa:

Ha: En las tres gelatinas, al menos una difiere de las demás.

Haciendo el análisis de los datos correspondiente se presenta la siguiente tabla ANOVA (tabla 9).

Tabla 16. ANOVA para la marca

| <b>Fuente de variabilidad</b> | <b>Suma de cuadrados</b> | <b>Grados de libertad</b> | <b>Cuadrado Medio</b> | <b>Vo</b> | <b>Fo</b>   |
|-------------------------------|--------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------|-------------|
| <b>Tratamientos</b>           | 438.8888                 | 2                         | 219.4444              | 0.0023    | <b>5.14</b> |
| <b>Error</b>                  | 552866.6667              | 6                         | 92144.4444            |           |             |
| <b>Total</b>                  | 553305.556               | 8                         |                       |           |             |

Con lo propuesto en la metodología, se acepta Ho ya que el valor del estadístico es menor que el valor Fo, por lo tanto podemos concluir que las marcas de gelatinas en promedio solidifican de igual manera.

Análogamente haremos la prueba para ver la respuesta del material del recipiente, las hipótesis utilizadas serán:

Ho: No hay variación al usar diferentes tipos de recipiente para la solidificación de las gelatinas.

Contra la alternativa:

Ha: Hay variación en al menos uno de los recipientes para la solidificación de las gelatinas.

El resultado se muestra en la tabla 10.

Tabla 17. ANOVA para el tipo de recipiente

| <b>Fuente de variabilidad</b> | <b>Suma de cuadrados</b> | <b>Grados de libertad</b> | <b>Cuadrado Medio</b> | <b>Vo</b> | <b>Fo</b>   |
|-------------------------------|--------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------|-------------|
| <b>Tratamientos</b>           | 505.5555                 | 2                         | 252.7777              | 0.0027    | <b>5.14</b> |
| <b>Error</b>                  | 552800                   | 6                         | 92133.3333            |           |             |
| <b>Total</b>                  | 553305.556               | 8                         |                       |           |             |

Con los datos obtenidos en la tabla se observa que el valor de nuestro estadístico es menor que el de Fo, por lo tanto, se acepta Ho y concluimos que no hay variación al usar diferentes tipos de recipiente.

La última tabla ANOVA (tabla 11) es la de los distintos medios donde se dejó la gelatina y las hipótesis son las siguientes:

$H_0$ : No hay variación entre los distintos medios donde se dejó la mezcla de las gelatinas.

Contra la alternativa:

$H_a$ : Hay variación en al menos uno de los medios donde se dejó la mezcla de las gelatinas.

Tabla 18. ANOVA para el medio

| Fuente de variabilidad | Suma de cuadrados | Grados de libertad | Cuadrado Medio | Vo        | Fo          |
|------------------------|-------------------|--------------------|----------------|-----------|-------------|
| Tratamientos           | 552022.2222       | 2                  | 276011.1111    | 1290.4415 | <b>5.14</b> |
| Error                  | 1283.3333         | 6                  | 213.8888       |           |             |
| Total                  | 553305.556        | 8                  |                |           |             |

Con los datos obtenidos al hacer el análisis del último factor, el estadístico es mayor que el de  $F_0$ , por lo que se rechaza  $H_0$ , con lo cual concluimos que existe variación entre los diferentes medios donde se dejó la mezcla.

## CONCLUSIONES

Con los resultados de las tablas ANOVA se puede comprobar un conocimiento empírico de que la marca y el tipo de recipiente no influyen en el tiempo de cuajado de la gelatina, pero si influye el medio en cual se deja, pues se sabe que a menor temperatura menor tiempo de cuajado, esto debido a las características de los ingredientes. Como se mencionó, la temperatura es influyente, pero si se compara la marca, con el recipiente y el tiempo, se puede deducir que por separado no influyen en el tiempo de solidificación, pero analizando solamente éstos factores, se observa diferencia influida por la marca y el tipo de recipiente.

Es interesante notar que los sobres que contienen el preparado en polvo no indican cual es el tiempo mínimo requerido para que el producto solidifique. Solamente sugiere dejarlo hasta que esto suceda, pero como se observó en el experimento, este tiempo puede ser muy alto si las condiciones del medio son de temperaturas altas, y si el material utilizado guarda el calor por más tiempo, éstos son factores que no se analizaron, pues como se mencionó el experimento se realizó de manera casera.

## Bibliografía

- Boqué R. (2015). Obtenido de El Análisis de la Varianza: <http://rodi.urv.es/quimio/general/anovacast.pdf>
- Devore, J. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México DF: Cengage Learning.
- Gutiérrez Pulido, H., & de la Vara Salazar, R. (2008). *Análisis y Diseño de Experimentos*. México, D.F.: Mc Graw Hill.
- Minitab Inc. (2017). *Soporte Minitab® 17*. Obtenido de ¿Qué es ANOVA?: <http://support.minitab.com/es-mx/minitab/17/topic-library/modeling-statistics/anova/basics/what-is-anova/>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 1

### ZERO FRACTAL

Martha Patricia Galindo Solís, Claudia Daniela Corral Hernández, Asesor: Enrique Vargas Betancourt, email de contacto: [quique\\_vab@ujed.mx](mailto:quique_vab@ujed.mx)  
 Facultad de Ciencia Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango  
[Paty\\_dance89@hotmail.com](mailto:Paty_dance89@hotmail.com); [Dannyy@live.com.mx](mailto:Dannyy@live.com.mx)  
 Licenciatura  
 Álgebra moderna

La principal estructura matemática que se estudia en un primer curso de Álgebra Moderna es la de grupo. Sin embargo, este concepto no es exclusivo del álgebra, existen muchas otras áreas de la matemática y de la ciencia en general en las que se encuentra presente.

En esta charla de divulgación se presentan algunas curiosidades de los grupos, específicamente del elemento neutro de un grupo, enlazando de esta manera el álgebra con la teoría fractal. Mencionamos a continuación los principales conceptos que se enmarcan dentro de este tema.

**Definición:** Una *operación binaria* definida en un conjunto  $S$  no vacío es una función de  $S \times S$  en  $S$  que relaciona a cada par de elementos  $(a, b)$  de  $S \times S$  con un elemento  $c$  en  $S$ .

A partir de la definición de operación binaria se construye la estructura de grupo.

**Definición:** Un *grupo* es un par  $(G, *)$  donde  $G$  es un conjunto no vacío y  $*$  es una operación binaria en  $G$  que satisface:

1. La operación  $*$  es asociativa
2. Existe un elemento  $e$  en  $G$  tal que  $e * g = g * e = g$  para todo  $g$  en  $G$  (llamado elemento neutro)
3. Para cada  $g$  en  $G$  existe un  $g^{-1}$  que está en  $G$  tal que  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$  (llamado inverso de  $g$ )

En el estudio de la teoría de grupos se demuestra que el elemento neutro, mencionado en el punto dos de la definición anterior, es único, y esto le permite tener una riqueza en propiedades al ser un elemento especial del grupo.

La geometría fractal tiene sus inicios en los trabajos de Benoit Mandelbrot, con la intención de desarrollar una geometría de la naturaleza que le permitiera describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean. El término fractal acuña al adjetivo latino «*fractus*», del verbo «*frangere*» que significa romper en pedazos. Una definición matemática e intuitiva de fractal es la siguiente:

**Definición:** Un *fractal* es un objeto cuya estructura se repite a diferentes escalas. Es decir, por mucho que nos acerquemos o alejemos del objeto, observaremos siempre la misma estructura.

En la naturaleza, y en general en el mundo que nos rodea podemos observar una gran cantidad de ejemplos de figuras fractales, las cuales se destacan no sólo por sus irregularidades, sino que en muchas de las ocasiones la belleza estética, los colores y la cantidad de simetrías que poseen dejan perplejo a cualquier admirador.

Para construir el grupo que nos servirá como ejemplo, consideramos el conjunto de matrices cuadradas  $n \times n$  con entradas en el conjunto  $X = \{0,1,2,3\}$  al cual llamaremos  $M_n$ . Definimos una operación binaria  $*$  entre estas matrices como la suma común de matrices, pero considerando que cada vez que en una entrada quede un valor mayor o igual a cuatro, a este número se le restarán cuatro unidades y se le sumará una unidad a cada una de las cuatro entradas vecinas, si no existe una entrada vecina a la cual agregar sólo restamos del número original. Mostramos un ejemplo de la operación con dos matrices de  $2 \times 2$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El conjunto  $M_n$  es un grupo bajo la operación definida anteriormente. Sin embargo, no es un grupo interesante para analizar, debido a la similitud que tiene con el grupo de matrices cuadradas con la operación de suma usual de matrices. Por esta razón, consideramos sólo el conjunto  $G_n$  de todas las matrices cuadradas  $n \times n$  que pueden escribirse como la matriz  $n \times n$  con todas sus entradas igual a tres sumada con cualquier otra matriz de  $M_n$ . Es decir,

$G_n = \{A \in M_n \mid A = T * M\}$  con  $M$  en  $M_n$  y  $T$  la matriz formada con el número tres en cada una de sus entradas. Este conjunto con la operación binaria  $*$  forma nuevamente un grupo, el cual denotaremos simplemente por  $G_n$ .

Ahora, si  $G_n$  es un grupo significa que debe existir un elemento neutro para la operación  $*$ . Dedicaremos este trabajo a analizar precisamente el elemento neutro de  $G_n$  y a observar las simetrías que mantiene en sus entradas. Por ejemplo, para el caso de  $G_3$  tenemos que la matriz neutra es la siguiente:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

No demostraremos este hecho a detalle, pero veamos mediante un ejemplo el papel que juega el neutro esta matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, la matriz  $E_3$  guarda cierta simetría en sus entradas. Lo interesante de este grupo es que este tipo de simetrías sigue presente en  $E_n$  para cada valor de  $n$ . Observando esto, podemos ahora asignar a cada elemento de  $X$  un color, por ejemplo: negro para el cero, amarillo para el uno, azul para el dos y rojo para el tres, esto permitirá

percibir con mayor facilidad las simetrías presentes en la matriz. Por ejemplo, para  $E_3$  tenemos la matriz de colores de la Figura 1.

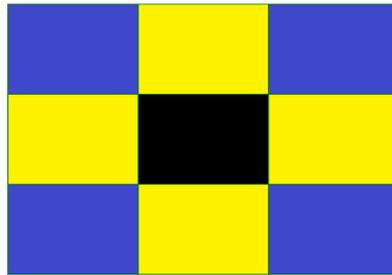


Figura 1. Matriz neutra de  $3 \times 3$

Si observamos algunos ejemplos para valores más grandes de  $n$ , tenemos matrices de colores con una enorme cantidad de simetrías y bellezas, inclusive en algunos casos particulares tenemos los fractales conocidos como *zero fractales*, por ser construidos a partir del elemento neutro (*zero*) del respectivo  $G_n$ . Algunos ejemplos de estos fractales se muestran en la Figura 2 y fueron tomados de: numberphile

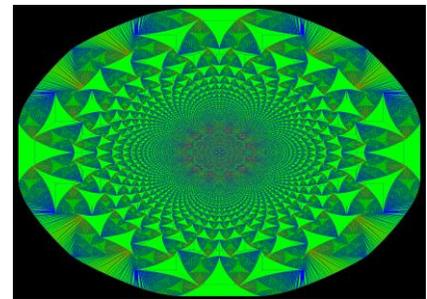
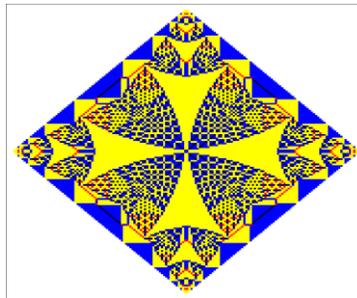
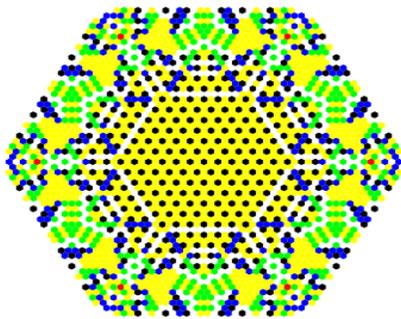


Figura 2. Fractales Zero de matrices de  $n \times n$ .

### Referencias:

Fraleigh, Jonh B. (2000). Abstract Algebra. Addison Wesley Longman, Inc. Obtenido de: <http://people.reed.edu/~davidp/sand/index.html>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 2

### PARADOJA DE RUSSELL Y LOS AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL

Noé Montes López, Emmanuel Ramos Rochel.

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez Del Estado de Durango

. [Elone\\_la30@hotmail.com](mailto:Elone_la30@hotmail.com), [Xzrzalpha@gmail.com](mailto:Xzrzalpha@gmail.com)

## Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática.

La paradoja de Russell o paradoja del barbero, descrita por Bertrand Russell en 1901, demuestra que la teoría original de conjuntos formulada por Cantor y Frege es contradictoria.

Consideremos los casos de conjuntos que son miembros de sí mismos. Un ejemplo es el que supone un conjunto que consta de "ideas abstractas". Dicho conjunto es miembro de sí mismo porque el propio conjunto es una idea abstracta. Otro ejemplo sería una bolsa con bolsas dentro. Por otro lado, un conjunto que consta de "libros" no es miembro de sí mismo porque el conjunto en sí no es un libro. Russell preguntaba (en carta escrita a Frege en 1902), si el conjunto de los conjuntos que no forman parte de sí mismos (es decir, aquel conjunto que engloba a todos aquellos conjuntos que no están incluidos en sí mismos, como el de "libros" en el ejemplo anterior) forma parte de sí mismo. La paradoja consiste en que si no forma parte de sí mismo, pertenece al tipo de conjuntos que no forman parte de sí mismos y por lo tanto forma parte de sí mismo. Es decir, formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo.

Enunciado formal de la paradoja

Llamemos  $M$  al "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros". Es decir

$$M = \{x: x \text{ no está en } x\} \quad (1)$$

Según la teoría de conjuntos de Cantor la ecuación (1) se puede representar como

$$\forall x \quad x \in M \leftrightarrow x \notin x \quad (2)$$

Es decir "Cada conjunto es elemento de  $M$  si y solo si no es elemento de si mismo".

Ahora, suponiendo  $M$  es un conjunto, se puede substituir  $x$  por  $M$  en la ecuación (2), de donde se obtiene

$$M \in M \leftrightarrow M \notin M \quad (3)$$

Es decir que  $M$  es un elemento de  $M$  si y solo si  $M$  no es un elemento de  $M$ , lo cual es absurdo.

Ahora surge un problema bastante más importante de lo que uno puede creer: teniendo en cuenta que todas las Matemáticas se pueden basar en la teoría de conjuntos y podemos encontrar en ella una contradicción de estas dimensiones... ¿cómo se sostiene todo? Los lógicos llegaron a la conclusión que para la teoría de conjuntos en la que están basadas las Matemáticas los conjuntos singulares es decir conjuntos que se contienen a si mismos simplemente no pueden existir. Más tarde llegaron los axiomas de Zermelo-Fraenkel y consiguieron asentar casi definitivamente el tema (el axioma de elección ha dado y sigue dando mucho que hablar).

Durante el siglo XIX algunos matemáticos trataron de llevar a cabo un proceso de formalización de la matemática a partir de la teoría de conjuntos. Gottlob Frege intentó culminar este proceso creando una axiomática de la teoría de conjuntos. Lamentablemente para Frege, Bertrand Russell descubrió en 1901 una contradicción, la llamada paradoja de Russell. Por esto, a principios del siglo XX se realizaron varios intentos alternativos de axiomatizar la teoría de conjuntos.



Los axiomas de Zermelo-Fraenkel, formulados por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, son un sistema axiomático concebido para formular la teoría de conjuntos. Normalmente se abrevian como ZF o en su forma más común, complementados por el axioma de elección (axiom of choice), como ZFC, hoy en día ZFC se ha convertido en el estándar de las teorías axiomáticas de conjuntos.

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel toma como primitivos los conceptos de conjunto y de pertenencia y consta de los ocho axiomas y dos esquemas siguientes:

1. **Axioma de extensionalidad.** Dos conjuntos  $X$  e  $Y$  son iguales (lo que se representa por  $X = Y$ ) únicamente si contienen los mismos elementos. Más formalmente, y en la simbología usual,  $\forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \leftrightarrow X = Y$ .

2. **Axioma del conjunto vacío.** Existe un conjunto (representado por  $\emptyset$ ) sin elementos. Esto es,  $\exists \emptyset \forall a(a \notin \emptyset)$ .

3. **Axioma de pares.** Dados cualesquiera conjuntos  $x$  e  $y$ , existe otro conjunto, representado por  $\{x, y\}$ , cuyos elementos son únicamente  $x$  e  $y$ . Esto es,

$$\forall x, y \exists z \forall a(a \in z \leftrightarrow (a = x \vee a = y)).$$

4. **Axioma de la unión.** Dada cualquier colección de conjuntos  $C$ , existe un conjunto, representado por  $\bigcup C$  llamado unión de  $C$  que contiene todos los elementos de cada conjunto de  $C$ . Esto es,  $\forall x \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z))$ .

5. **Axioma del conjunto potencia.** Para cualquier conjunto  $x$  existe otro conjunto, representado por  $P(x)$ , que contiene todos los subconjuntos de  $x$ . En símbolos,

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall a(a \in z \rightarrow a \in x)).$$

6. **Esquema axiomático de especificación.** Sea  $\sigma(v)$  una fórmula del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos que contenga una variable libre  $v$ . Entonces, para cualquier conjunto  $x$  existe un conjunto  $y$  cuyos elementos son aquellos elementos  $a$  de  $x$  para los que  $\sigma(a)$  satisface. Formalmente,

$$\forall x \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow (a \in x \wedge \sigma(a))).$$

7. **Esquema axiomático de reemplazo.** Si  $\sigma(a, b)$  es un enunciado tal que para cualquier elemento  $a$  de un conjunto  $x$  el conjunto  $y = \{b \mid \sigma(a, b)\}$  existe, entonces existe una función  $f: x \rightarrow y$  tal que  $f(a) = y$ . Formalmente, si  $\forall x \forall y \forall z \exists v(x \in v \wedge (\sigma(x, y) \wedge \sigma(x, z) \rightarrow y = z))$

entonces

$$\exists w \forall y(y \in w \leftrightarrow \exists x(x \in v \wedge \sigma(x, y))).$$

8. **Axioma de infinitud.** Existe un conjunto  $x$  tal que  $\emptyset \in x$  y tal que si  $y \in x$ , entonces  $y \cup \{y\} \in x$ . En símbolos,

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

9. **Axioma de regularidad.** Para todo conjunto no vacío  $x$  existe un conjunto  $y \in x$  tal que  $x \cap y = \emptyset$ . Esto es, en términos formales,

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \notin x))).$$

10. **Axioma de elección.** Dada una familia de conjuntos no vacíos podemos elegir un elemento de cada conjunto. Este axioma puede expresarse de manera equivalente a, dado un conjunto cualquiera  $x$ , existe una función  $f$  que elige un elemento de cada conjunto no vacío de  $x$ :

$$\forall x \exists f: x \rightarrow \cup x, \forall a (a \in x \wedge a \neq \emptyset \rightarrow f(a) \in a).$$

### Referencias

Lucca Ana María Teresa (2017). Comienzos de la teoría de conjuntos. Recuperado de <https://matematics.wordpress.com/2017/04/17/comienzos-de-la-teoria-de-conjuntos/>

Anonimo (2007). Teoría de conjuntos/Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel/Lenguaje de la teoría axiomática de conjuntos. Recuperado de [https://es.wikibooks.org/wiki/Teor%C3%ADa\\_de\\_conjuntos/Teor%C3%ADa\\_de\\_conjuntos\\_de\\_Zermelo-Fraenkel/El\\_lenguaje\\_de\\_la\\_teor%C3%ADa\\_axiom%C3%A1tica\\_de\\_conjuntos](https://es.wikibooks.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_conjuntos/Teor%C3%ADa_de_conjuntos_de_Zermelo-Fraenkel/El_lenguaje_de_la_teor%C3%ADa_axiom%C3%A1tica_de_conjuntos)

Anonimo (2006). La Paradoja de Russell. Recuperado de <https://www.gaussianos.com/la-paradoja-de-russell/>

Gómez José Carlos (2013). La paradoja de Russell. Recuperado de <http://www.matematicasdigitales.com/la-paradoja-del-barbero-de-russell/>

[Programa general](#)

### Ponencia de Divulgación 3

#### INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPLEJA

Juan José Díaz de León, Asesor: Ing. Miguel Ángel González Núñez, contacto:

[juanjo9614@hotmail.com](mailto:juanjo9614@hotmail.com)

Facultad de Ciencias Exactas, UJED.

[juanjo9614@hotmail.com](mailto:juanjo9614@hotmail.com)

Área de la matemática donde se desarrolla: Variable Compleja

A pesar de referirnos al mismo término de derivada visto dentro del cálculo hay algunas nociones que debemos observar para poder adecuarla a su definición dentro de las funciones complejas.

El plano complejo  $C$  se puede considerar isomorfo al plano real  $R^2$ , es decir que geoméricamente ambos comparten diversas propiedades aplicables dentro del otro, pero tienen una estructura diferente de forma en que el punto de  $R^2 (x, y)$  se puede ver como  $z = x + iy$  el cual pertenece a  $C$ , por lo tanto las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en  $R^2$  son válidas en  $C$ .

Esto puede llevar a pensar, a la hora de definir una función sobre  $C$ , que la situación es análoga a la de una función de dos variables reales, ya que si  $z = x + i \cdot y$ , la función  $f(z)$  se puede considerar como una función que depende de las variables reales  $x, y$ .

A la hora de definir la derivada en el plano real  $R^2$ , se utiliza el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al estar trabajando dentro del plano  $C$  podemos olvidar la definición de que la derivada es la pendiente de una recta tangente a una curva, ya que no tiene ese sentido dentro de los complejos.

Dentro de este trabajo se dará una interpretación, de la derivada vista como una transformación desde el plano de los complejos.

Para ello primero habrá que dar interpretación a la función dentro del plano complejo.

Dentro del plano  $Z$  se definen dos puntos  $P$  y  $Q$ , los cuales tienen como números complejos a  $z_0$  y  $z_0 + \Delta z$  respectivamente. (Figura 1.1)

Se define a  $\Delta z$  como el cambio que sufre  $z_0$  para llegar a  $Q$ .

Ahora con eso en cuenta, podemos definir a  $f$  como una función que va del plano  $Z$  al plano  $W$ , así mismo se puede decir que  $w = f(z)$  para todo  $z \in Z$ , le pertenece uno y solo un punto de  $W$ .

Dentro de el plano  $W$  se puede observar que al realizar la transformación definida por  $f$  se obtiene un mapeo diferente de los puntos  $P, Q$  a los cuales llamaremos  $P', Q'$ . Los cuales están definidos por  $w_0$  siendo el vector de coordenadas de  $P'$ , y  $w_0 + \Delta w$  siendo el vector de  $Q'$ . (Figura 1.2)

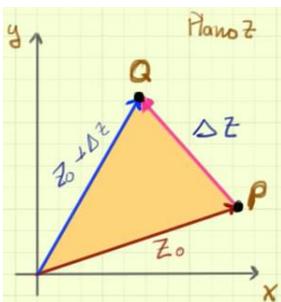
Este último se puede ver como  $Q' = f(z_0 + \Delta z) = w_0 + \Delta w$ , de lo cual se puede obtener  $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ . De esta última parte podemos definir lo cual será nuestra regla para derivar en el plano de los complejos. La cual se vería como:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

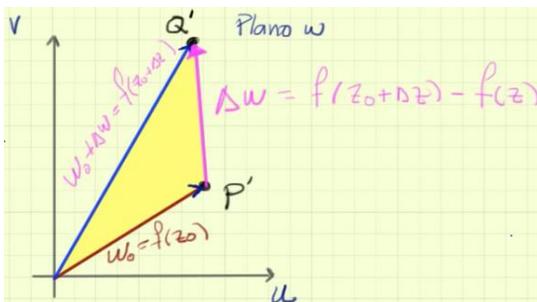
Donde  $\Delta w$  denota el cambio en el valor  $w = f(z)$  correspondiente a un cambio  $\Delta z$  en el punto en el que se evalúa  $f$ .

Con esto ya definido se mostrará la forma de interpretar geoméricamente la derivada dentro del campo de los complejos.

(Figura 1.1) Representación dentro del plano  $Z$ .



(Figura 1.2) Representación dentro del plano  $W$ . Esto es visto como lo sucedido al aplicar la función  $f$  a cada dato del plano  $Z$ .



#### Bibliografía:

Curso de Análisis Complejo – Francisco Javier Pérez Gonzáles, Universidad de Granada, Junio 2004

Derivada e Integral de funciones complejas - <http://rpduarte.fisica.uson.mx/archivos/curso3/03-MetMatFisI.pdf>

Variable Compleja – L.L. Salcedo, Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad de Granada, 20 de Diciembre de 2016

Interpretación geométrica de la derivada en variable compleja (video de YouTube) – [https://www.youtube.com/watch?v=QfvrYT\\_fUdY](https://www.youtube.com/watch?v=QfvrYT_fUdY)

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 4

### NUMEROS COMPLEJOS. APLICACIÓN EN LA VIDA COTIDIANA

Ana Margarita García Terán. Asesor: Dr. José Patricio Sánchez Hernández. Correo electrónico de contacto: [amgiti@hotmail.com](mailto:amgiti@hotmail.com)

Facultad de Ciencias Exactas Universidad Juárez del Estado de Durango.

[amgiti@hotmail.com](mailto:amgiti@hotmail.com)

Área de las matemáticas donde se desarrolla el tema a exponer: fundamentos del álgebra, números complejos.

Los números complejos son una extensión de los números reales y forman el mínimo campo algebraicamente cerrado. El conjunto de los números complejos se designa con la notación  $\mathbb{C}$  siendo  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales se cumple que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$  está estrictamente contenido en  $\mathbb{C}$ ). Los números complejos incluyen todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales, donde hay polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , que no tienen raíces en  $\mathbb{R}$ .

El conjunto de números complejos está formado por los números de la forma  $a + bi$ , donde  $a$  es un número real y  $bi$  un número “imaginario” de la forma  $i = \sqrt{-1}$ .

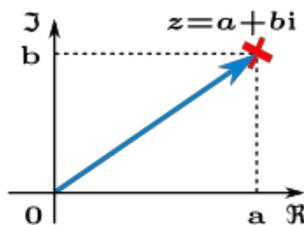
Los números imaginarios tienen características tales como:  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$

Los números complejos tienen dos representaciones:

a) La representación rectangular y b) la representación polar.

-La representación rectangular es la que se vio a un principio, de la forma:

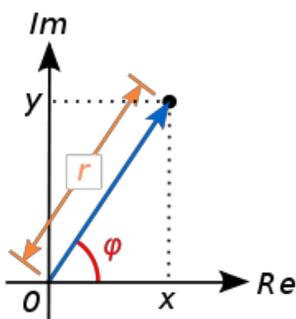
$$z = a + bi$$



Un número complejo es representado como un punto (en rojo) y un vector de posición (azul) en un diagrama de Argand.

-La representación polar consta de un módulo ( $r$ ) y de un argumento (ángulo). Teniendo la siguiente expresión:

$$z = r \cos \phi + ir \sin \phi$$



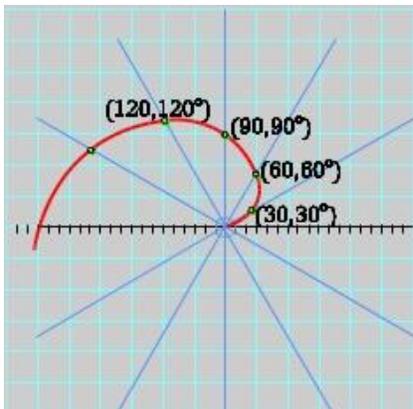
El argumento  $\phi$  y módulo  $r$  localizan un punto en un diagrama de Argand.

Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra, análisis, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, ecuaciones diferenciales, facilitación de cálculo de integrales, en aerodinámica, hidrodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia. Forman parte importante de los métodos matemáticos con los cuales se analizan algunos fenómenos periódicos (Solar Gonzalez, 1999).

Además los números complejos se utilizan por doquier en matemáticas, en muchos campos de la física (notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

En matemáticas, estos números constituyen un campo y, en general, se consideran como puntos del plano: el plano complejo. Este campo contiene a los números reales y los imaginarios puros. Una propiedad importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  soluciones complejas.

### Aplicaciones en la vida cotidiana:

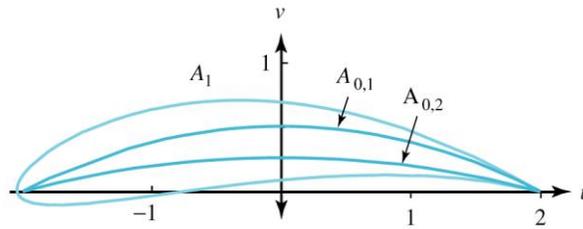


**En navegación**, se usa el siguiente método para ubicar la posición. Se divide el plano complejo en semirrectas que pasan por el origen las cuales están separadas entre sí  $15^\circ$  o  $30^\circ$ . Luego, se marcan los puntos sobre las rectas y se unen con el curvígrafo.

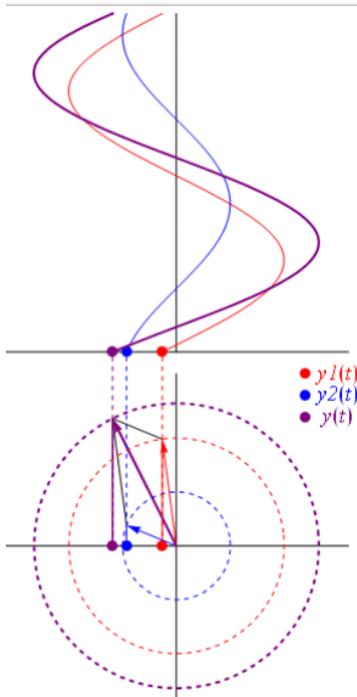
Las coordenadas polares se usan a menudo en navegación, ya que el destino o la dirección del trayecto pueden venir dados por un ángulo y una distancia al objeto considerado. Las aeronaves, por ejemplo, utilizan un sistema de coordenadas polares ligeramente modificado para la navegación (Apostol, 1999).

**Para la aerodinámica** utilizamos los complejos para el diseño de un ala de avión. Es vital tener una sección cuya forma permita que el aire fluya sin turbulencias. Esto solamente se logra si se utilizan las formas aerodinámicas de Joukowski. Las conclusiones de Joukowski sobre formas aerodinámicas son cruciales para el diseño de elementos como por ejemplo las alas de las aeronaves (Swokoski, 1998). Conseguir esto requiere un uso más avanzado del análisis complejo. La idea es calcular la imagen de un conjunto de puntos del plano complejo por la transformación  $f(z) = 1/z + z$ .

En la siguiente imagen consideramos la forma de Joukowski.



**En fasores**

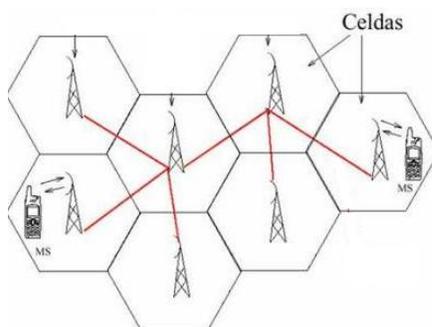


Un fasor es una representación gráfica de un número complejo que se utiliza para representar una oscilación. Los fasores se utilizan directamente en ingeniería eléctrica, óptica, ingeniería de telecomunicaciones y acústica.

Los fasores se usan sobre todo para resolver visualmente problemas del tipo: "existen varias ondas de la misma frecuencia pero fases y amplitudes diferentes interfiriendo en un punto, ¿cuál es la intensidad resultante?". Para solventar este problema, se dibuja un fasor para cada una de las oscilaciones en dicho punto y después se aplica la suma fasorial (similar a la suma vectorial) sobre ellos. La longitud del fasor resultante es la amplitud de la oscilación resultante, y su longitud puede elevarse al cuadrado para obtener la intensidad. Nótese que mientras que la suma de varias oscilaciones sinusoidales no es necesariamente otra oscilación sinusoidal, la suma de varias oscilaciones sinusoidales de la misma frecuencia sí lo es, permitiendo leer la fase resultante como el ángulo del fasor resultante (Swokoski, 1998).

**En comunicaciones**

Todos hemos experimentado el problema de la interferencia cuando hablamos por teléfono. Esta interferencia es causada por el ruido que siempre está presente en las transmisiones y por los errores que se encuentran al recibir una señal. El problema se agrava si una misma vía se utiliza para varias transmisiones simultáneas, situación que es común en las telecomunicaciones modernas. Es decir, por una misma vía “hablan “una multitud de usuarios. A esto se le llama “interferencia”.



La interferencia deteriora la comunicación por el uso “cruzado” de las frecuencias de transmisión. Esto se puede entender pensando en dos celulares conectados a una misma antena.

Es deseable que en el diseño de una red de celulares los equipos transmitan en frecuencias suficientemente distintas como para que se evite esta confusión.

Para diseñar adecuadamente una red móvil, se desarrollaron los sistemas celulares. En ellos, se reparten las frecuencias disponibles y se separan por celdas (hexagonales), además de repetirlas periódicamente. Estos sistemas se generan a partir de una fórmula que es centran en el diseño celular, llamada la fórmula del conglomerado.

Y esta fórmula utiliza números complejos ya que la geometría hexagonal implica que el número de celdas por cada conglomerado satisface una fórmula que solo depende de dos variables:

$N = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$  la cual genera números complejos, y con estos resultantes hay que trabajar (Ortega, 2001).

### Otras aplicaciones:

#### Para el estudio de fractales.

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número no entero.

**En la relatividad especial y la relatividad general**, algunas fórmulas para la métrica del espacio-tiempo son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria. Estas teorías son publicadas por primera vez por Albert Einstein en 1905 y describe la física del movimiento en ausencia de campos gravitacionales.

El campo complejo es igualmente importante **en mecánica cuántica** cuya matemática utiliza Espacios de Hilbert de dimensión infinita sobre  $\mathbb{C}$ .

### Bibliografía

Apostol, T. M. (1999). En *CALCULUS*. Reverte.

Gustafson, R. D. (1997). En *Álgebra Intermedia*. International Thomson Editores, S.A. de C.V.

Ortega, H. L. (2001). En *Aspectos matemáticos de la telefonía celular*. SMM.

Solar Gonzalez, E. (1999). En *ALGEBRA I*. Limusa Noriega.

Swokoski, E. W. (1998). En *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores S.A. de C.V.

[Programa general](#)



## Ponencia de Divulgación 5

### LA CONTROVERSIA DE CANTOR CONTRA KRONECKER EN LA TEORÍA DEL INFINITO

Nélida Marlene Hernández Reyes

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 6

### MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Jafed Alejandro Martínez Sánchez, Héctor Alan Olvera Martínez

M.C Enrique Vargas Betancourt.

Facultad De Ciencias Exactas-UJED.

*jafsed@hotmail.com, alanolvera1234@hotmail.com*

Cálculo Diferencial

Este tema trata de abordar la utilidad de las derivadas en un campo aplicable de la física como lo es en encontrar la velocidad de un objeto tanto en un punto específico de su trayectoria o en un momento específico de tiempo del cual se quiere obtener la velocidad.

Para abordar este tema nos apoyaremos de los temas como derivadas de orden superior y límites de una función vistos en la clase de Cálculo diferencia e integral I.

Comencemos definiendo que es un límite: Decimos que una función tiende hacia un límite  $l$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces  $|f(x) - l| < \varepsilon$  lo cual lo podemos leer de la siguiente manera:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. q. si } 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

También lo podemos ver de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

Por otra parte, definiremos que es una derivada: una función  $f$  es derivable en “a” si

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe. En este caso el límite se denota por  $f'(a)$  y se le llama derivada de “f” en “a”.

Consiguientemente podemos definir derivada de orden superior: Para una función  $f$  podemos considerar su derivada como una nueva función (cuyo dominio puede ser más

“pequeño” que el de  $f$ ) este proceso puede llegar a ser infinito y a las derivadas que se obtienen se les llama derivadas de orden superior.

Ya habiendo definido estos conceptos matemáticos podríamos definir el concepto de velocidad:

Lo que conocemos como velocidad es una magnitud física, a partir de la cual se puede expresar el desplazamiento que realiza un objeto en una unidad determinada de tiempo.

Al igual podemos definir a que nos referimos con movimiento: El movimiento es un cambio de la posición de un cuerpo a lo largo del tiempo respecto de un sistema de referencia.

Para entrar en este maravilloso tema primero tenemos que explicar cómo se expresa la velocidad por medio de una derivada Si un punto se mueve sobre una distancia  $s$ , en un tiempo  $t$  con velocidad uniforme  $v$ , entonces:

$$v = \frac{s}{t}, \text{ de aquí } s = v \cdot t$$

Sean  $(s_1, t_1)$  y  $(s_2, t_2)$  dos pares de valores de  $s$  y  $t$ , tal que

$$s_1 = vt_1 \text{ y } s_2 = vt_2$$

entonces:

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1)$$

Donde:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

El concepto de velocidad media es más general que el de velocidad uniforme para cualquier tipo de movimiento rectilíneo.

La distancia dirigida  $s$ , de un punto  $P$ , desde un origen en un tiempo  $t$ , está dada por

$$s = s(t)$$

Entonces, a la función  $s = \{(t, s) | s = s(t)\}$  se le denomina “función de posición” del punto  $P$  y la velocidad durante el intervalo  $(t_1, t_2)$  se define como:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si  $t_2 - t_1 = h$ , entonces  $t_2 = t_1 + h$  con  $h \neq 0$ , luego  $s(t_2) = s(t_1 + h)$  y la velocidad media de  $P$  durante el intervalo  $(t_1, t_2) = (t_1, t_1 + h)$  es:

$$\frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

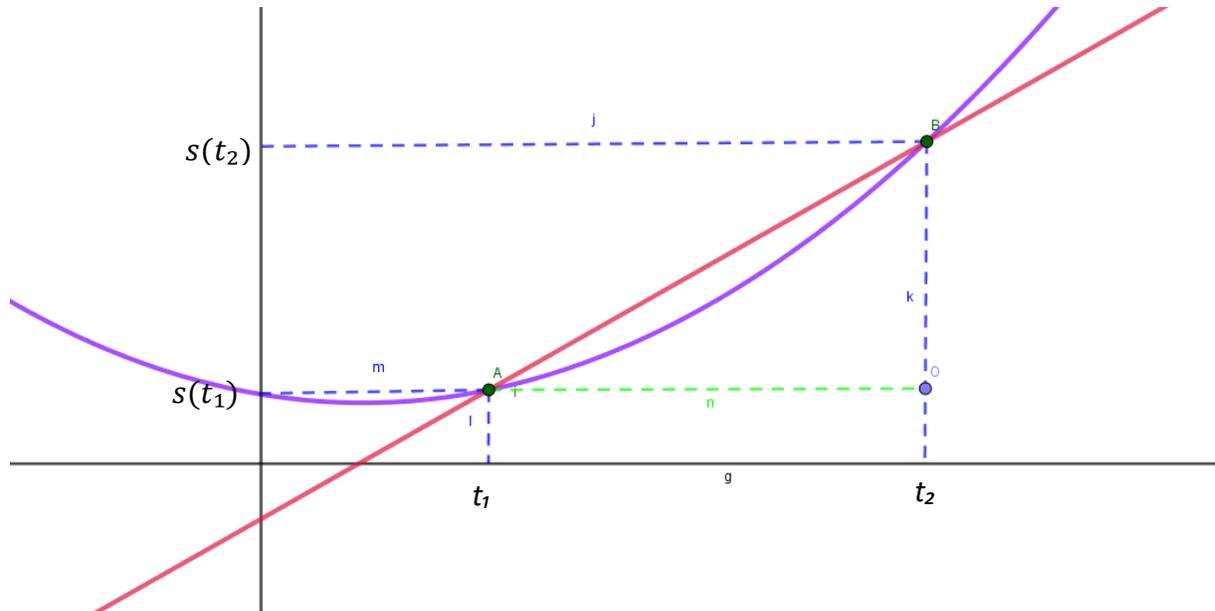
Se obtiene el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

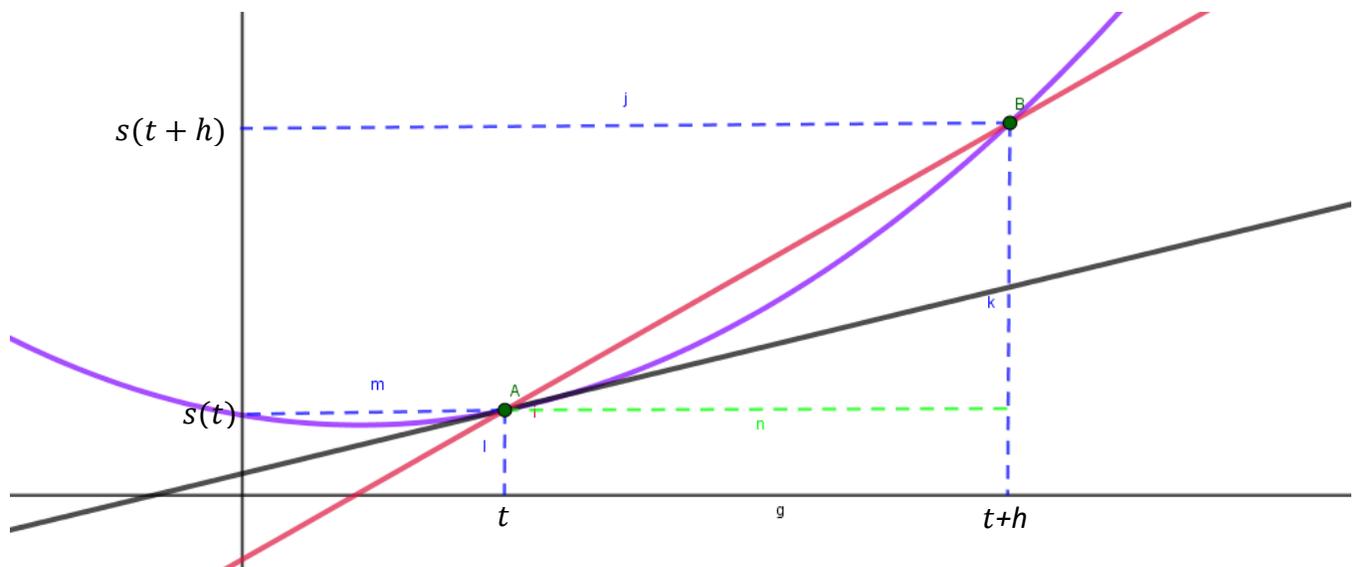
Este límite se llama velocidad instantánea de  $P$  en el tiempo  $t$ .

Podemos mostrar un gráfico que lo exprese de una mejor manera.

Velocidad media



Velocidad instantánea:



Para mostrar su aplicación veamos un problema:

Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por  $f(t) = 500 + 10t^2$ , siendo  $t$  el tiempo medido en horas. Calcular:

1. Velocidad media de crecimiento
2. Velocidad instantánea de crecimiento

3. Velocidad instantánea de crecimiento para  $t=10$ 

Sabemos que la velocidad media la podemos ver como una derivada

$$v_{m(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Así que planteamos la siguiente derivada

$$v_{m(t)} = \frac{500 + 10(t+h)^2 - (500 + 10t^2)}{h}$$

Donde si desarrollamos

$$v_{m(t)} = \frac{500 + 10(t^2 + 2th + h^2) - 500 - 10t^2}{h}$$

$$v_{m(t)} = \frac{500 + 10t^2 + 20th + 10h^2 - 500 - 10t^2}{h}$$

$$v_{m(t)} = \frac{20th + 10h^2}{h}$$

$$v_{m(t)} = \frac{h(20t + 10h)}{h}$$

Donde finalmente concluimos

$$v_{m(t)} = 20t + 10h$$

Para obtener la velocidad instantánea de crecimiento sabemos que está dada por la derivada de la velocidad media de crecimiento por lo que

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Pero esto ya fue previamente calculado por lo que sustituyendo

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (20t + 10h)$$

Obtenemos la velocidad instantánea de crecimiento

$$f'(t) = 20t$$

Y por último calculamos la velocidad instantánea de crecimiento para  $t=10$ .

Para calcular esta velocidad sólo nos queda sustituir este valor en nuestra ecuación de velocidad instantánea de crecimiento.

Si  $t=10$

$$f'(10) = 20(10)$$

$$f'(10) = 200$$

Así pues, obtenemos esta velocidad instantánea de crecimiento para  $t=10$ .

En este trabajo podemos observar una de las muchas aplicaciones que tiene el cálculo diferencial en este caso calculando como ejemplo el crecimiento de bacterias lo cual nos permite reconocer tanto que el cálculo se relaciona íntimamente con la física calculando velocidades tanto como en la biología de tal manera que nos permite predecir ciertos eventos biológicos que se presentan en la naturaleza cabe destacar que estas son solo algunas de las aplicaciones que podemos darle a este tipo de procesos.

Referencias:

Aguilar M., B. V. (2010). *Calculo diferencial*. Mexico: PEARSON EDUCACION.

I., A. (22 de Febrero de 2015). *Youtube*. Obtenido de Youtube:  
[https://www.youtube.com/watch?v=\\_GXXqgq-Vvs](https://www.youtube.com/watch?v=_GXXqgq-Vvs)

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 7

### LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS Y EL UNIVERSO

Salma Celeste Hernández Ibarra, Asesora: MC Adriana Escobedo Bustamante  
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango  
*s.celeste.h@gmail.com*  
Historia y Filosofía

Un poliedro regular es un sólido que tiene vértices, bordes y caras. Si un poliedro tiene como caras a polígonos regulares y si en cada vértice se unen el mismo número de caras, entonces ese poliedro se conoce como *Poliedro regular*, También llamados *Sólidos Platónicos* en honor a Platón, el filósofo griego.

Existen 5 poliedros regulares, los cuales son los siguientes:

- Cubo: Formado por 6 cuadrados, con 3 cuadrados en cada vértice.
- Tetraedro: Formado por 4 triángulos equiláteros, con 3 triángulos en cada vértice.
- Octaedro: Formado por 8 triángulos equiláteros, con 4 triángulos en cada vértice.
- Icosaedro: Formado por 20 triángulos equiláteros, con 5 triángulos en cada vértice.
- Dodecaedro: Formado por 12 pentágonos, con 3 pentágonos en cada vértice.

Los sólidos platónicos son conocidos desde la antigüedad, pero no se estudiaron profundamente hasta tiempos de los griegos. Algunos autores toman a Pitágoras como el primero en estudiar estos poliedros, pero algunas evidencias sugieren que mientras sí estuvo familiarizado con el tetraedro, el cubo y el dodecaedro fueron estudiados por



Theaititos, un contemporáneo de Platón. Theaititos dio una descripción matemática de todos los cinco sólidos.

Una prueba de que son sólo 5 sólidos platónicos en “los elementos” de Euclides. La prueba se basa en el hecho de que si tenemos  $q$  caras de  $p$ -lados regulares que se juntan en un vértice, la suma de los  $q$  ángulos en las  $q$  caras es menos de  $360^\circ$ .

Entre los poliedros regulares existen varias conexiones geométricas. Por ejemplo, el cubo y el octaedro son duales el uno al otro, es decir, existe una relación entre los vértices del cubo y las caras del octaedro, las aristas del cubo y las aristas del octaedro. Similarmente, el icosaedro es dual al dodecaedro, y el tetraedro es dual a sí mismo.

El dodecaedro y su dual, el icosaedro, tienen un lugar especial entre los sólidos platónicos, ya que su geometría está directamente conectada con la sección dorada. Las caras del dodecaedro son pentágonos basados en la sección dorada. Y, si miramos bien al icosaedro podemos ver que cuando cinco triángulos se unen en un vértice, los lados externos producen un pentágono también basado en la sección dorada.

Dentro de la filosofía de Platón, los poliedros regulares son muy importantes; Platón escribió sobre ellos en su diálogo *Timaeus*, en el cual asocia a cada uno con uno de los cuatro “elementos” o “esencias”. El tetraedro simboliza el fuego con una punta hacia arriba; el icosaedro simboliza el agua, al ser el poliedro más “fluido”; el cubo simboliza la tierra, al ser el poliedro más “estable”; el octaedro simboliza el aire, al ser el poliedro más “aéreo”. Por último, el dodecaedro simboliza “el mundo real”, “la razón universal”, y era considerado la figura geométrica principal del universo y el cosmos.

Ciertamente estas no son las formas de los átomos de alguno de los elementos, pero si los podemos encontrar en la forma de algunos átomos compactados o moléculas, principalmente en cristales. Por ejemplo, el cloruro de sodio se muestra en cristales cúbicos, el fluoruro de calcio en octaedros, y la pirita en dodecaedros.

Alrededor de 2000 años después de Platón, Johannes Kepler se interesó de igual manera por estas figuras y las usó para idear su propia teoría cosmológica en su libro *Mysterium Cosmographicum*.

El modelo del sistema solar de Kepler basado en los sólidos platónicos dice:

*“La órbita de la tierra es la medida para todas las órbitas. Colocamos el dodecaedro alrededor de esta. La órbita alrededor del dodecaedro es la de Marte, entonces colocamos el tetraedro alrededor de esta. La órbita alrededor del tetraedro es la de Júpiter, alrededor de esta colocamos el cubo. La órbita alrededor del cubo es la de Saturno. Luego colocamos el icosaedro dentro de la órbita de la tierra. La órbita dentro del icosaedro es la de Venus. Colocamos el octaedro dentro de la órbita de Venus. La órbita dentro del octaedro es la de Mercurio.”* (Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596)

Este modelo le dio a Kepler la oportunidad de juntar a todos los sólidos platónicos para que se pudieran unir con los planetas conocidos. Después de esto Kepler obtuvo el derecho de decir que comprendía el universo.



Una vez hecho, Kepler mandó su *Mysterium Cosmographicum* a Galileo y Brahe, y por parte de ambos recibió respuestas reafirmantes de su modelo. Animado con esto, se dirigió al tribunal del duque de Wurttemberg con la esperanza de obtener los medios para la creación de su modelo del universo, *la taza cósmica*, en plata. Como respuesta el duque le recomendó que primero hiciera el modelo en cobre.

Ciertamente la creación de la *taza cósmica* fue un gran éxito para el astrónomo, puesto que le había otorgado cierto renombre científico. Sin embargo, este logro estaba incompleto y era de cierta manera dudoso, porque el objetivo de Kepler no se había alcanzado.

El modelo de Kepler estaba basado en la suposición de que el movimiento planetario es esférico. Después de obtener datos de las observaciones de Brahe, y hacer sus propias observaciones, Kepler decidió rechazar los modelos astronómicos de Ptolomeo y Copérnico, e incluso sus propios modelos. Y llegó a la siguiente conclusión.

*“El hecho de que el movimiento planetario es circular está confirmado por su recurrencia incesante. El intelecto humano, al obtener esta verdad por medio de la experiencia, concluye de manera inmediata que los planetas rotan en los círculos “ideales”, ya que, entre todas las figuras planas, el círculo es la más perfecta. Sin embargo, después de un estudio más detallado podemos concluir que la experiencia da otro resultado, es decir, las órbitas planetarias difieren de simples círculos.”* (Kepler, *Astronomia Nova*, 1609)

El resultado de este trabajo es presentado en el libro “A new astronomy based on the causes, or physics of the heavens” (Una nueva astronomía basada en las causas, o física de los cielos). La importancia de este libro consiste en que, en este, Kepler formula las primeras dos de tres leyes astronómicas que llevan su nombre. La primera de ellas enuncia que la órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de los focos; La segunda ley enuncia que las áreas cubiertas por los radiovectores de los planetas son constantes.

### **Bibliografía**

- Anglin, W. S. (2012). *Mathematics: A Concise History and Philosophy*. Springer Science & Business Media.
- Hargittai, I. (2016). *Symmetry 2: Unifying Human Understanding, VOL 12 of International Series in Modern Applied Mathematics and Computer Science*. Elsevier.
- Kepler, J. (1596). *Mysterium Cosmographicum*.
- Kepler, J. (1609). *Astronomia Nova*.
- Stakhov, A. (2009). *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science*. World Scientific.

[Programa general](#)



## Ponencia de Divulgación 8

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 9

### CASOS Y CONTROLES

Cecilia Gamboa Heredia

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 10

### VARIACIONES DE LA ÓRBITA GALÁCTICA

Erik Assael Beltrán Hernández – [erick\\_behe@hotmail.com](mailto:erick_behe@hotmail.com)

Facultad De Ciencias Exactas de la UJED.

[erick\\_behe@hotmail.com](mailto:erick_behe@hotmail.com)

Astronomía

La Vía Láctea tiene la forma de una lenteja, y en ella podemos distinguir entre un plano galáctico donde se encuentran la mayor parte de las estrellas de una galaxia con forma aplanada y un centro galáctico, el centro de rotación de las galaxias.

Casi toda la masa galáctica se encuentra concentrada en el centro, y la mayor parte del resto en el plano.

El Sol, atraído por el centro galáctico, viajará a su alrededor en 230 miles millones de años.

Pero el Sol no se encuentra JUSTO en el plano galáctico sino algo por encima de la mayor parte de las estrellas. Siendo así, la órbita galáctica haría que el Sol atravesara el plano galáctico tal como un péndulo atraviesa su centro de equilibrio. Pero con una particularidad.

Si toda la masa de la Galaxia se encontrara concentrada en el centro, la órbita del Sol a su alrededor sería una elipse perfecta, similar a la de la Luna alrededor de la Tierra. No existiría el plano galáctico, así que el único plano que tendría importancia sería el plano orbital del Sol alrededor del centro de la Galaxia.

Si, en cambio, no existiera centro galáctico, si toda la masa de la Vía Láctea se encontrara dispuesta en un plano y el Sol se encontrara sobre dicho plano, la atracción de



la masa galáctica haría que el Sol sufriera una aceleración hacia el plano galáctico, lo atravesaría y, tras alcanzar, al otro lado, la misma distancia que tenía originalmente, volvería a caer sobre el plano hasta volverlo a atravesar, en un movimiento oscilante que, de no encontrar ningún obstáculo en su camino, continuaría durante muchos millones de años.

Si al principio de este experimento mental el Sol hubiera estado detenido respecto al plano galáctico, su movimiento hubiera sido similar al de una pelota atada a un muelle, con la Tierra subiendo y bajando desde su punto de equilibrio, atravesando varias veces el plano galáctico y perdiendo energía en cada rebote hasta quedar en equilibrio justo en el plano galáctico.

Si en vez de iniciar este experimento mental con un Sol detenido respecto a la galaxia, lo iniciamos con un Sol desplazándose a 220 Km/s, la trayectoria del Sol seguiría una línea ondulada sinusoidal, tal como la representación de una onda de radio.

Pero existe un centro galáctico y existe un plano galáctico, y debido a ello el recorrido que sigue el Sol alrededor de la Vía Láctea es una combinación de ambas curvas: Una onda sinusoidal que atraviesa el plano galáctico varias veces mientras viaja en una elipse alrededor del centro galáctico

¿Tiene todo esto alguna importancia para nosotros?

Aparentemente sí. Y la importancia viene dada por la cantidad de rayos cósmicos que llegan a la Tierra.

Cuando atravesamos un brazo galáctico y/o nos acercamos al centro galáctico estamos en una zona de mayor densidad estelar, por tanto recibimos más rayos cósmicos de estrellas vecinas.

Por contra, cuando estamos más lejos del centro galáctico y/o entre dos brazos espirales, recibimos menos rayos cósmicos.

También influye cuando atravesamos el plano galáctico, una zona de mayor densidad estelar pero que, al mismo tiempo, actúa como escudo contra las radiaciones cósmicas del centro de la galaxia. Durante un breve período, unos pocos millones de años dentro de un período de 30 millones, la cantidad de rayos cósmicos procedentes del centro de la galaxia debe reducirse de forma muy acusada. En cambio, cuando estamos por encima o por debajo del plano galáctico, recibiremos con mayor intensidad las radiaciones cósmicas procedentes del resto de la galaxia.

Algunos de estos movimientos son periódicos, otros irregulares, pero todos afectan a la cantidad de rayos cósmicos que recibe la Tierra.

Y según una reciente teoría, aún no confirmada pero bastante plausible, los rayos cósmicos son los que regulan el clima global de la Tierra.

Más rayos cósmicos, al caer en la Tierra, crean iones en la atmósfera que facilitan la formación de nubes. Más nubes, significa que la Tierra recibe menos calor solar, y por tanto se enfría.

Menos rayos cósmicos formarán menos nubes, la Tierra recibirá más radiación solar y se calentará.

Eso significa que el clima de la Tierra puede calentarse bastante más cuando estamos entre dos brazos espirales, más lejos del centro galáctico, y justo estamos atravesando el plano galáctico.

En cambio se enfriará cuando recibamos más rayos cósmicos, dentro de un brazo espiral, más cerca del centro galáctico y bastante por encima o por debajo del plano galáctico.

Utilizando la exponencial, seno y coseno como ayuda para entender la rotación de las galaxias tanto como la fórmula de la escalera de la gravedad que se verá en su momento con ayuda del programa de Geogebra a estimar en si el comportamiento de las galaxias.

Bibliografía:

[http://www.maslibertad.com/La-Orbita-del-Sistema-Solar-en-la-Galaxia\\_p154.html](http://www.maslibertad.com/La-Orbita-del-Sistema-Solar-en-la-Galaxia_p154.html)

Astronomía esférica y mecánica celeste - Jorge Núñez de Murga, Juan José de Orús Navarro y M. Asunción Català Poch

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 11

### AGUJEROS NEGROS NUMÉRICOS

Laura Margarita Hernández, Martin Pulido Castañeda

Facultad de Ciencias Exactas-UJED

*[laura.m.hernandez.e@hotmail.com](mailto:laura.m.hernandez.e@hotmail.com), [martinpulido@rocketmail.com](mailto:martinpulido@rocketmail.com)*

Teoría de números

Dentro de las matemáticas (teoría de números) existen casos curiosos que introducen a los matemáticos y a otros interesados a querer averiguar más sobre estos. En particular, del que hablaremos a continuación. Se van a tratar algunos casos de propiedades de los naturales, en lo que se trata de “**Agujeros Negros Numéricos**”, nombre acuñado por el autor del artículo que leí el cual me interesó por este tema, y el que quise respetar. Estos son algo así como números que, después de unas sencillas operaciones, se logra llegar a unos números fijos que son los que terminan “atrayendo” o “consumiendo” a los demás anteriores.

Para dar muestra a esta propiedad, tomamos un número cualquiera de cuatro cifras con cada una de sus cifras diferentes, por ejemplo, el 4272. Luego, construimos el número más grande con estos dígitos, que en este caso sería el 7422, y el más pequeño posible, que ahora sería el 2247.

Luego de esto, solo quedaría restarlos, por lo que tendremos que

$$7422 - 2247 = 5175$$

Entonces, repetimos el proceso con el resultado obtenido.



Para el caso donde resulte un número de tres cifras, se agrega un cero a la izquierda para poder formar después números de cuatro cifras.

Siguiendo nuestro ejemplo tenemos que

$$7551 - 1557 = 5994$$

Se realiza de nuevo el proceso, las veces que sean necesaria, por lo que

$$9954 - 4599 = 5355$$

$$5553 - 3555 = 1998$$

$$9981 - 1899 = 8082$$

$$8820 - 0288 = 8532$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

Este número, el 6174, es lo que genera esta curiosa propiedad, ya que, siempre, sea cual sea el número inicial, llegarás al número 6174, y ya no saldrás de él, por que

$$7641 - 1467 = 6174$$

Entonces, este número acaba absorbiendo a todos los números naturales de cuatro cifras como si fuera un agujero negro, numérico en este caso.

Este número 6174 se conoce como **constante de Kaprekar**, ya que fue el matemático indio **Rattatreya Ramachandra Kaprekar** quien lo descubrió.

Más concretamente, 6174 es la constante de Kaprekar para cuatro cifras, ya que para número con otras cantidades de cifras podemos probar a realizar el mismo procedimiento y ver qué ocurre.

Y este no es solo un ejemplo de estos “**Agujeros Negros Numéricos**”.

Ahora tomemos un número natural cualquiera, de cualesquiera cifras. Cuenta ahora cuántas de esas cifras son pares y cuántas son impares. Luego, forma otro número colocando primero la cantidad de cifras pares, después la cantidad de impares y a continuación la cantidad total de cifras que tenía el número inicial. Para el caso donde se presenten ceros, los tomaremos como números pares.

Repite el proceso todas las veces posibles.

En este caso, tomemos el número

64352527766131342527686724243548794

Tiene 19 cifras pares

**64352527766131342527686724243548794**

y 16 cifras impares

**64352527766131342527686724243548794**

Como tiene 35 cifras en total, obtenemos el número siguiente:

191635

Ahora tenemos 1 cifras pares, 5 impares y 6 cifras en total, con lo que obtenemos el número:

156

Repetimos el proceso. Ahora hay 1 cifra par, 2 cifras impares y 3 cifras en total, llegando al 123. Y de aquí no salimos, ya que volvemos a tener 1 par, 2 impares y 3 en total, con lo que llegaríamos de nuevo al 123.

Este número 123 se traga a todos los números naturales, independientemente del número de cifras.

Estos y otros ejemplo de “**Agujeros Negros Numéricos**” existen, por si alguien más se interesa, puede investigarse fácilmente por internet.

## BIBLIOGRAFÍA

[https://es.m.wikipedia.org/wiki/Constante\\_de\\_Kaprekar](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Kaprekar)

[https://www.google.com.mx/amp/s/elpais.com/elpais/2017/11/01/el\\_aleph/1509554449\\_934264.amp.html](https://www.google.com.mx/amp/s/elpais.com/elpais/2017/11/01/el_aleph/1509554449_934264.amp.html)

<https://www.aceptaelreto.com/problem/statement.php?id=100>

<http://www.kumon.es/blog/magia-con-matematicas-6174-o-la-constante-de-kaprekar/>

<https://www.gaussianos.com/la-constante-de-kaprekar/>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 12

### EL PROBLEMA DE LAS PARALELAS

Jesús Alejandro López Montiel, Asesora: Yaziel Pacheco Juárez.

yazi28@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED

alejandro\_sant@hotmail.com Área: Historia de las matemáticas y geometría

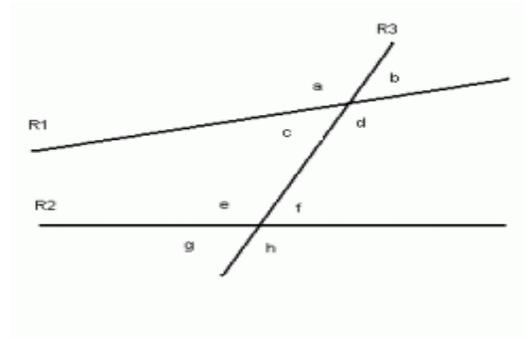
### Introducción.

Todo comienza alrededor del año 300 a. C con Euclides y su obra Los Elementos, en la cual se exponen una serie de postulados formales de lo que más tarde se llamaría: “Geometría euclideana“. La geometría euclideana es la geometría que todos intuimos de forma natural en el plano, con axiomas del tipo: “por dos puntos pasa una y sólo una una recta“. Los postulados de Euclides representan los axiomas fundamentales a partir de los cuales se puede construir cualquier teorema geométrico.

El quinto postulado de Euclides era un poco más complicado que los otros y decía que:



“Si una recta al cortar a otras dos forma ángulos internos menores a un ángulo recto, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan por lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.”



Hoy es más usual ver este quinto postulado en su forma equivalente:

*Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.*

Durante más de dos milenios se mantuvo una pregunta en el aire:

¿Se podía deducir o demostrar el quinto postulado de los otros cuatro postulados previos?.

A este problema de demostrar que el quinto postulado se deducía de los otros 4 se le llamó “**El problema de las paralelas**”.

### **Historia del desarrollo del problema.**

Este postulado no satisfacía a Euclides, pensaba que el 5to. postulado se podía demostrar, es decir, que se podía deducir de los otros 4. Un postulado o axioma es por definición indemostrable, es una verdad dada a priori a partir de la cual construimos el resto del “castillo” matemático. Sin embargo, la indemostrabilidad del quinto postulado no era tan fácil de aceptar. Parecía indicar la imposibilidad de demostrar que dos rectas paralelas no se cortarían nunca. Esto recuerda al problema metafísico del infinito.

Durante muchos siglos para todos parecía que el quinto postulado era un axioma deducible o demostrable a partir de los otros cuatro postulados. Sin embargo, Euclides no pudo demostrarlo. Ptolomeo (siglo II d. C) y Proclo (siglo V d. C) presentaron demostraciones, que más tarde se probaría que eran falsas. John Wallis también trató de demostrarlo en el año 1663. Para ello Wallis suponía que dado un triángulo siempre existían triángulos similares a éste y no congruentes. Sin embargo, más tarde se descubriría que esta suposición es equivalente al 5to. Postulado. En 1697 el Italiano Girolamo Saccheri también lo intentó, suponiendo que el 5to. postulado era falso y quería llegar a una contradicción.

Posteriormente, el suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777) siguió el mismo método que Saccheri, pero sin tratar de llegar a una contradicción. Noto que en esta nueva geometría en la que no se cumple el quinto postulado, la suma de los ángulos interiores de un triángulo no era  $180^\circ$  y, de hecho, que dicha suma cambiaba cuando el área incrementaba. De 1794 hasta 1823, también intentó, sin éxito, demostrar el quinto postulado.

Al llevar más de dos milenios sin poder resolver el problema de las paralelas, en 1767 d’Alembert llamó a esto: “*El escándalo de la geometría elemental*”.

**Karl Friedrich Gauss (1777-1855).**

Fue un matemático alemán considerado un genio. Fue el primero en entender el problema de las paralelas y trabajó en secreto en ello en 1792 a los 15 años de edad. En 1817, al contrario de todos los anteriores, estaba convencido de que **el quinto postulado era independiente de los otros 4.**

**Janos Bolyai (1802-1860).**

Fue un matemático húngaro. Su padre Farkas Bolyai era matemático y amigo de Gauss. Janos mostró interés por resolver el problema de las paralelas, a lo que Farkas, su padre, aconsejó no intentar. Sin embargo Janos no siguió este consejo y supuso que una geometría sin el 5to. postulado era posible. En 1823 descubrió varios resultados y exclamó:

*“he descubierto un mundo nuevo de la nada”.*

En 1832 publicó de un escrito con entre 24 y 26 páginas. Gauss leyó dicho trabajo y escribió en una carta a Farkas:

*“Alabarle sería como alabarme a mi mismo. Los resultados que ha obtenido coinciden casi exactamente con mis meditaciones de entre 30 y 35 años”.*

Al leer esto Janos se sintió decepcionado y nunca volvió a publicar. Esto pudo ser diferente si él hubiera leído el siguiente párrafo de la carta de Gauss: *“tengo a este joven geómetra Bolyai por un genio de primera magnitud”.* Bolyai era un genio incomprendido que murió en la pobreza sin conocer los alcances de su trabajo.

**Nikolai Lobachevski (1792 - 1856).**

Matemático ruso considerado, junto con Gauss y Bolyai, como uno de los fundadores de la geometría hiperbólica. En 1829 publicó una obra sobre geometría no euclidea y en 1840 publicó un escrito de 61 páginas sobre el problema teorema de las Paralelas. La historia lo premia dándole su nombre a la geometría que descubrió.

**Bernhard Riemann ([1826](#) - [1866](#))**

Matemático alemán que descubrió la geometría “esférica”, en la cual las rectas paralelas son imposibles. Vio la geometría como un espacio con suficiente estructura adicional como para medir. Estas geometrías correspondían a espacios de curvatura positiva (como la esfera) o de curvatura negativa (como el paraboloides hiperbólico). La geometría euclidiana clásica correspondería a un espacio de curvatura cero (como en el espacio “plano”).

**Importancia de las Geometrías no Euclidianas.**

Una pregunta natural es: ¿qué geometría es más útil para entender el mundo físico y en qué casos conviene utilizar una u otra?

Resulta que, el quinto postulado se puede hacer equivalente al teorema de Pitágoras. Así que, el teorema de Pitágoras podemos considerarlo una definición axiomática válida en espacios de geometría plana. Esto es en parte porque, como ya mencionamos, un

triángulo en geometría no-euclidiana no cumple el teorema que la suma de sus tres ángulos internos es 180 grados.

Evidentemente la geometría usual, la euclidiana, es muy útil. Sin embargo, si tuviéramos que hacer operaciones geométricas sobre grandes distancias en la Tierra sería conveniente utilizar la geometría esférica, ya que la Tierra se parece más a una esfera que un plano.

Mucho más interesante es la pregunta sobre la geometría del universo. Si lanzamos dos rayos de luz perfectamente paralelos ¿se mantendrán paralelos (espacio plano), se cortarán (espacio de curvatura positiva) o se alejarán (espacio de curvatura negativa)? Einstein se apoyó en la geometría no-euclidiana para desarrollar la Teoría de la Relatividad General. Los rayos de luz siguen trayectorias en función de la curvatura del espacio, y la curvatura depende de la masa y la energía. Según Einstein, si conocemos la distribución de la masa y la energía en el Universo conoceremos su geometría en cada punto del mismo y por lo tanto la forma en la que se mueven y aceleran los objetos.

La cosmología intenta resolver cual es el valor global de la curvatura del Universo, si es plano, cerrado (curvatura positiva) o abierto (curvatura negativa) y de momento todos los indicadores apuntan a un universo prácticamente plano cuya expansión se está acelerando. Pero esta es otra historia para otra plática.

#### **Bibliografía.**

Howard Eves. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Dover Publications Inc., Mineola New York 1997.

Santiago Fernández, *El problema de las Paralelas*, Seminario sobre historia de las Matemáticas, 2016 <https://es.slideshare.net/Arqui/tema2-el-problema-de-las-paralelas>.

[Programa general](#)

## **Ponencia de Divulgación 13**

### **EMPLEO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN LA DESCRIPCIÓN Y USO DEL MODELO LINEAL GENERAL**

Carlos Omar Silva Aguirre. Asesora: Alejandra Soria Pérez. [cradle\\_kako@hotmail.com](mailto:cradle_kako@hotmail.com)  
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango.

[cradle\\_kako@hotmail.com](mailto:cradle_kako@hotmail.com)

Estadística.

Existen varias distribuciones de probabilidad de variable continua, una de las que se presentan con más frecuencia en fenómenos reales es la distribución normal, también conocida como distribución de Gauss o distribución gaussiana. La gráfica de su función de



densidad de probabilidades (fdp), curva conocida como campana de Gauss, se caracteriza por su forma acampanada y por ser simétrica con respecto a un determinado intervalo estadístico. Esta distribución es muy importante ya que nos permite crear modelos para fenómenos naturales, sociales, psicológicos, entre otros más. (Fundación Wikimedia, Inc., 2017)

Habiendo dado la anterior descripción sobre lo que es la distribución normal, ahora se hará mención de algunas definiciones importantes que ayudaran.

Sea  $\varepsilon$  un experimento y  $S$  un espacio muestral que se asocia al experimento. Si tenemos una función  $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ , que asigna a cada uno de los elementos  $s$  de  $S$  un número real  $X(s)$ , a esta función se le llama *variable aleatoria*.

$X$  es una *variable aleatoria continua* (vac) si existe una función  $f$  llamada función de densidad de probabilidades (fdp) de  $X$  la cual satisface las siguientes condiciones:

- a)  $f(x) \geq 0, \forall x$
- b)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- c) Para cualesquiera  $a, b$  tales que  $-\infty < a < b < \infty$  tenemos que  $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Una *función de densidad de probabilidad* (fdp) caracteriza el comportamiento probable de una población, en tanto especifica la posibilidad relativa de que una variable aleatoria continua  $X$  tome un valor cercano a  $x$ .

La fdp que define a la distribución normal es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Con  $-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty$  y  $\sigma \geq 0$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria continua. Se define una *función de distribución acumulativa*  $F$  (FDA) de  $X$  como

$$F(x) = P(X \leq x)$$

En donde  $X$  tiene una fdp  $f$ , entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

Para una variable aleatoria continua, en específico para la distribución normal, los valores que toman sus parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ , coinciden con la esperanza y la varianza de  $X$ , respectivamente.

Sea  $X$  una vac con fdp  $f$ . La *esperanza* o también llamado valor esperado de  $X$ , se define como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Dada la definición la esperanza, y por propiedades de la varianza esta se definirá como

$$V(x) = E[x - E(x)]^2$$

Ahora, supongamos que  $X$  tiene distribución normal  $N(0,1)$ , luego

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Esta integral no puede evaluarse por métodos ordinarios, esto se debe a que no se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo ya que no podemos encontrar una función cuya derivada sea  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Sin embargo, los métodos de integración numérica pueden usarse para evaluar integrales de la forma anterior, y de hecho ha sido tabulado  $P(X \leq s)$ .

La fda de la distribución normal estandarizada se denota permanentemente como  $\Phi$ . esto es

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

El *teorema del límite central* nos dice lo siguiente: Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes con  $E(X_i) = \mu_i$  y  $V(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$ . Sea  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ; entonces, en ciertas condiciones generales

$$Z_n = \frac{X - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

Tiene aproximadamente la distribución  $N(0,1)$ . Es decir, si  $G_n$  es la fda de la variable aleatoria  $Z_n$ , tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z) = \Phi(z)$ . (Meyer, 1970).

Para el *modelo lineal general (mlg)* existen los siguientes 7 supuestos:

Modelo de regresión lineal: El modelo de regresión es *lineal en los parámetros*, aunque puede o no ser lineal en las variables. Es decir, el modelo de regresión como se muestra en la siguiente ecuación

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

Este modelo puede extenderse para incluir más variables explicativas.

Valores fijos de  $X$ , o valores de  $X$  independientes del término de error: Los valores que toma la regresora  $X$  pueden considerarse fijos en muestras repetidas (el caso de la regresora fija), o haber sido muestreados junto con la variable dependiente  $Y$  (el caso de la regresora estocástica). En el segundo caso se supone que la(s) variable(s)  $X$  y el término de error son independientes, esto es,  $\text{cov}(X_i, u_i) = 0$ .

El valor medio de la perturbación  $u_i$  es igual a cero: Dado el valor de  $X_i$ , la media o el valor esperado del término de perturbación aleatoria  $u_i$  es cero. Simbólicamente, tenemos que

$$E(u_i | X_i) = 0$$



O, si  $X$  no es estocástica,

$$E(u_i) = 0.$$

Homocedasticidad o varianza constante de  $u_i$ : La varianza del término de error, o de perturbación, es la misma sin importar el valor de  $X$ . Simbólicamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{var}(u_i) &= E[u_i - E(u_i|X_i)]^2 \\ &= E(u_i^2|X_i) \text{ Por el supuesto 3} \\ &= E(u_i^2), \text{ si } X_i \text{ son variables no estocásticas} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

No hay autocorrelación entre las perturbaciones: Dados dos valores cualesquiera de  $X$ ,  $X_i$  y  $X_j$  ( $i \neq j$ ), la correlación entre dos  $u_i$  y  $u_j$  cualesquiera ( $i \neq j$ ) es cero. En pocas palabras, estas observaciones se muestrean de manera independiente. Simbólicamente,

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, u_j | X_i X_j) &= 0 \\ \text{cov}(u_i, u_j) &= 0, \text{ si } N \text{ no es estocástica} \end{aligned}$$

Donde  $i \neq j$ .

El número de observaciones  $n$  debe ser mayor que el número de parámetros por estimar: Sucesivamente, el número de observaciones  $n$  debe ser mayor que el número de variables explicativas.

La naturaleza de las variables  $X$ : No todos los valores  $X$  en una muestra determinada deben ser iguales. Técnicamente,  $\text{var}(X)$  debe ser un número positivo. Además, no puede haber valores atípicos de la variable  $X$ , es decir, valores muy grandes en relación con el resto de las observaciones.

Si a los supuestos del modelo lineal general (mlg) antes mencionados, se añade el supuesto de normalidad para  $u_i$ , obtenemos lo que se conoce como *modelo clásico de regresión lineal normal (MCRLN)*.

El modelo clásico de regresión lineal normal supone que cada  $u_i$  está *normalmente distribuida* con:

$$\text{Media: } E(u_i) = 0$$

$$\text{Varianza: } E[u_i - E(u_i)]^2 = E(u_i^2) = \sigma^2$$

$$\text{cov}(u_i, u_j): E\{[(u_i - E(u_i))] [u_j - E(u_j)]\} = E(u_i u_j) = 0, i \neq j.$$

Estos supuestos se expresan en forma más compacta como

$$u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Las razones para el uso del supuesto de normalidad para  $u_i$  son las siguientes:



$u_i$  representa la influencia combinada (sobre la variable dependiente) de un gran número de variables independientes que no se introdujeron explícitamente en el modelo de regresión. Se espera que la influencia de estas variables omitidas o descartadas sea pequeña y, en el mejor de los casos, aleatoria. Ahora, gracias al *teorema del límite central* en estadística, se puede demostrar que, si existe un gran número de variables aleatorias independientes con idéntica distribución, entonces, con pocas excepciones, la distribución de su suma tiende a ser normal a medida que se incrementa al infinito el número de tales variables. Este teorema del límite central es el que proporciona una justificación teórica para el supuesto de normalidad de  $u_i$ .

Una variante del teorema del límite central establece que, aunque el número de variables no sea muy grande, o si estas variables no son estrictamente independientes, su suma puede estar aun normalmente distribuida.

Con el supuesto de normalidad, se derivan con facilidad las distribuciones de probabilidad de los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), pues, una propiedad de la distribución normal es que cualquier función lineal de variables normalmente distribuidas estará también normalmente distribuida. Como ya analizamos, los estimadores de MCO  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  son funciones lineales de  $u_i$ . Por consiguiente, si  $u_i$  está normalmente distribuida, también lo están  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$ , lo cual hace que la tarea de probar hipótesis sea muy fácil.

La normal es una distribución comparativamente sencilla y requiere sólo dos parámetros (la media y la varianza); es muy conocida y sus propiedades teóricas se han estudiado con amplitud en estadística matemática. Además, al parecer muchos fenómenos se rigen por la distribución normal.

Si trabajamos con una muestra de datos que contenga 100 o menos observaciones, la suposición de normalidad desempeña un papel relevante. Permite utilizar las pruebas estadísticas  $t$ ,  $F$  y  $\chi^2$  para los modelos de regresión. Ahora, si el tamaño de la muestra es razonablemente grande, se puede flexibilizar el supuesto de normalidad.

En muestras grandes, los estadísticos  $t$  y  $F$  tienen aproximadamente las distribuciones de probabilidad de  $t$  y  $F$ , por lo que estas pruebas que se basan en el supuesto de que el término de error está distribuido normalmente pueden seguir aplicándose con validez. En la actualidad hay muchos datos transversales y de series de tiempo con una cantidad relativamente grande de observaciones. Por tanto, el supuesto de normalidad puede no ser tan crucial en conjuntos grandes de datos. (Gujarati & Porter, 2010).

## Bibliografía

Fundación Wikimedia, Inc. (3 de Noviembre de 2017). *Wikipedia*. Recuperado el 6 de Noviembre de 2017, de [https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n\\_normal](https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_normal)

Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2010). *EConometría* (5ta ed.). McGraw Hill.

Meyer, P. L. (1970). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Addison Wesley.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 14

### APLICACIONES A LOS COHETES

Omar Dozal Alcantar, asesor del trabajo: Dr. Saúl Nevárez Nieto

VI\_blackblood\_IX@hotmail.com

FACE UJED

VI\_blackblood\_IX@hotmail.com

Área de las matemáticas: física

Un cohete se mueve por la expulsión hacia atrás de una masa de gas formada al quemar un combustible. Este rechazo de masa tiene el efecto de aumentar la velocidad hacia adelante del cohete, permitiendo así continuar hacia adelante. Para considerar el movimiento de cohetes, debemos tratar la noción de un objeto cuya masa es cambiante. La fuerza neta actuando sobre un objeto es igual a la tasa de cambio en momentum (segunda ley de Newton). Usaremos esto para encontrar la ley de movimiento de un cohete. Suponga que la masa total de un cohete en un tiempo  $t$  es  $M$  y que en un tiempo más tarde  $t + \Delta t$  la masa es  $M + \Delta M$ , esto es, una masa  $-\Delta M$  de gas se ha expelido por la parte de atrás del cohete (note que la masa de gas expelido en el tiempo  $\Delta t$  es  $-\Delta M$ , puesto que  $\Delta M$  es una cantidad negativa). Suponga que la velocidad del cohete relativa a la Tierra en tiempo  $t$  es  $V$  y en tiempo  $t + \Delta t$  es  $V + \Delta V$ , y tomemos la dirección hacia arriba del cohete como positiva. El gas expelido tendrá velocidad  $V + u$  relativa a la Tierra, donde  $u$  es una cantidad negativa, de modo que  $-v$  representa la magnitud real de la velocidad del gas relativa al cohete, la cual para nuestros propósitos se considerará constante. El momentum total del cohete antes de la pérdida de gas es  $MV$ . Después de la pérdida de gas, el cohete tiene un momentum  $(M + \Delta M)(V + \Delta V)$ , y el gas tiene momentum  $-\Delta M(V + v)$ , de modo que el momentum total después de la pérdida es  $(M + \Delta M)(V + \Delta V) - \Delta M(V + v)$ .

El cambio de momentum, esto es, el momentum total después de la pérdida de gas menos el momentum total antes de la pérdida, es

$$(M + \Delta M)(V + \Delta V) - \Delta M(V + v) - MV = M\Delta V - v\Delta M + \Delta M\Delta V.$$

La tasa instantánea de cambio en momentum es el límite del cambio en momentum dividido por  $\Delta t$  a medida que  $\Delta t \rightarrow 0$ , esto es;



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( M \frac{\Delta V}{\Delta t} - v \frac{\Delta M}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t} \Delta V \right) \quad (1)$$

Observación. Puesto que en tiempo  $t + \Delta t$  la masa del cohete ha decrecido, uno podría estar inclinado a expresarla como  $M - \Delta M$ , donde  $\Delta M > 0$ , en vez de  $M + \Delta M$  donde  $\Delta M < 0$ . Sin embargo, es mejor usar el método del texto para estar de acuerdo con la idea familiar del cálculo que, si una variable es decreciente, su derivada (aproximadamente en este caso  $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ ) es negativa.

la tasa de cambio en momentum es la fuerza F.

$$F = M \frac{dV}{dt} - v \frac{dM}{dt}. \quad (2)$$

Es nuestra ecuación básica para el movimiento de cohetes.

Un cohete con masa inicial de  $M_0$  gramos parte radialmente desde la superficie de la Tierra. Expele gas a una tasa constante de  $a$  g/seg, a una velocidad constante  $b$  cm/seg relativa al cohete, donde  $a > 0$  y  $b > 0$ . Asumiendo que ninguna fuerza externa actúa sobre el cohete, encontrar su velocidad y distancia viajada en cualquier tiempo.

Formulación matemática. Refiriéndonos a la ecuación fundamental, tenemos que  $F = 0$  puesto que no hay fuerzas externas. Puesto que el cohete pierde  $a$  g/seg, perderá  $at$  g en  $t$  seg, y por tanto su masa después de  $t$  seg está dada por  $M = M_0 - at$ . También. La velocidad del gas relativa al cohete está dada por  $v = -b$  (segunda derivada)

Así, (2) se convierte en:

$$(M_0 - at) \frac{dV}{dt} - ab = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{ab}{M_0 - at} \quad (3)$$

con las condiciones iniciales asumidas  $V = 0$  en  $t = 0$ .

Solucionando (3), encontramos  $V = -b \ln(M_0 - at) + c_1$  puesto que  $V = 0$  en  $t = 0$ ,

$$c_1 = b \ln M_0,$$

y

$$V = b \ln \left( \frac{M_0}{M_0 - at} \right) \quad (4)$$

la cual es la velocidad requerida del cohete. Si  $x$  representa la distancia viajada por el cohete en tiempo  $t$  medida desde la superficie de la tierra, tenemos  $V = \frac{dx}{dt}$  de modo que

$$\frac{dx}{dt} = b \ln M_0 - b \ln(M_0 - at) = -b \ln \left( \frac{M_0 - at}{M_0} \right)$$

De la cual se obtiene, al integrar, tomando  $x = 0$  en  $t = 0$ ,

$$x = bt + \frac{b}{a} (M_0 - at) \ln \left( \frac{M_0 - at}{M_0} \right) \quad (5)$$

La cual es la distancia viajada requerida. Note que las ecuaciones (4) y (5) son válidas solamente para  $t < \frac{M_0}{a}$  el cual es el límite teórico para el tiempo de vuelo. El límite práctico es mucho menos que éste.

Bibliografía: ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS  
MURRAY R SPIEGEL

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 15

### LÓGICA EPISTÉMICA DINÁMICA. EL PROBLEMA DE “3 MUDDY CHILDREN”

Ana Margarita García Terán, Fausto Adrian Cervantes Ortega, Jafed Alejandro Martínez Sánchez. Asesor: Dr. Ricardo Isaac Bello Aguirre. Correo electrónico de contacto: ricardo.bello.aguirre@gmail.com

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS UNIVERSIDAD JUÁREZ DEL ESTADO DE DURANGO.

*amgiti@hotmail.com, adriantperm@gmail.com, jafsed@hotmail.com*

Área de las matemáticas donde se desarrolla el tema a exponer: Lógica Matemática.

Este resumen trata de cómo abordar y analizar un problema acerca de la lógica matemática, más específicamente en el área de la lógica epistémica dinámica con anuncios públicos. Con el objetivo de resolver las siguientes cuestiones.

¿Qué cosas nos dice el lenguaje acerca de un anuncio público? Es decir, ¿qué efecto tiene un anuncio público en el conocimiento de un conjunto de agentes? Una intuición natural es que, después de anunciar cualquier fórmula  $\chi$ , dicha fórmula será conocimiento común entre dos los agentes. ¿Es esto cierto?

Todas estas preguntas son contestadas con las propiedades de los anuncios públicos en la lógica epistémica dinámica. A continuación, explicaremos más a fondo estas propiedades.

Primero empezaremos con la definición de lógica. Lógica es la parte de la filosofía que estudia las formas y principios generales que rigen el conocimiento y el pensamiento humano, dentro de esta extensa ciencia nos enfocaremos en una sub-rama de ella que es la lógica modal que es un sistema formal que intenta capturar el comportamiento deductivo de algún grupo de operadores modales. Los operadores modales son expresiones que califican la verdad de los juicios. Esta verdad de juicios se puede estudiar y/o analizar óptimamente con las herramientas que nos brinda la epistémica (epistemología) que es la rama de la filosofía y/o lógica cuyo objeto de estudio es el conocimiento. A su vez esta sub-rama se divide en diferentes tipos de conocimientos para diferentes situaciones. Nuestro problema se encuentra dentro de la sección de la dinámica que nos permite la transmisión de la información en un sentido mucho más amplio. Y por último esta sección de la lógica: “lógica epistémica dinámica (Quesada, 2015)” que es un campo de la lógica modal que se ocupa del razonamiento sobre el conocimiento tiene diferentes aéreas en los que un problema puede ser analizado:

La sección o área que necesitamos es la “Lógica epistémica dinámica: anuncios públicos” que es una extensión de la lógica epistémica con un nuevo operador  $[Ki]$ , el cual, se lee: “ $i$  sabe que...”. Este operador es el que permite diferenciar la lógica clásica (que no lo contiene) y la lógica modal, que es la que utilizaremos para nuestro tema.

Características de los anuncios:

1. Públicos.
2. Verdaderos.
3. Si son informativos, eliminan estados del modelo.

Representación operacional:

Intentemos ahora representar un anuncio público de manera operacional. ¿Cómo afecta el anuncio público de una fórmula  $\chi$  a un modelo dado?

Si tenemos el modelo, ¿cómo definimos el modelo  $M\chi$  que se obtiene después del anuncio público de  $\chi$ ? Es decir, intuitivamente, ¿qué efecto tiene en el conocimiento de un conjunto de agentes el hecho de que  $\chi$  sea anunciado públicamente? La primera opción que viene a la mente es la siguiente: el anuncio público de una fórmula  $\chi$  les informa a los agentes que  $\chi$  es verdadera, y por lo tanto todos ellos pueden descartar aquellos mundos posibles en los cuales  $\chi$  es falsa. En otras palabras, el anuncio público de  $\chi$  tiene como efecto la eliminación de todos aquellos mundos posibles en los cuales  $\chi$  es falsa.

Una segunda opción surge al observar que en realidad no es necesario eliminar los mundos posibles. Lo que nos indica la incertidumbre de los agentes es la relación de accesibilidad, así que tan solo es necesario hacer que ningún agente considere estos mundos posibles después del anuncio público.

Anuncios públicos en acción

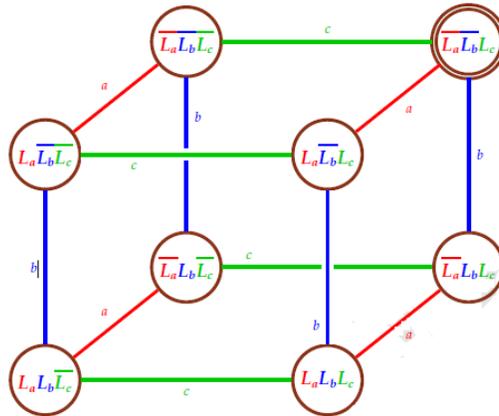
Tres niños están jugando en el jardín, y cuando su mamá los llama para cenar les dice “al menos uno de ustedes está manchado”, y entonces les pregunta una y otra vez, “¿alguien sabe si está manchado?”. Suponiendo que los niños responden sincera y simultáneamente, ¿qué sucederá?

Para representar esta situación dentro de la lógica epistémica dinámica, empecemos por definir las proposiciones atómicas y los nombres de agentes que utilizaremos, y construyamos entonces el modelo que representa la situación inicial. Nuestro conjunto de agentes será  $\{a, b, c\}$  (los tres niños involucrados), y nuestro conjunto de proposiciones atómicas será  $\{La, Lb, Lc\}$ , con  $L_i$  indicando “el niño  $i$  está limpio” (por lo tanto, la fórmula:  $\neg L_i$  indica “el niño  $i$  está manchado”). Para el modelo, los mundos posibles serán cada una de las ocho diferentes evaluaciones para tres las proposiciones atómicas, y la relación epistémica de cada niño indicará que él puede ver el estado de los demás, pero no el suyo, es decir, los mundos que serán mutuamente indistinguibles para un niño  $i$  serán aquellos mundos en los cuales el estado de los otros niños es el mismo pero el estado de  $i$  varía (Toscano, 2007).

El mundo real será aquel en el que  $a$  y  $b$  están manchados y  $c$  está limpio.

La situación inicial puede entonces ser representada por el siguiente estado epistémico en el cual cada mundo posible contiene su evaluación atómica (la línea sobre una proposición atómica indica que esta proposición es falsa) y el mundo real se indica con un círculo

doble. Para simplificar el diagrama, las líneas indican flechas en ambas direcciones y las relaciones reflexivas se han omitido.

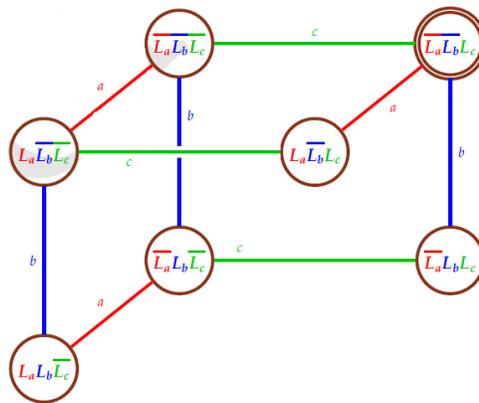


Veamos ahora que sucede cuando se realizan los anuncios públicos.

La madre inicia diciéndoles “al menos uno de ustedes está manchado”. Esto lo podemos representar como el anuncio público de la fórmula

$$\neg L_a \vee \neg L_b \vee \neg L_c$$

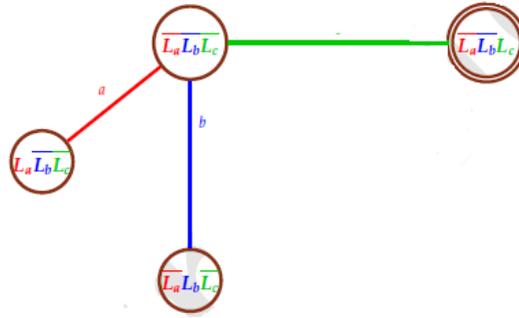
La cual nos dice que o a está manchado, o b está manchado, o c está manchado. Como consecuencia de este anuncio, aquellos mundos en los cuales dicha fórmula no es verdadera serán eliminados. Esto produce el siguiente estado:



Este diagrama nos muestra cómo, después del anuncio inicial de la madre, los niños siguen sin saber si están manchados o no: desde el mundo real,  $\neg L_a \neg L_b L_c$ , cada uno de ellos considera al menos otro mundo posible en el cual él está (no está, respectivamente) manchado.

La madre entonces les pregunta “¿alguien sabe si está manchado?”. El modelo que resulta del anuncio anterior nos indica que la respuesta debe ser negativa: ningún niño sabe si él mismo está manchado. Esta respuesta puede representarse con la fórmula

$$(\neg K_a L_a \wedge \neg K_a \neg L_a) \wedge (\neg K_b L_b \wedge \neg K_b \neg L_b) \wedge (\neg K_c L_c \wedge \neg K_c \neg L_c)$$



En este estado, tanto a como b saben que están manchados, ya que desde el mundo real ellos consideran solo un mundo como posible, el mismo mundo real, y en el ambos están manchados.<sup>3</sup> El diagrama también nos indica que c no sabe que él está limpio, ya que considera posible una situación,  $\neg L_a \neg L_b \neg L_c$ , en la cual él está manchado.

Cuando la madre repite la pregunta, la respuesta será ahora que tanto a como b saben si están manchados, pero c no lo sabe. Esta respuesta, representada por la fórmula

$$(K_a L_a \vee K_a \neg L_a) \wedge (K_b L_b \vee K_b \neg L_b) \wedge (\neg K_c L_c \wedge \neg K_c \neg L_c)$$



Finalmente, después de dos preguntas con sus respectivas respuestas, los tres niños saben si están manchados o no.

Observe como las respuestas de los niños, que son suficientes para que al final todos sepan cual es el mundo real, no revelan qué es lo que ellos saben: tan solo revelan si ellos saben o no. En otras palabras, cuando los niños dicen que sí saben, no dicen “sé que estoy limpio” o “sé que estoy manchado”: tan solo dicen “sé si estoy manchado” (Toscano, 2007).

En estas notas hemos presentado los conceptos básicos de la llamada lógica epistémica dinámica. Hemos recordado brevemente el sistema de la lógica modal y su interpretación epistémica. Entonces hemos definido operaciones sobre estos modelos que nos permiten representar tanto diversos tipos de anuncios (públicos) como distintas formas de revisar creencias.

#### Referencias:

- Quesada, F. R. (2015). Introducción a la lógica epistémica dinámica. En F. R. Quesada, *Introducción a la lógica epistémica dinámica* (págs. 5-10). College Publications.
- Toscano, F. S. (2007). Introducción a la lógica epistémica. En F. S. Toscano, *Introducción a la lógica epistémica* (págs. 2-25). Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 16

### COMPLEJOS SIMPLICIALES

Jesús Iván López Reyes, [ivan\\_gow@live.com](mailto:ivan_gow@live.com)

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango

Licenciatura, Topología Combinatoria

Palabras clave: Símplices, Complejos Simpliciales, Espacios Triangulables

### 1 Introducción

Para dar una introducción intuitiva a los complejos simpliciales y a sus propiedades, pensemos en que la característica principal que distingue a un poliedro  $P$  de un espacio topológico arbitrario es la posibilidad de triangularlo; esto es,  $P$  está construido a partir de puntos, segmentos, triángulos, tetraedos, etc., que son pegados por sus puntos, segmentos, caras, etc. El estudio de tales piezas es a veces conocido como Topología Combinatoria, en virtud de que las propiedades del espacio topológico se sustentan en cómo las piezas son combinadas. En ocasiones es más fácil trabajar con las reglas para combinar piezas que trabajar directamente con los espacios topológicos.

El objetivo de este trabajo es exponer algunas definiciones y teoremas de complejos simpliciales y cómo podemos interpretarlos geoméricamente.

Para ello, organizaremos la exposición en tres secciones para tratar con definiciones relevantes y su interpretación geométrica: símplices y complejos simpliciales finitos; subdivisión baricéntrica; y la topología del poliedro  $|K|$  y los entornos regulares.

### 2 Símplices y complejos simpliciales finitos

En esta parte se verán las definiciones de  $n$  – *símplice* o también llamado simplejo de dimensión  $n$ , cara de un símplice, complejo simplicial, subcomplejo simplicial, poliedro subyacente a un complejo simplicial, isomorfismo simplicial y algunas proposiciones, teoremas y corolarios los cuales se explicaran intuitiva y geoméricamente y para algunos se verá una pequeña demostración. También con la finalidad de favorecer una mejor comprensión se mostraran algunas figuras de símplices (Figura 1) y de complejos simpliciales (Figura 2) como ejemplos.

Definición 2.1 Dados  $n + 1$  puntos afínmente independientes  $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$  en

$\mathbb{R}^m$  llamaremos  $n$  – *símplice* o simplejo de dimensión  $n$  al conjunto convexo

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0\}$$

Los coeficientes  $\lambda_i$  son llamados coordenadas baricéntricas. Llamaremos interior de  $\sigma$  a

$$i(\sigma) = \{x \in \sigma : \lambda_i > 0\}.$$



Definición 2.2. Sean  $\sigma$  y  $\tau$  dos simplejos en  $\mathbb{R}^m$ . Se dirá que  $\tau$  es cara de  $\sigma$ , y lo denotaremos por  $\sigma \leq \tau$  si los vértices de  $\tau$  con vértices de  $\sigma$ . Si  $\sigma \neq \tau$  y  $\sigma \leq \tau$  diremos que  $\tau$  es cara propia de  $\sigma$  y escribiremos entonces  $\sigma < \tau$ . Si  $\sigma \leq \tau$ , se dirá que  $i(\tau)$  es una cara abierta de  $\sigma$ .

Proposición 2.1. (a) Todo simplejo  $\sigma$  es reunión disjunta de sus caras abiertas

(b) Dos caras de  $\sigma$  o son disjuntas o se encuentran en una cara.

Definición 2.3. Llamaremos complejo simplicial finito a una colección finita  $K$  de simplejos en algún  $\mathbb{R}^m$  verificando

- (i) Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in K$  entonces  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$  ó  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  es una cara común de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .
- (ii) Si  $\sigma \in K$  y  $\tau \leq \sigma$  entonces  $\tau \in K$ .

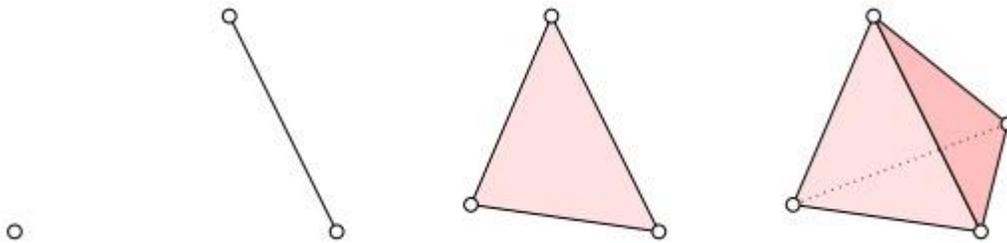


Figura 1. 0-Símplice; 1-Símplice; 2-Símplice; 3-Símplice, respectivamente.

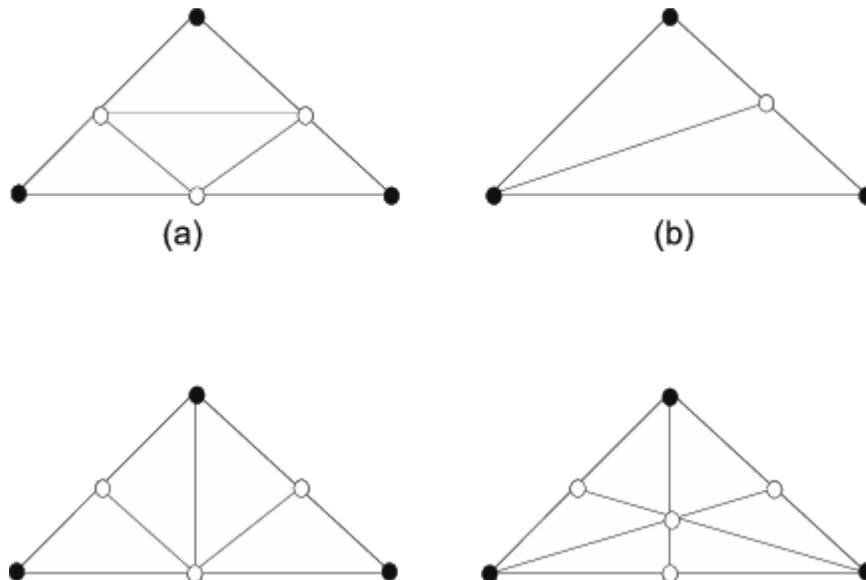


Figura 2. A, B y C representan conjuntos de símplexes que no son complejos simpliciales, mientras que D y E son

ejemplos de complejos simpliciales.

**Subdivisión baricéntrica**

En esta parte se verán las definiciones de subdivisión de un complejo simplicial y subdivisión baricéntrica con sus respectivas interpretaciones geométricas apoyadas en algunas imágenes. Además se presentará un lema relacionado con tales definiciones.

## Definición 3.1

1.3. La topología del poliedro  $|K|$ . Entornos regulares.

Aquí veremos la definición de espacio triangulable, algunos subcomplejos simpliciales como la estrella y el engarce, algunos teoremas y proposiciones y por ultimo ejemplos de espacios triangulables

[Programa general](#)

**Ponencia de Divulgación 17****¿CÓMO GENERAR UN FRACTAL CON UN DADO? EL JUEGO DEL CAOS**

Luis Eduardo Bueno López

[Programa general](#)

**Ponencia de Divulgación 18****INDUCCIÓN MATEMÁTICA Y LOS NÚMEROS NATURALES**

César Alejandro Ortiz Arreola

[Programa general](#)

**Ponencia de Divulgación 19****LA CIRCUNFERENCIA**

Josue Isaac Soto Odriozola, Gabriel Fernández Beltrán

[Programa general](#)



## Ponencia de Divulgación 20

### EN LA SUPERFICIE

Alonso Eloy Ávila Dévora.  
Facultad de Ciencias Exactas  
*alon.so.12@hotmail.com*  
Topología

En esta presentación se busca mostrar de manera muy intuitiva la forma general de todas las superficies. Es una charla basada en un curso impartido por el doctor Alejandro Illanes en las aulas de la UNAM. Aquí se intentará visualizar que forma pueden llegar a tener las superficies de modo que incluso las personas que no hayan tomado un curso de topología formal puedan comprender lo que se está hablando.

Se definirá el concepto de superficie, como sigue:

*Una superficie es un espacio topológico conexo  $M$  tal que para todo punto  $p$  que pertenece a  $M$ , existen un disco  $D_p$  que contiene a  $p$  y un homeomorfismo  $h$  de la bola unitaria cerrada centrada en el vector  $0$  al disco, tal que  $h(0)=p$ . Con  $M$  siendo una unión finita de discos bajo homeomorfismos.*

Con lo cual se hablará de espacio topológico, conexidad, homeomorfismos y por tanto de funciones continuas, entre otras definiciones.

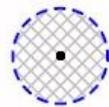
*Espacio topológico: es un conjunto  $X$  para el que se ha definido una topología  $T$ .*

*Topología: una topología sobre un conjunto  $X$  es una colección  $T$  de subconjuntos de  $X$  que cumplen con las propiedades:*

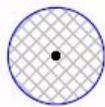
- $\emptyset$  y  $X$  (el vacío y el total) están en  $T$ .
- La unión arbitraria de cualquier subcolección de  $T$  está en  $T$ .
- La intersección finita de elementos de  $T$  está en  $T$ .

*Abierto: así es como se llama a un elemento de la topología  $T$*

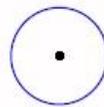
*Bola: en un espacio métrico, para todo  $x$  que pertenece a  $X$  y para todo  $r$  real positivo la bola con centro en  $x$  y radio  $r$  es el conjunto  $B(x,r)=\{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$*



Bola Abierta



Bola Cerrada

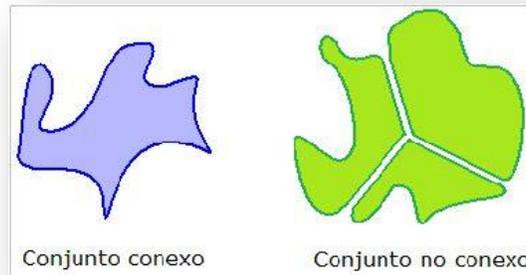


Esfera

*Conjunto conexo: un conjunto es conexo si no se puede separar en dos trozos (abiertos), o si podemos encontrar un camino que conecte a cada par de puntos del conjunto.*

La definición de conjunto conexo se da más bien a partir de la de conjunto desconexo que es:

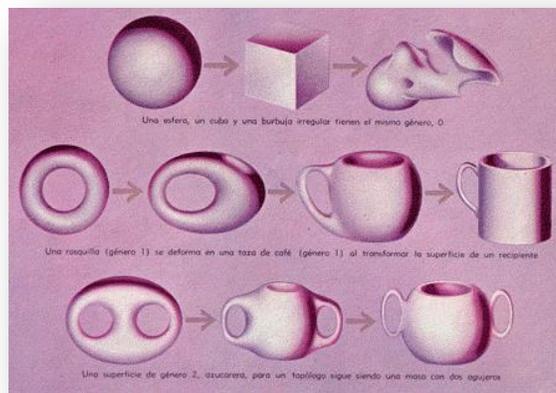
*Un conjunto  $X$  es desconexo si existen dos subconjuntos  $U, V$  abiertos, tal que*



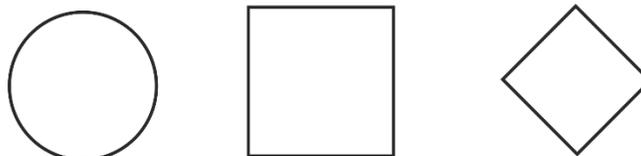
$$X=U \cup V \quad U \neq \emptyset \neq V \quad \bar{U} \cap V = \emptyset \quad U \cap \bar{V} = \emptyset$$

*Función continua: Sean  $X, Y$  espacios topológicos, y una función  $F: X \rightarrow Y$ . Se dice que  $F$  es continua si para cada subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ , el subconjunto  $F^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .*

*Homeomorfismo: Sea  $F: X \rightarrow Y$  una biyección, y  $F^{-1}: X \rightarrow Y$  la inversa de la función. Si ocurre que  $F$  y  $F^{-1}$  son continuas entonces  $F$  es un homeomorfismo. El homeomorfismo mantiene las propiedades básicas de  $X$  y las mantiene en  $Y$ . Un ejemplo de homeomorfismo en la vida cotidiana es el doblar una hoja de papel o estirar una liga de goma, pues se mantienen ciertas propiedades como cercanía y conexidad.*

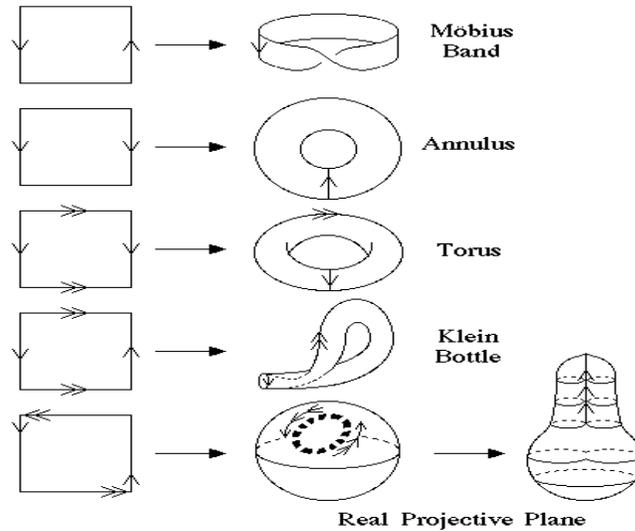


*Disco: será definido como un abierto en la superficie.*

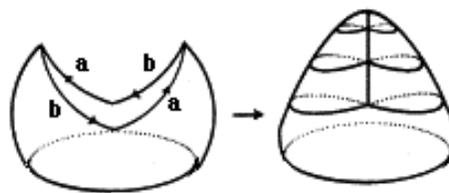


*Flechas: indican la orientación de la unión por pares de los segmentos.*

Las superficies más comunes son construibles con un disco con dos pares de flechas, como: la esfera, el toro, la botella de Klein y el “bonete” con y sin agujero.



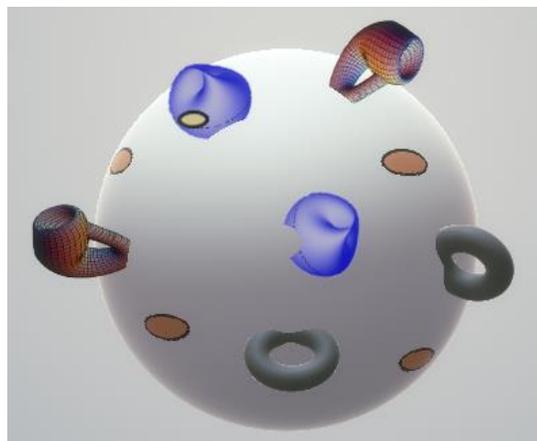
Para su análisis, las superficies se describen como discos con un número par de flechas en



la orilla.

Aquí es donde se da rienda suelta a la imaginación y se piensa en la forma que tendría una superficie formada por discos con mayor número de pares de flechas, resultando esto en una clasificación de superficies.

Al armar las superficies, se observa que con cada paso se van formando de las superficies básicas unas sobre otras, teniendo como base la esfera y sobre ella toros, botellas y bonetes.



## Bibliografía:

Illanes Mejía, Alejandro. La caprichosa forma de Globión. Fondo de Cultura Económica. Pp. 137.

Kinsey, L. Christine. Topology of Surfaces. Springer.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 21

### SISTEMA TRIVALENTE DE LUKASIEWICZ

Eybette Mercado Favela

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 22

### JUEGOS RECTANGULARES

#### EL LIGUE DE NASH

Luis Antonio Ayala Cenicerros, Miguel Ángel Noriega Meléndez

Facultad De Ciencias Exactas- UJED

*antonio.a.98.la@gmail.com, mnoriega.9853@gmail.com*

Teoría de juegos

Presentaremos un juego de tipo rectangular llamado el ligue de Nash, definiremos el tipo de juego que es y sus características.

**Definición.** Un juego rectangular consta de un conjunto  $N$ , de una colección de conjuntos  $D_j$ , uno para cada  $j$  en  $N$ , y de una colección de funciones  $\varphi_j$ , para cada  $j$  en  $N$ , donde  $\varphi_j: \prod_{j \in N} D_j \rightarrow R$ .

A  $N$  le llamaremos el conjunto de jugadores, a cada  $D_j$  el conjunto de estrategias puras del jugador  $j$  y a  $\varphi_j$  la función de pago del jugador  $j$ .

$(N, \{D_j\}_{j \in N}, \{\varphi_j\}_{j \in N})$  Denotara el juego que tiene el conjunto de jugadores  $N$ , los conjuntos de estrategias puras  $D_j$  y las funciones de pago  $\varphi_j$ . Usaremos la letra  $D$  para denotar el producto cartesiano  $\prod_{j \in N} D_j$  (igual a  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  si  $N$  es finito y tiene  $n$  elementos). A los elementos  $D$  les llamaremos perfiles de estrategias puras.



**Definición.** Si  $N$  y los conjuntos  $D_j$  son finitos, se dice que el juego es finito.

Para dar una mejor introducción a lo que es el juego del que hablaremos daremos la definición de lo que es un equilibrio de Nash en este tipo de juegos luego de la definición explicaremos de lo que trata este juego y de donde viene.

**Definición.** Se dice que  $(\sigma^*)$  en  $D$  es un equilibrio de Nash en estrategias puras (ep), si para cada jugador  $j$  en  $N$  se cumple:

$$\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j(\sigma^* | \sigma^j) \text{ Para toda } \sigma^j \text{ en } D_j.$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que  $\sigma^*$  es un equilibrio estricto, es decir, si para cada  $j$  en  $N$ ,  $\varphi_j(\sigma^*) > \varphi_j(\sigma^* | \sigma^j)$  Para toda  $\sigma^j$  en  $D_j$ .

**Definición.** Dado un perfil de estrategias  $\hat{\sigma}$  en  $D$ , decimos que  $\tilde{\sigma}^j$  en  $D_j$  es una mejor respuesta del jugador  $j$  a  $\hat{\sigma}$ , si

$$\varphi_j(\hat{\sigma} | \tilde{\sigma}^j) \geq \varphi_j(\hat{\sigma} | \sigma^j) \text{ para toda } \sigma^j \text{ en } D_j$$

Además decimos que  $\tilde{\sigma}^j \in D_j$  es una mejor respuesta estricta de  $j$  a  $\hat{\sigma}$ , si

$$\varphi_j(\hat{\sigma} | \tilde{\sigma}^j) \geq \varphi_j(\hat{\sigma} | \sigma^j) \text{ para toda } \sigma^j \text{ en } D_j \text{ y } \varphi_j(\hat{\sigma} | \tilde{\sigma}^j) > \varphi_j(\hat{\sigma})$$

Es claro que  $\sigma^*$  es un equilibrio de Nash (ep) si y solo si  $\sigma^{*j}$  es una mejor respuesta de  $j$  a  $\sigma^*$  para toda  $j \in N$ .

El ligue de Nash

Es un juego que aparece en la película mente brillante, que se trata de 4 amigos entre ellos Nash sentados en la mesa de un bar observando a otras 5 chicas sentadas en una mesa cercana entre las cuales se encuentra una rubia más espectacular que las demás, la cual tiene fama de ser acaparadora.

El juego consiste en que cada uno de los chicos quiere ligar a alguna chica pero todos prefieren a la rubia, del otro lado las chicas distintas a la rubia harán una rifa para elegir con cuál de ellos salir si es que tienen más de una petición de salir por parte de los chiscos, pero la rubia solo hará la rifa si los 4 chicos le piden salir, ya que si no son los 4 los rechazara a todos.

De esta forma los jugadores son los estudiantes y las chicas los premios del juego, en el cual la rubia es el premio mayor para los jugadores, para lo cual el juego se representa de la siguiente forma:

$$(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi)$$

Donde  $N = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  que son los estudiante o jugadores.

Y  $D_j = \{\text{rubia}, ch_1, ch_2, ch_3, ch_4\}$  que representan a las chicas o premios del juego.

Si para  $i \in D_j$ ,  $n_i$  es el número de estudiantes que eligieron a la chica  $i$ , la función de pago del jugador  $j$  se expresa con la función  $\varphi_j$  tal que  $\forall \sigma \in D$ ,

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{n_{ch_k}} & \text{si } \sigma^j = ch_k \\ 0 & \text{si } \sigma^j = \text{rubia y } n_{\text{rubia}} < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sigma^j = \text{rubia y } n_{\text{rubia}} = 4 \end{cases}$$

### Bibliografía

Zapata Lillo, Paloma. (2016). “*Economía, política y otros juegos*”. México: UNAM, Facultad de ciencias

K.Binmore.(1994). “*Teoría de Juegos*”, McGraw-Hill

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 23

### GUERRILLAS: UNA APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Brayam Antonio Moreno González

Celene Yajahira Conde Ramírez

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 24

### GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Juan Antonio Aguilar García. Asesor: Adriana Escobedo.

Universidad Juárez del Estado de Durango

Facultad de Ciencias Exactas

*antony.z13@outlook.com*

Desarrollada en base a la área de la Geometría

Se le atribuye a Pitágoras de Samos el descubrimiento de éste famoso teorema, el cual dice “la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”. Esta definición es una mención numérica, ya que textualmente se trata de elevar al cuadrado las longitudes de los tres lados del triángulo rectángulo; y su interpretación geométrica es en el sentido de que “la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa”, sobreentendiendo obviamente que los lados de esos cuadrados son congruentes con los lados del triángulo.



En geometría, se llama triángulo rectángulo a todo triángulo que posee un ángulo recto, es decir, un ángulo de  $90^\circ$ , los lados que forman el ángulo recto son llamados catetos.

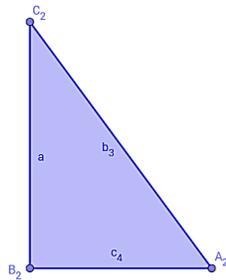
El Teorema de Pitágoras es uno de los pocos teoremas que tiene tantas pruebas que es difícil agotarlas. Esto puede ser atribuido a la cantidad de tiempo que el teorema ha estado en uso tanto en ciencia como en matemática, obviamente con muchas transformaciones en el proceso.

**Teorema de Pitágoras**

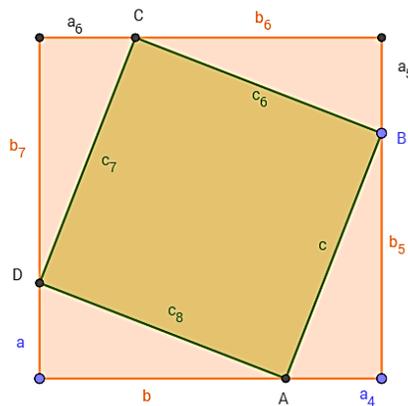
$$\text{Sea } \Delta A, B, C \text{ es rectángulo} \leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

A continuación mostraremos una prueba del teorema de Pitágoras

Sea el  $\Delta A, B, C$  es rectángulo



Tenemos que cada lado mide  $a + b$ , así que el área es:  $A = (a + b)(a + b)$



$$\text{Área } M = \text{área } N + \text{área } P$$

Ahora sumamos las áreas de los trozos más pequeños:

Primero, el cuadrado pequeño (inclinado) tiene área

$$A = c^2$$

Y hay cuatro triángulos, cada uno con área

$$A = \frac{1}{2}ab$$

Así que los cuatro juntos son

$$A = 4(\frac{1}{2}ab) = 2ab$$

Si sumamos el cuadrado inclinado y los 4 triángulos da:

$$A = c^2 + 2ab$$

El área del cuadrado grande es igual al área del cuadrado inclinado y los 4 triángulos. Esto lo escribimos así:

$$(a + b)(a + b) = c^2 + 2ab$$

Ahora, vamos a operar:

Empezamos con:  $(a + b)(a + b) = c^2 + 2ab$

Desarrollamos  $(a+b)(a+b)$ :  $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

Restamos "2ab" de los dos lados:  $a^2 + b^2 = c^2$

Ahora séase  $a^2 + b^2 = c^2$

Como  $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Sumando a ambos lados "2ab"  $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

Factorizando :  $\Leftrightarrow A = (a + b)(a + b) = c^2 + 2ab$

Como  $A = c^2 + 2ab = c^2 + \frac{4(ab)}{2}$

De acuerdo a los resultados ya obtenidos antes vemos que  $c^2$  y  $2ab$  tenemos que

$c^2$ : Era el área el cuadro pequeño dentro del de lado  $a + b$ .

$2ab$ : Y que estaba dado por  $4\left(\frac{1}{2} ab\right)$ , el área de cada triángulo de la figura

Como hay dos formas distintas de expresar la misma área (como fue ya mostrada en el cuadrado grande), entonces ambas expresiones deben son iguales.

Como el área de cada uno de los triángulos es  $\frac{(a*b)}{2}$  y el del cuadrado pequeño es  $c^2$ , de esto vemos que también se ha llegado a  $A = (a + b)(a + b)$ , que es la multiplicación dada del diagrama de lado  $a + b$ . y con ello se termina que como el área del cuadrado grande es la suma de las áreas pequeñas, entonces vemos que tenemos que el cuadrado es de lado  $(a + b)$ .

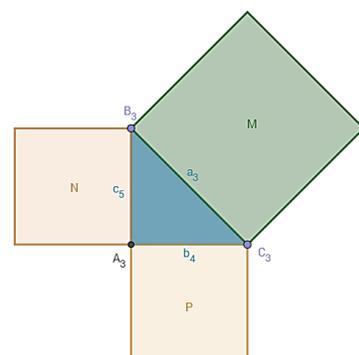
Por lo tanto,  $\Delta A, B, C$  es rectángulo.

El teorema de Pitágoras también se puede enunciar de la forma siguiente:

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene la misma área que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos:

Área M =  $a^2$

Área P =  $b^2$



$$\text{Área } N = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{Área } M = \text{área } N + \text{área } P$$

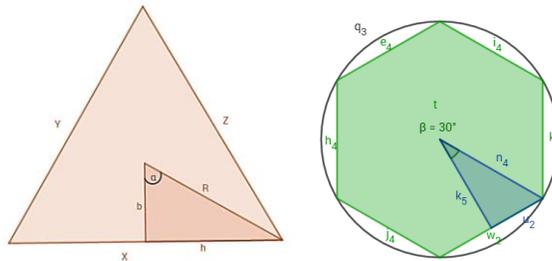
El teorema de Pitágoras tiene una generalización donde la cual afirma que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es la misma que la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos.

Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen rectángulos semejantes de modo que tales lados sean homólogos en dicha relación, entonces la suma de las áreas de tales rectángulos construidos sobre los catetos es igual a área del rectángulo construido sobre la hipotenusa.

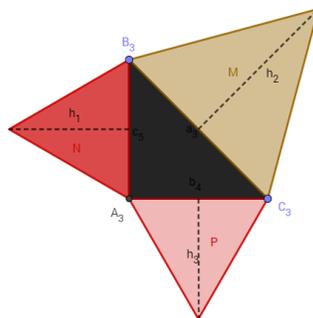
Generalización del Teorema.- El área del polígono de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los polígonos de los catetos.

Hipótesis 1.- El teorema es cierto para los cuadrados, cumpliéndose entonces que:  $a^2 = b^2 + c^2$

Hipótesis 2.- Todo polígono regular de lado L puede inscribirse en una circunferencia de radio R.



### Triangulos equiláteros en vez de cuadrados



TEOREMA 2: La suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos es igual al Área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa.

**HIPOTESIS:** Consideremos la Figura, en la cual aparece un triángulo rectángulo de catetos  $a$  y  $b$  y de hipotenusa  $c$ . En tales lados se han trazado sendos triángulos equiláteros de alturas  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  respectivamente. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$ ., respectivamente, sus áreas.

**TESIS:**  $A + B = C$ .

**DEMOSTRACION:** Apliquemos el teorema en la Figura para encontrar las magnitudes de las alturas de los triángulos equiláteros.

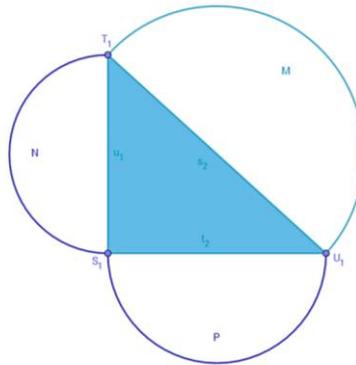
$$h_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = d \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Por procedimiento analogo tendremos que  $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b$  y que  $h_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ .

Consideremos ahora las áreas de los tres triángulos equiláteros:

Entonces  $A + B = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , pero por el teorema sabemos que en la Figura se cumple que  $a^2 + b^2 = c^2$ , por lo tanto la suma de las áreas en cuestión quedaría de la forma  $A + B = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$  cuyo segundo miembro, como ya vimos, es  $C$ , con lo que  $A + B = C$ , lo cual queríamos probar.

### Semicirculos en vez de cuadrados



Veamos ahora lo que ocurre si en vez de cuadrados o triángulos equiláteros construimos semicírculos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

**TEOREMA 3:** La suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es igual al Área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

**HIPOTESIS:** Consideremos la Figura, en la cual aparece un triángulo rectángulo de catetos  $a$  y  $b$  y de hipotenusa  $c$ . Sobre tales lados se han construido sendos semicírculos, a cuyas Áreas designaremos, respectivamente, con  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

**TESIS:**  $A + B = C$

**DEMOSTRACION:**

De la Figura se deduce que

$$A = \frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}a^2. \text{ Análogamente: } B = \frac{\pi}{8}b^2 \text{ y } C = \frac{\pi}{8}c^2$$

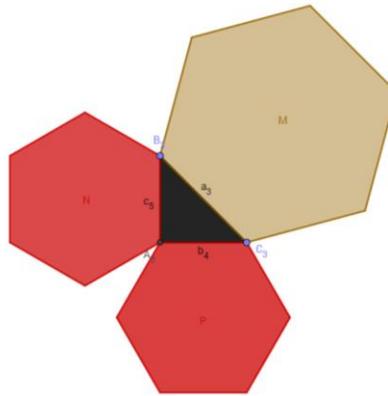
Entonces  $A + B = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2)$ , pero por el teorema 1 sabemos que en la figura se cumple que  $a^2 + b^2 = c^2$ , de modo que  $A + B = \frac{\pi}{8}c^2$ . Como ya habíamos establecido que el segundo miembro de esta Última igualdad es el valor de C, finalmente tenemos que  $A + B = C$ , que es lo que queríamos probar.

**TEOREMA 4.** Si sobre los lados de un triángulo rectángulo trazamos sendas figuras semejantes de modo que dichos lados sean homólogos en esa relación de semejanza, entonces la suma de las áreas de dichas figuras trazadas sobre los catetos es igual al área de la figura trazada sobre la hipotenusa.

**HIPOTESIS:** Consideremos la Figura, en la cual:

- a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa.
- A, B y C son las áreas de tres figuras semejantes trazadas, respectivamente, sobre a, b y c, y estos lados son homólogos en esa relación de semejanza.

**TESIS:**  $A + B = C$ .



$$\text{Área } M = \text{área } N + \text{área } P$$

**DEMOSTRACION:**

Por hipótesis y por el teorema que dice que la razón que hay entre las áreas de dos polígonos semejantes es el cuadrado de su razón de semejanza tenemos que

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \text{ y que } \frac{B}{C} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}, \text{ por lo tanto: } A = C \left(\frac{a^2}{c^2}\right) \text{ y } B = C \left(\frac{b^2}{c^2}\right).$$

Entonces resulta que

$$A + B = C \left(\frac{a^2}{c^2}\right) + C \left(\frac{b^2}{c^2}\right) = C \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2}\right)$$

Pero por el teorema 1 sabemos que en la Figura se cumple que  $a^2 + b^2 = c^2$ , de modo que la suma de las áreas de interés queda expresada como

$$A + B = C \left(\frac{c^2}{c^2}\right) = C(1) = C, \text{ esto es, } A + B = C, \text{ como queríamos mostrar.}$$

### Referencias Bibliográficas

Prof. Zarate Salas, E. (1996), Generalización del Teorema de Pitágoras, Unidad Ajusco, México, D. F.(GEI), Recuperado de:

<http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/2/12Zarate.pdf>

Pierce, Rod. (5 Oct 2011) Demostración algebraica del teorema de Pitágoras. Ed. Rod Pierce. Recuperado de <http://www.disfrutalasmaticas.com/geometria/teorema-pitagoras-demo.html>

Sin nombre. (s/n). TRIÁNGULOS. TEOREMA DE PITÁGORAS. Universidad de Valencia. Recuperado de

<https://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso14triangulo.pdf>

Herrera, A. (s/n). Generalización del Teorema de Pitágoras. Recuperado de <http://www.portalciencia.net/pitagoras.html>

Gámez, J. (2014). Teorema de Pitágoras... con su demostración y todo. Recuperado de:

<http://www.matematicasdigitales.com/teorema-de-pitagoras-con-su-demostracion-y-todo/>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 25

### EL CONJUNTO DE CANTOR

Autor: Carlos Michelle Díaz Leyva, Asesor: M.C Adriana Escobedo Bustamante  
cdiazleyva@gmail.com

UNIVERSIDAD JUAREZ DEL ESTADO DE DURANGO

Facultad de Ciencias Exactas

Análisis Matemático

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 3 de marzo de 1845 - Halle, 6 de enero de 1918) fue un matemático nacido en Rusia, aunque de ascendencia alemana y judía.<sup>2</sup> Fue inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas.

El conjunto de Cantor, llamado así por ser aporte de Georg Cantor en 1883, es un destacado subconjunto fractal del intervalo real  $[0, 1]$ .

Demostraremos dos propiedades importantes del conjunto de Cantor que es un conjunto de medida cero, pero no es numerable.

La construcción del conjunto de Cantor es una secuencia y se presenta a continuación:

- El paso uno del conjunto de Cantor es tomar el intervalo  $C_0 = [0,1]$  entonces el número de intervalos que tenemos en este momento es 1 y la medida de este es 1.



- En el paso dos vamos a dividir  $C_0$  en tres partes iguales y quitaremos la parte de en medio entonces construimos  $C_1 = \left[1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  estos dos son intervalos adjuntos de longitud  $\frac{1}{3}$  entonces decimos que  $C_1$  tiene medida  $\mu$  de  $C_1$  es de  $\frac{2}{3}$ , es decir,  $\mu(C_1) = \frac{2}{3}$ .
- En el tercer paso vamos a dividir nuestros dos intervalos que nos quedaron en el paso dos en tres partes iguales nuevamente partes iguales cada uno y vamos a quitar los tramos medios de los dos intervalos entonces vamos a construir  $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ . Estos 4 intervalos adjuntos de longitud  $\frac{1}{9}$  decimos que tienen medida  $\mu(C_2) = \frac{4}{9}$ .

Podemos continuar con este proceso y notaremos que hay un patrón en el número de intervalos y en la longitud de cada uno de estos. Lo que determina la medida del conjunto  $C_n$ , a continuación se muestra una tabla con los resultados.

| Pasos | Numero de Intervalos | Medida de cada $C_n$ |
|-------|----------------------|----------------------|
| $C_0$ | 1                    | 1                    |
| $C_1$ | 2                    | $\frac{2}{3}$        |
| $C_2$ | 4                    | $\frac{4}{9}$        |
| $C_3$ | 8                    | $\frac{8}{27}$       |
| $C_n$ | $2^n$                | $\frac{2^n}{3^n}$    |

El conjunto de Cantor se define como la intersección de todos los  $C_n$ , es decir,  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ . en el primer paso la medida del conjunto de Cantor es 1, en el segundo paso el conjunto tiene longitud  $\frac{2}{3}$ , en la fase 3 tiene una longitud de  $\frac{4}{9}$  es decir  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$  y aquí llegamos a un patrón, es decir, la longitud del intervalo en cada fase se puede expresar como  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  donde n es la fase donde se encuentra el conjunto de cantor.

Veamos ahora que el conjunto de Cantor tiene medida cero, para esto calcularemos la medida de su complemento respecto al  $[0,1]$ , cabe mencionar que la medida del Cantor se comporta como una función de probabilidad, es decir,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Entonces  $\mu([0,1]) = \mu(C) + \mu(C^c)$  por lo tanto  $\mu(C) = 1 - \mu(C^c)$ .

Vamos a tomar un  $0 < r < 1$  entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

donde  $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$  vamos a multiplicar por r esta sucesión entonces tenemos que  $rS_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}$

vamos a restar estas dos ecuaciones  $S_n - rS_n = 1 - r^{n+1}$

factorizamos  $S_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$  y tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r}$



entonces  $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$  por lo tanto  $\mu(C^c) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1$  y eso nos lleva a que  $\mu(C) = 1 - \mu(C^c) = 1 - 1 = 0$  y esto significa que el Cantor tiene medida 0.

Ahora veamos que el conjunto de Cantor no es numerable vamos a tomar  $x \in [0,1]$  y los vamos a escribir en base 3, entonces si  $x \in C$  si y solo si en su representación no tiene cifras con 1.

Entonces vamos a construir una función  $f: C \rightarrow [0,1]$  donde cada elemento del conjunto esta expresado en base 3 y lo manda a un elemento binario, por ejemplo

$x = 0.020022 \in C$  al aplicarle la función cambiamos el 2 por el 1 y el numero 0 lo vamos a dejar por el 0 ya que es sistema binario.

$$f(x) = 0.010011 \in I[0,1]$$

Ahora vamos a tomar otro punto diferente a todos ellos y que siga estando en el conjunto de Cantor es decir que no contenga al 1. Ahora se veremos en el segundo punto y en su segundo decimal y se elige el contrario: y lo mismo para el tercer punto y tercer decimal y, sucesivamente, para el enésimo punto y su enésimo decimal: elije el contrario del que se encuentra. De esta forma, su punto es distinto a todos, pero sigue teniendo la propiedad de que es expresable en forma decimal ternaria sin usar el 1, luego está en el conjunto de Cantor. Conclusión, no puede ser numerable.

## Referencias

Casas, J. G. El Conjunto de Cantor. *Miscelánea Matemática*, (24).

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 26

### MOVIMIENTO VIBRATORIO AMORTIGUADO

Omar Dozal Alcantar, asesor del trabajo: Dr. Saúl Nevárez Nieto

VI\_blackblood\_IX@hotmail.com

INSTITUCIONES: FACE UJED

VI\_blackblood\_IX@hotmail.com

Área de las matemáticas: aplicación a la mecánica.

El estudio del movimiento armónico libre es un tanto irreal puesto que el movimiento descrito por  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$  supone que no actúan fuerzas retardadoras sobre la misma en movimiento. A menos que la masa esté suspendida en un vacío perfecto, por lo menos no habrá una fuerza opuesta debida al medio que lo rodea.



Un cuerpo que pesa 8 lb estira un resorte 2 pies. Suponiendo que una fuerza de amortiguación numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema y que el peso se suelta desde la posición de equilibrio con la velocidad dirigida hacia arriba de 3 pie/s, determinaremos la ecuación del movimiento.

Ley de Hooke.

La Ley de Hooke describe fenómenos elásticos como los que exhiben los resortes. Esta ley afirma que la deformación elástica que sufre un cuerpo es proporcional a la fuerza que produce tal deformación, siempre y cuando no se sobrepase el límite de elasticidad.

$$F = -KX$$

Donde:

F es la fuerza aplicada al resorte.

X es el alargamiento.

K es constante de proporcionalidad de elasticidad del resorte.

El signo menos indica que la fuerza y el alargamiento tienen sentidos contrarios.

Sustituyendo los datos mencionados anteriormente tenemos:

$$8 = k(2), k = \frac{4 \text{ lb}}{\text{pie}}$$

Y ya que

$$m = \frac{w}{g},$$

$$m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ slug.}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2 \frac{dx}{dt} \text{ o bien } \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0. \quad (9)$$

Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = 0, \frac{dx}{dt} \Big|_{t_0} = -3$$

Ahora bien, la ecuación auxiliar de (9) es

$$m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$$

De modo que  $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$

Y entonces  $m_1 = m_2 = -4$ . Por lo tanto, el sistema está críticamente amortiguado y

$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$  la condición inicial

$x'(0) = -3$  resulta  $c_2 = -3$

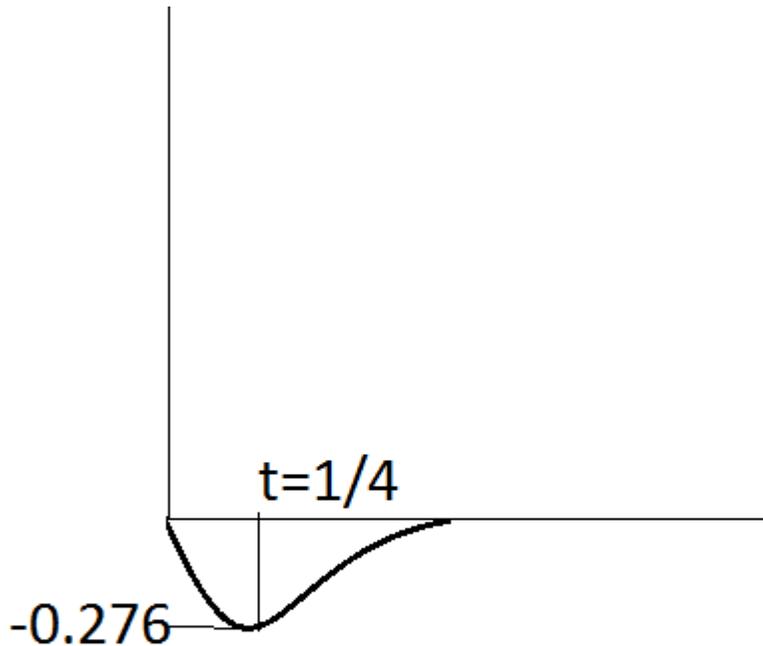
Así la ecuación del movimiento es  $x(t) = -3t e^{-4t}$ .

Para trazar la gráfica de  $x(t)$

$$x'(t) = -3(-4t e^{-4t} + e^{-4t}) = -3e^{-4t}(1 - 4t).$$

Es claro que  $x'(t) = 0$  Cuando  $t = \frac{1}{4}$ . El correspondiente desplazamiento máximo es

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\frac{1}{4}e^{-t} = 0.276 \text{ Pies.}$$



altura máxima sobre la  
población de equilibrio

El significado que se da a este valor es el peso llega a una altura máxima de 0.276 pie sobre la posición de equilibrio.

Bibliografía: ECUACIONES DIFERENCIALES. DENNIS G. ZILL. Segunda edición

[Programa general](#)

### Ponencia de Divulgación 27

#### LA ESFERA DE RIEMANN Y LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Brayam Antonio Moreno González

Noe Montes López

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 28

### GEOESTADÍSTICA APLICADA

Héctor Alfonso Sánchez Aragón, Silvia Janeth Solís Beltrán, Contacto:

*poncho\_290@hotmail.com*

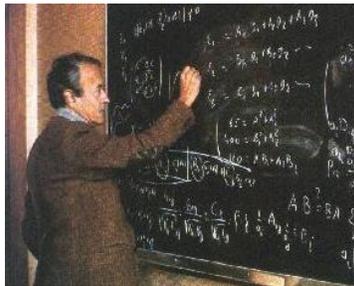
Facultad de Ciencias Exactas

*poncho\_290@hotmail.com, janeth\_kltz\_89@hotmail.com*

Área de las matemáticas donde se desarrolla: Estadística Aplicada

La geoestadística es una rama de la estadística aplicada que se especializa en el análisis y modelación de la variabilidad espacial en *ciencias de la tierra (Geociencias)*. Donde su objetivo de estudio es el análisis y la predicción de fenómenos en espacio y/o tiempo, por ejemplo: ley de metales, porosidades, concentraciones de un contaminante, etc. El prefijo Geo es usualmente asociado con geología, sin embargo, está tiene sus orígenes en la minería.

Viera (2002) explica que el término geoestadística fue establecido por Matheron alrededor de los años 60's y 70's, quien fue reconocido como el padre de esta rama de la estadística. Matheron formalizó y generalizó matemáticamente un conjunto de técnicas desarrolladas por Daniel Gerhardus Krige que exploraba la *correlación espacial* para hacer predicciones en minas de oro en Sudáfrica. Él definió a la geoestadística como “la aplicación del formalismo de las *funciones aleatorias* al reconocimiento y estimación de fenómenos naturales” (Matheron, 1962).



Fotografía del profesor Georges Matheron, fundador de la geoestadística, falleció el 7 de agosto de 2000.

Matheron desarrolló sus habilidades en Matemáticas, Física y Probabilidad en la Escuela Politécnica (X49), y luego en la Escuela de Minas de París (ingeniero del Cuerpo de Minas, una estructura que reúne altos funcionarios del Ministerio de Industria).

Emery (2013) define la geoestadística como un conjunto de técnicas usadas para analizar y predecir valores de una propiedad distribuida en espacio o tiempo. En contraposición con la estadística clásica o convencional, tales valores no se consideran independientes, por el contrario, se suponen de manera implícita que están correlacionados unos con otros, es decir que existe una dependencia espacial. Esto indica que mientras más cercanos estén

situados dos puntos, están más correlacionados y mientras más separados hay menos relación entre estos.

El proceso de estimación y modelación de la función que describe la correlación espacial es conocido como “análisis estructural”. Una vez realizado este análisis, la predicción de valores en puntos no muestrales se puede hacer aplicando la técnica de interpolación “kriging” o simulándolos a través de “simulaciones condicionales”

Un análisis geoestadístico está compuesto por tres etapas:

1. Análisis exploratorio de los datos.
2. Análisis estructural.
3. Las predicciones (kriging o simulaciones).

Muchas de las ideas de la geoestadística son inspiradas en las series cronológicas o series de tiempo. Puesto que los objetivos del análisis de series de tiempo son similares a los de la geoestadística. Mientras que el análisis de series temporales está orientado al estudio de procesos unidimensionales con datos muestrales uniformemente distribuidos.

La Geoestadística es aplicada en diversas ramas de las ciencias aplicadas y en las ingenierías, tales como: la industria petrolera, minería, pesca, geofísica marina, hidrogeología, medio ambiente, estudios forestales, salud pública, ingeniería civil, procedimiento de imágenes, cartografía, finanzas, ciencias de materiales, meteorología, edafología, etc.

#### Bibliografía

- Emery, X. (2013). *Geoestadística*. Chile: Editorial UCH.
- Henao, R. G. (s.f.). *Introducción a la Geoestadística*. Colombia: Editorial UNC.
- Matheron, G. (1962). *Traité de Géostatistique Appliquée*. París: Technip.
- Viera, M. D. (2002). *Geoestadística Aplicada*. Cuba: CITMA.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 29

### LA TEORIA DE HODGKIN – HUXLEY

Elisa Salcedo Talamantes

Asesor: L.F.M. Isaac Mejía Hernández isaac.mejher@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED

elisa\_st\_1995@hotmail.com

Área del trabajo: Ecuaciones diferenciales

A partir de trabajos comenzados en la década de 1930, tras un intervalo impuesto por la Segunda Guerra Mundial, los fisiólogos y biofísicos británicos Alan Lloyd Hodgkin (1914-1998) y Andrew Fielding Huxley (1917-2012) concluyeron a comienzos de la década de 1950 uno de los modelos matemáticos más exitosos y representativos de las neurociencias.



Se ofrece una breve exposición histórico-técnica de este valioso instrumento conceptual neurobiológico. Señalamos su estructura (un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, acopladas, no lineales, dependientes del espacio y del tiempo) así como el desarrollo de su influencia como modelo vigente en la biofísica actual. Con la integración de este sistema de ecuaciones, dichos autores lograron describir la generación y propagación del potencial de acción en el axón gigante de calamar, como así también explicar sus principales propiedades. La importancia de estos trabajos en el desarrollo de las neurociencias de la segunda mitad del Siglo XX es realmente significativa.

La conducción del potencial de acción en un axón está gobernada por la ecuación diferencial

$$-\frac{a}{2R} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + C \frac{\partial V}{\partial t} + G_l(V - V_l) + G_{Na}^0 m^3 h (V - V_{Na}) + G_K^0 n^4 (V - V_K) = 0 \quad (1)$$

En donde  $C$  es la capacidad por unidad de área del axón (de radio  $a$  y resistividad axoplasmática  $R$ ). Las funciones  $m$ ,  $h$  y  $n$ , son dependientes del tiempo y del valor del potencial de membrana, y están relacionadas con las conductancias del sodio (Na) y del potasio (K) por medio de las expresiones:

$$G_{Na} = G_{Na}^0 m^3 h \quad \text{y} \quad G_K = G_K^0 n^4 \quad (2)$$

A su vez, Hodgkin y Huxley modelaron la dinámica de las funciones  $n$ ,  $h$  y  $m$ , por medio de las ecuaciones:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \alpha[V](1 - \Theta) - \beta[V]\Theta \quad (3)$$

En donde  $\Theta$  representa a cualquiera de las funciones  $n$ ,  $h$  o  $m$ , y los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  (dependientes del valor del potencial de membrana) son distintos para cada una de esas funciones. Es interesante destacar que Hodgkin y Huxley llegaron a esta dinámica por un cuidadoso análisis del comportamiento de las conductancias para los iones sodio y potasio, lo que fue posible gracias al desarrollo de la técnica de la pinza de voltaje.

Desde un punto de vista matemático el sistema de ecuaciones (1-3) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, acopladas, no lineales, dependientes del espacio y del tiempo. En 1952 Hodgkin y Huxley realizaron una integración del sistema (1-3), logrando de manera destacada reproducir las principales características observadas para el potencial de acción.

### Bibliografía

García Reimbert C. 1991. *Aplicaciones de las matemáticas a la biología*. VII Coloquio del departamento de matemáticas. ESFM-IPN.

Carrillo Martínez N. (2010) *Modelación de la actividad neuroeléctrica*. Tesis inédita de UNAM

## Ponencia de Divulgación 30

### ¡UN SIMPLE SIGNO DE ADMIRACIÓN!

Héctor Alan, Olvera Martínez.

Jafed Alejandro, Martínez Sánchez.

Asesora: Adriana, Escobedo Bustamante

*alanolvera1234@hotmail.com, jafsed@hotmail.com.*

Facultad de Ciencias Exactas.

Aritmética

En este trabajo se habla sobre la definición y aplicación del número factorial. Si se tiene la expresión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , donde  $n$  puede tomar el valor de cualquier número entero y se prueba con algunos valores, se tiene: para  $n = 1$ , la expresión quedaría  $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ ; si  $n = 2$  entonces  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$ ; si  $n = 3$ , entonces  $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.3074$  aproximadamente. La Tabla 1 muestra los valores de la expresión para un número determinado de valores para  $n$ .

Tabla 19.

Valores de la expresión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  para diferentes valores de  $n$ .

| $n$ | $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ |
|-----|----------------------------------|
| 1   | 2                                |
| 2   | 2.25                             |
| 3   | 2.3074                           |
| 4   | 2.4414                           |
| 5   | 2.4888                           |
| 10  | 2.5936                           |
| 20  | 2.6534                           |
| 50  | 2.6915                           |
| 100 | 2.7051                           |
| 200 | 2.7164                           |

Como se puede observar el valor de la expresión se acerca a lo que en matemáticas conocemos como el número  $e$ . Además, a medida que crece el valor de  $n$ , aumenta el valor de la expresión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Pero, el valor de la expresión aumenta cada vez más despacio a medida que crece  $n$ . Cuando  $n$  se duplica pasando de 1 a 2, la expresión aumenta su valor en 0.25. Cuando  $n$  se duplica y pasa de 100 a 200, la expresión aumenta su valor en 0.0113.

Los valores sucesivos de la expresión forman lo que se denomina una sucesión convergente que se acerca a un valor límite definido. Esto quiere decir que cuanto más alto sea el valor de  $n$ , más se acerca el valor de la expresión a un valor límite especial, sin jamás alcanzarlo del todo y mucho menos sobrepasarlo.

Pero hay una forma más fácil de encontrar los valores del número  $e$  que implica una serie

de sumas y así podemos evitar sustituir  $n$  en la expresión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . La suma es:

$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 \dots$ , si se va realizando la suma se tiene:  $2 + \frac{1}{2} = 2.5$ ,  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.666 \dots$ ,  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.7083333 \dots$ ,  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2.7166 \dots$ ,  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2.71805555 \dots$ , y así sucesivamente.

Como se observa, cada vez que se agrega una cantidad a la suma, se tendrá una mejor aproximación al valor de  $e$ . Pero ¿cómo podemos calcular cuál número seguirá en esta serie?

Por ejemplo:

En la sucesión 2, 3, 5, 7, 11... el siguiente número sería el 13, puesto que van ordenados respecto a los primeros números primos. Si se tiene 2, 8, 18, 32, 50... el siguiente número sería el 72, porque esa sucesión está relacionada con la expresión  $2n^2$ . Pero en el caso de la sucesión  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \dots$  ¿Cuál sería el siguiente número? Antes de responder a la pregunta, se verán otros ejemplos.

Se podrá imaginar un monasterio con campanas distintas, cada campana afinada de la forma típica (Do, Re, Mi, Fa...etc.). Y hay un hombre encargado de tocar las campanas, y después cambiar el orden de las notas que toca, de manera que la primera tocada y la segunda tocada sean distintas entre sí, y cada vez que toque otra vez las campanas volver a cambiar el orden, de tal manera que nunca suenen iguales y se agoten las probabilidades. Si se simboliza cada campana con un signo de admiración “!” de tal manera que cuando toque una campana lo simbolizaremos con 1!, si toca 2 campanas pues 2!, y así sucesivamente...

Cuanto no toca ninguna campana (0!) sólo hay un sonido que se reproduce, el de la nada, por lo tanto  $0! = 1$ , pero cuando sólo toca una campana  $1! = 1$  porque solo hay un sonido que reproduce, supongamos que es un Do. Cuando toca dos campanas hay dos maneras distintas de que suenen las campanas, por ejemplo Do, Re y Re, Do, de tal manera que  $2! = 2$ . Cuando toca tres campanas se empieza a complicar las cosas pues supongamos que los tonos son Do, Re y Mi, ¿de cuántas maneras se pueden tocar de manera que ninguna vez suene igual? Las diferentes formas son: 1) Do, Re, Mi; 2) Do, Mi, Re; 3) Mi, Do, Re; 4) Mi, Re, Do; 5) Re, Mi, Do; y, 6) Re, Do, Mi. Así, son 6 maneras diferentes, por lo que podemos decir que  $3! = 6$ . Con cuatro campanas serían cuatro tonos diferentes, Do, Re, Mi, Fa, encontrar las maneras en que las puede tocar el hombre llevaría un buen rato, pero se observa que es posible encontrar que  $4! = 24$ . De esta manera, cuando toque cinco campanas será de 120 maneras diferentes, entonces  $5! = 120$ ; con seis campanas serían 720 maneras, por lo que

$6! = 720$ . Entonces se tiene que:  $1! = 1$ ;  $2! = 2$ ;  $3! = 6$ ;  $4! = 24$ ;  $5! = 120$ ;  $6! = 720$ .

Retomando la sucesión  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \dots$ , y sustituyendo los valores antes mencionados tenemos que  $\frac{2}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \dots$ . Siguiendo el patrón se observa que el siguiente número sería  $7!$ , y después  $8!$  y así sucesivamente... Respondiendo a la pregunta que quedó pendiente, el número siguiente de la sucesión  $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \dots$  sería  $\frac{2}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$ . Para encontrar cuánto es  $7!$  tendría que contar las

variaciones en las que se pueden tocar 7 campanas de manera que ninguna tocada suene igual a la otra, lo mismo con 8! y 9!.

Hay una manera más sencilla de encontrar las variaciones sin tener que tocar todas las campanas. Si se empieza con cuatro campanas, la primera vez que se toque una campana se puede escoger cualquiera, hay 4 opciones; al momento de tocar la siguiente campana, sólo se tienen 3 opciones, porque la primera ya no se puede tocar; para tocar la tercera campana sólo es posible usar 2 campanas y finalmente, sólo quedaría una campana por tocar lo cual sería  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ . Así, con 7 campanas se tiene  $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5,040$ . Es claro que el símbolo “!” no significa campana, en matemáticas se le denomina “factorial” así que 7! se lee siete factorial. Tampoco estos números solamente representan variaciones en las que se tocan las campanas, sino también el número de órdenes posibles en los que pueden aparecer los naipes en un mazo bien barajado, número de variantes en las que se pueden sentar varias personas en una mesa, etc. Pero ¿por qué factorial? Se puede suponer que el número 5,042 tiene como factor (o divisor) cualquier número del 1 al 7 entonces 5,042 es el factorial de 7. Lo mismo para cualquier número  $n$ , todos los enteros entre 1 y  $n$  son factores de  $n!$ , por lo cual es llamado “ $n$  factorial”.

## REFERENCIAS

Asimov., I. (-). *De los números y su historia.* -: El Ateneo, 2000.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 31

### RED DE STEINER

Ana Cristina Cabral Álvarez. Asesora: MC Adriana Escobedo Bustamante.  
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango.  
*ana171296@gmail.com*  
Geometría

Se llama circunferencia al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Denotaremos a la circunferencia con la letra  $C$  y al centro con  $o$ .

Dados tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  no colineales, estos siempre determinan una circunferencia  $C$ , el centro de  $C$  es intersección de las mediatrices del triángulo  $\Delta PQR$ , y el radio es la distancia de  $o$  a cualquiera de vértice. Ver figura 1

Si fijamos dos puntos  $Q$  y  $R$ , cada vez que elijamos un tercer punto  $P$  en el plano tendremos una circunferencia, salvo que  $P$  sea colineal con  $Q$  y  $R$ ,

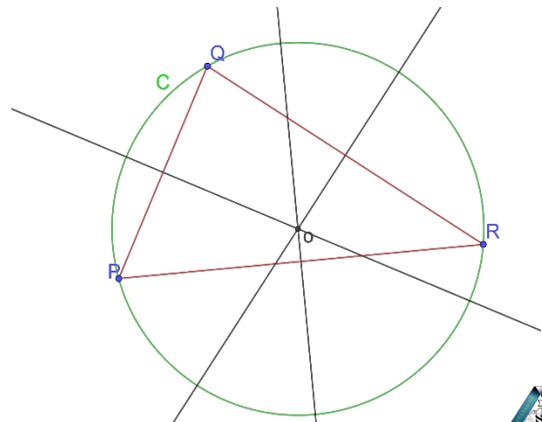


Figura 1



en este caso tendremos una recta. Entonces, hay un número infinito de circunferencias determinado por  $Q$  y  $R$ . Ver figura 2

Si dibujamos los centros de las cuatro circunferencias que aparecen en la figura 2, podemos observar que aparentemente pertenecen a una misma recta.

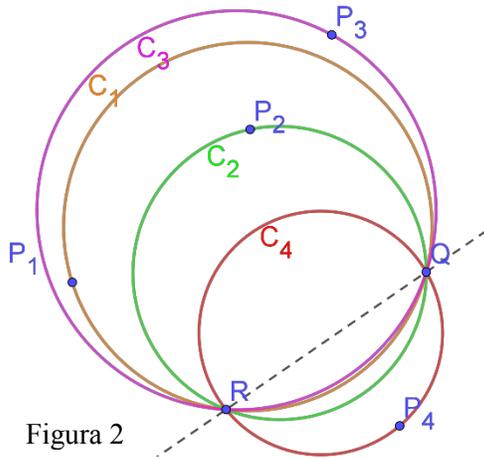


Figura 2

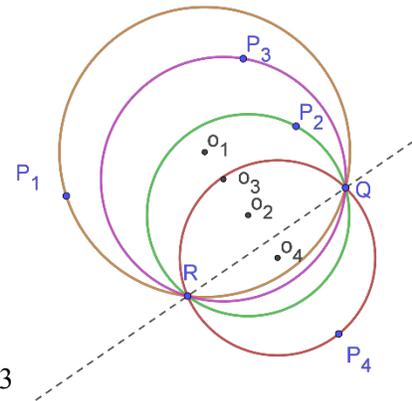


Figura 3

Es claro, que todos estos centros pertenecen  $m$ , a la mediatriz del segmento  $QR$ , ya que para cualquier  $o_i$ , se tiene que

$$d(R, o_i) = d(Q, o_i)$$

Entonces se tiene que efectivamente los centros son colineales.

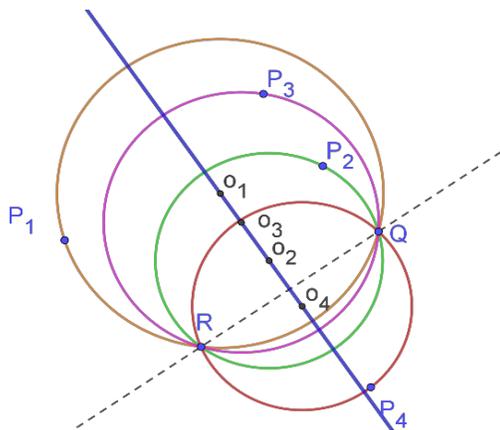


Figura 4

Sea  $O \in m$ , entonces trazamos la circunferencia  $C$  que pasa por  $R$  y tiene centro en  $O$ , por lo tanto  $Q \in C$  y  $d(R, O) = d(O, Q)$ .

La recta  $m$  es perpendicular a todas las circunferencias.

Sea  $K \in \mathbb{R}^+$ ,  $X$  es el lugar geométrico de todos los puntos  $P$  tales que:

$$\frac{d(Q, P)}{d(R, P)} = k.$$

$X$  cumple las siguientes propiedades:

$X$  es un conjunto simétrico respecto a la recta que pasa por  $Q, R$ .

Además se puede ver que  $X$  es una circunferencia cuyo diámetro son los puntos armónicos de  $A, B$

Esta circunferencia es llamada la circunferencia de Apolonio.

Cada  $K$  determina una circunferencia.

Esta familia de circunferencias junto con la construida anteriormente es lo que se conoce como la red de Steiner.

Bibliografía.

Ramírez Galarza Ana Irene, Seade Kurí (2016): *“Introducción a la geometría avanzada”*.

Lascurain Antonio Orive (2014): *“Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional”*.

Ramírez Galarza Ana Irene, Sierra Loera G.(2015): *“Invitación a las geometrías no euclidianas”*.

Ramírez Galarza Ana Irene(2017): *“Geometría analítica: Una introducción a la geometría analítica”*

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 32

### UN POCO DE MATRICES Y CADENAS DE MARKOV

Raúl Vargas Antuna

Facultad de Ciencias Exactas - UJED

*raul.vargas@cimat.mx*

Probabilidad y álgebra lineal.

En el estudio de los eventos aleatorios es común encontrar sucesos cuya ocurrencia depende solo del evento inmediato anterior. Estos eventos son analizados mediante un



método llamado cadenas de Markov, en honor al matemático ruso Andréi Andréyevich Markov (1856-1922), quien introdujo el método en 1906. Una cadena de Markov es una secuencia de valores de una variable aleatoria en la que el valor de la variable en el futuro depende del valor de esta en el presente, pero es independiente de los valores históricos de esta variable.

En un principio, las cadenas de Markov fueron utilizadas para analizar procesos en física y meteorología; una de sus primeras aplicaciones fue la predicción de los patrones del clima. Pero la restricción sobre la dependencia exclusiva al suceso inmediato anterior imposibilitaba las aplicaciones de las cadenas de Markov. Sin embargo, muchos eventos aleatorios pueden considerarse dentro de esta restricción; con esto, una gran parte de los fenómenos aleatorios pueden ser calificados como de este tipo, por lo que las aplicaciones de las cadenas de Markov crecen de manera considerable. Algunas de las áreas en las que suele dársele uso a las cadenas de Markov son:

**-Investigación de operaciones.**

En inventarios, mantenimiento y flujo de proceso.

**-Simulación.**

Para proveer una solución analítica a ciertos problemas de simulación, como el modelo líneas de espera.

**-Economía y finanzas.**

En modelos simples de valuación de opciones, para determinar cuándo existe oportunidad de arbitraje, así como en el modelo de colapsos de una bolsa de valores o para determinar la volatilidad de los precios. En los negocios, las cadenas de Markov se utilizan para analizar los patrones de compra de los deudores morosos, planear las necesidades de personal y analizar el reemplazo de equipo.

**-Física.**

En problemas de termodinámica y física estadística. Ejemplos importantes se pueden encontrar en la cadena de Ehrenfest o el modelo de difusión de Laplace.

**-Meteorología.**

Por lo general, en esta área de las ciencias se hace la consideración de que el estado actual del clima de una región solo depende del último estado y no de toda la historia en sí; por tanto, se usan cadenas de Markov para formular modelos climatológicos básicos.

**-Modelos epidemiológicos.**

En los procesos de Galton-Watson, para modelar el desarrollo de una epidemia.



**-Internet.**

El pagerank de una página web (usado por Google en sus motores de búsqueda) se define a través de una cadena de Markov, donde la posición que tiene una página en el buscador está determinada por su peso en la distribución estacionaria de la cadena.

**-Juegos de azar.**

El modelo de la ruina del jugador, el cual establece la probabilidad de que una persona que apuesta en un juego de azar al final termine sin dinero, es una de las aplicaciones de las cadenas de Markov en este rubro.

**-Genética.**

Para describir el cambio de frecuencias génicas en una población pequeña con generaciones discretas, sometida a deriva genética (véase el modelo de difusión de Moto-Kimura).

**-Música.**

Diversos algoritmos de composición musical usan cadenas de Markov; por ejemplo, el software Csound o Max.

En la charla se abordarán las definiciones básicas para llegar a ver lo que son las cadenas de Markov, como es que las matrices son útiles en el uso de cadenas de Markov y el cómo aplicar esta teoría para resolver un pequeño problema sobre los televidentes de algunas emisoras de televisión.

**Bibliografía:**

- Rincón Luis, Introducción a los procesos estocásticos, UNAM.
- Gutiérrez González E. y Ochoa García S. I. Álgebra lineal y sus aplicaciones.
- Nabos G. y Joyner D. Álgebra lineal con aplicaciones. U. S. Naval Academy.

[Programa general](#)

**Ponencia de Divulgación 33****MOVIMIENTO RETRÓGRADO DE LOS PLANETAS**

Emmanuel Ramos Rochel, Erick Assael Beltrán Hernández  
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez Del Estado de Durango  
*Xzalpha@gmail.com, erick\_behe@hotmail.com*  
Variable compleja

Utilizaremos la forma exponencial de los números complejos para explicar cualitativamente el movimiento aparentemente retrógrado que tienen los planetas vistos desde la Tierra. La



formulación con números complejos resulta elegante y los cálculos no son demasiado. Es conocido que, vistos desde la Tierra, los planetas exteriores a la órbita terrestre, siguen trayectorias no uniformes. Si registramos observaciones sistemáticas de la posición de un planeta durante un año, parece como si el planeta, a veces, avanzara y retrocediera por el firmamento. Este fenómeno dio muchos quebraderos de cabeza al sistema astronómico ptolemaico y no se comprendió en profundidad hasta que aparecieron los trabajos de Kepler y Newton. Explicar dicho movimiento retrógrado es sencillo usando números complejos ya que la forma exponencial permite parametrizar curvas sobre el plano de una manera muy fácil. Por ejemplo,

$$z(t) = Re^{it}$$

representa la circunferencia  $|z| = R$  cuando hacemos variar el parámetro  $t$  de 0 a  $2\pi$ . En nuestro caso,  $t$  va a ser el tiempo. Por tanto, sea

$$zT(t) = e^{2\pi it}$$

la posición de la Tierra en el plano cuyo centro de coordenadas lo representa el Sol y donde hemos tomado la distancia Tierra-Sol igual a 1 unidad astronómica. Empezando en  $t = 0$ , tras  $t = 1$  año la Tierra una órbita circular alrededor del Sol (la órbita en realidad es elíptica, pero con una excentricidad tan pequeña que preferimos simplificar el problema). Sea

$$zM(t) = re^{2\pi it/\tau}$$

la posición de otro planeta (por ejemplo, Marte).  $r$  es la distancia al Sol en unidades astronómicas y  $\tau$  es el periodo del planeta en años terrestres. Entonces, desde la Tierra el planeta se encontrará a la distancia relativa

$$d(t) = zM(t) - zT(t) = re^{\frac{2\pi it}{\tau}} - e^{2\pi it} \equiv \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Por supuesto, la distancia física es  $\rho(t)$ , siendo  $d(t)$  el vector que une los puntos  $T$  y  $M$ . Si  $\theta(t)$  es una función monótonamente creciente en el tiempo, entonces desde la Tierra no se observaría ningún movimiento anómalo. Nuestro objetivo, pues, es calcular  $\theta(t)$  y estudiar su comportamiento cuando  $t$  aumenta.

En primer lugar, pasamos a coordenadas rectangulares:

$$d(t) = \left( r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t \right) + i \left( r \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t \right)$$

Luego el argumento de  $d(t)$  es:

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{r \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t}{r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t}$$

Para ver si esta función es monótona o no, calculamos su derivada  $\theta' = d\theta/dt$ :

$$\theta' = \frac{2\pi}{1 + \theta(t)^2} + \frac{\eta(t)}{\left( r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t \right)^2}$$

Donde hemos definido la función



$$\eta(t) = \left(\frac{r}{\tau} \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t\right) \left(r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t\right) \\ + \left(r \tau \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t\right) \left(r \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t\right)$$

Basta estudiar el signo de  $\eta(t)$  pues los otros términos que entran en la expresión de  $\theta'$  son siempre positivos para todo  $t$ . Simplificando, tenemos que

$$\eta(t) = 1 + \frac{r^2}{\tau} - r(1 + \tau) \cos\left[2\pi t\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\right]$$

Buscamos ahora los extremos relativos de  $\theta(t)$  haciendo  $\eta(t) = 0$ . Utilizando la tercera Ley de Kepler, que relaciona el periodo de un planeta con su distancia al Sol:

$$\tau^2 = r^3$$

Obtenemos la siguiente condición:

$$\cos\left[2\pi t\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\right] = \frac{r + r^{\frac{1}{2}}}{1 + r^{\frac{3}{2}}}$$

La función que aparece el miembro izquierda de la ecuación es siempre menor que 1 ya que  $r > 0$ . Como el coseno está acotado entre  $-1$  y  $1$ , cabe, en principio, alguna  $t$  para el cual se satisface la condición anterior. Es decir, la función  $\theta(t)$  posee, en general, algún máximo o mínimo local. Luego no es monótona y eso se tiene que reflejar en que el planeta parezca avanzar y retroceder si lo observamos desde la Tierra.

Bibliografía:

Métodos de Variable Compleja para la Física- David Sánchez Martín

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 34

### INTERSECCION DE SUBGRUPOS EN GRUPOS LIBRES

Abraham Duvany Mora Sarabia, Jesús Alfredo Lerma Domínguez

Saúl Nevares Nieto

duvalin\_2486@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas

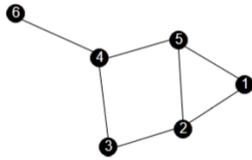
duvalin\_2486@hotmail.com, jesuslerma.jld@gmail.com

Un grafo  $\Gamma$  es un conjunto no vacío  $V$  de vértices y un conjunto  $E$  de aristas extraído de la colección de  $v \times v$ . Una arista de  $\Gamma$  es pues, un subconjunto  $\{a,b\}$  con  $a,b \in V$ . Se define  $V\Gamma$  como el conjunto de vértices de  $\Gamma$ .

Ejemplo:

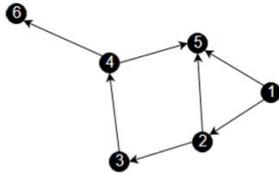


$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$

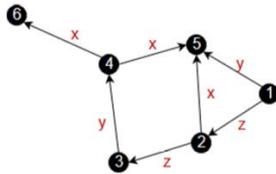


A continuación daremos una clasificación de grafos que utilizaremos para desarrollar y resolver el problema de intersección en grupos libres.

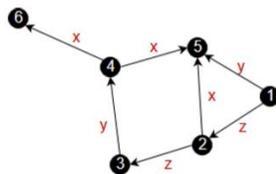
Un grafo dirigido es un tipo de grafo en el cual las aristas tienen un sentido definido.



Un grafo etiquetado es un grafo en el cual las aristas o vértices tienen asignadas etiquetas.

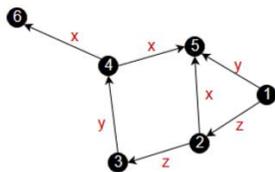


Un camino es una secuencia de aristas en el vértice final de cada arista coincide con el vértice inicial de la siguiente arista en la secuencia.



La etiqueta de un camino es la concatenación ordenada de las etiquetas de cada una de las aristas que conforman el camino.

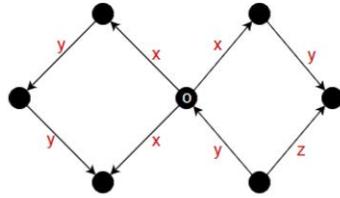
Decimos que un vértice  $v$  de  $\Gamma$  tiene una arista entrante  $\alpha$  si  $v$  es el punto final de  $\alpha$ . Decimos que un vértice  $v$  de  $\Gamma$  tiene una arista saliente  $\alpha$  si  $v$  es el punto inicial de  $\alpha$ .



Grafo de Stallings es un grafo dirigido y etiquetado.

Sea  $H < F(X)$ , podemos asociar a  $H$  un grafo de Stallings el cual denotaremos por  $\Gamma(H)$ .

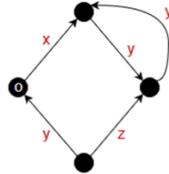
Ejemplo: Sea  $H = \langle xyz^{-1}, xy^2x^{-1} \rangle$



### Grafo empalmado de Stallings

Sea  $\Gamma$  un grafo de Stallings. Decimos que  $\Gamma$  es un grafo empalmado de Stallings si para cada vértice  $v$  de  $\Gamma$ , no existen 2 aristas entrantes o dos aristas salientes en  $v$  que tengan la misma etiqueta

$$H = \langle xyz^{-1}y, xy^2x^{-1} \rangle$$



Mediante el uso de los grafos empalmados de Stallings podemos determinar:

- Una palabra pertenece o no a  $H$
- La intersección de dos subgrupos de  $F(X)$
- El índice de  $H$
- $H$  es o no un subgrupo normal

### Álgebra Moderna

Un grupo es un conjunto con una operación binaria que cumple con los siguientes 3 axiomas:

1. Asociatividad
2. Existencia del neutro
3. Inversos

Vamos a definir al grupo  $X = (x, y, z)$ . Una palabra sobre  $X$  es una sucesión finita  $w = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  de elementos de  $X$ . Por ejemplo:

$$w = xyyx, w = zxyzxy$$

En particular, la palabra con cero letras es una palabra que denotamos por 1.

Denotemos por  $F(X)$  a el conjunto de todas las palabras formadas por los elementos de  $X$ . Sea  $\Phi : F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$  la concatenación de palabras.

$$\Phi(xy, zxx) = xyzxx$$

Un conjunto  $F(X)$  con la operación de concatenación (La operación concatenación es el juntar palabras) de palabras que forman un grupo conocido como grupo libre.

Un subgrupo es un subconjunto de un grupo que cumple con las siguientes propiedades:

1. Es cerrado bajo la operación binaria del grupo
2. Existencia del neutro
3. Existencia de inversos

A continuación definiremos que son las clases laterales para luego definir el índice de un grupo

Sea  $H$  un subgrupo de un grupo  $G$ . Se define la clase lateral izquierda  $aH$  de  $H$ , donde  $a \in G$  como:

$$aH = \{ah : h \in H\}.$$

De manera análoga se define la clase lateral derecha

El índice de un grupo es el número de clases laterales izquierdas de  $H$  en  $G$  y se denota por  $[G:H]$

Ahora definiremos que es un subgrupo normal

Un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  se dice normal (invariante) si  $gHg^{-1} = H$  para todo  $g \in G$ , es decir, si  $H$  es invariante sobre cualquier conjugación en  $G$ .

Sean  $\Gamma$  y  $\mathbb{C}$  grafos empalmados definiremos el producto de grafos como sigue:

El conjunto de vértices de  $\Gamma \times \mathbb{C}$  se define como  $V \Gamma \times V \mathbb{C}$  y definiremos a  $X$  como el grafo generado por este producto

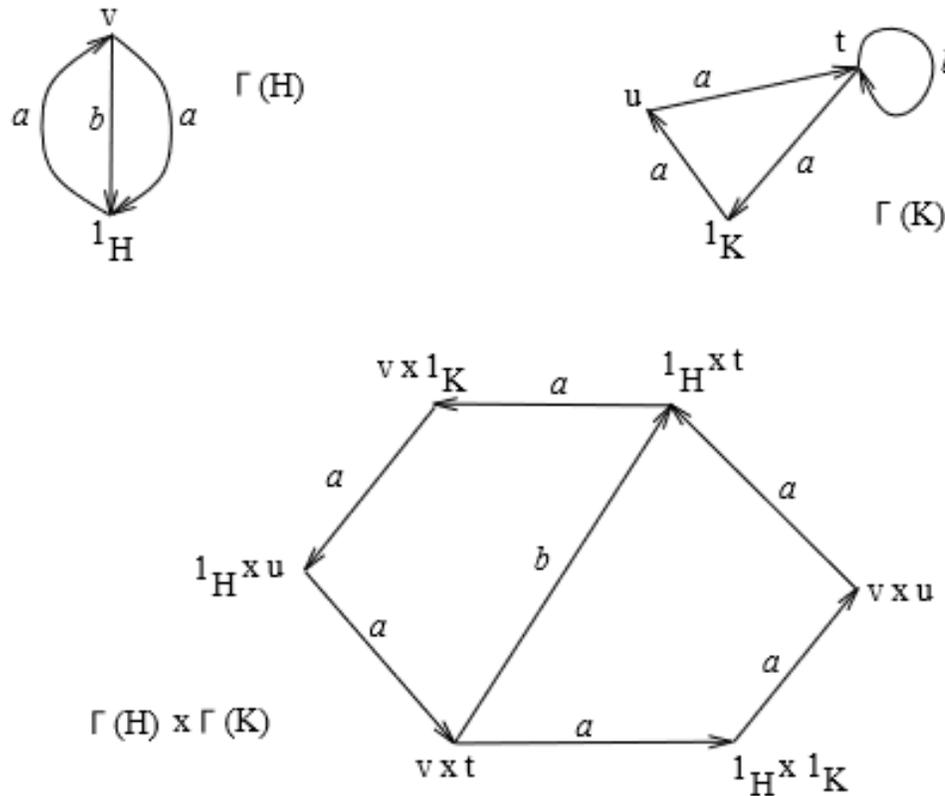
Para un par de vértices  $(u,v), (u',v') \in V(\Gamma \times \mathbb{C})$  de ahí podemos ver que  $v, v' \in V \Gamma$  y  $u, u' \in V \mathbb{C}$  y la letra  $x \in X$  introducimos un borde etiquetado  $x$  con origen  $(v,u)$  y final  $(v',u')$  con esto tenemos un borde, etiquetado  $x$ , de  $v$  a  $v'$  en  $\Gamma$  y hay un borde, etiquetado  $x$ , de  $u$  a  $u'$  en  $\mathbb{C}$

Por lo tanto  $\Gamma \times \mathbb{C}$  es un  $X$ -Grafo. Que en esta situación denotaremos el vértice  $(v,u)$  de  $\Gamma \times \mathbb{C}$  por  $v \times u$

## Ejemplo de producto de grafos

STALLINGS FOLDINGS

26



La intersección de dos grafos empalmados la podemos encontrar en el grafo generado al hacer el producto de los dos subgrupos en el cual serían los ciclos generados dentro del mismo.

## Referencias

- i. Kapovich and a. myasnikov, "Stallings foldings and subgroups of free groups," j. Algebra, vol. 248, No. 2, Pp. 608-668, 2002.
- J. Frealeigh, "Álgebra Abstracta Un Primer Curso", Sistemas Tecnicos de Edicion S.A. de C.V., Mexico, D.F., 3era edición, 1988.
- G. Duran, "Teoría de Grafos", Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2008
- R. Johnsonbaugh, "MATEMÁTICAS DISCRETAS", PEARSON EDUCACIÓN, México, Sexta Edición, 2005

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 35

### NIVEL DE APROVECHAMIENTO EN ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA EN ESTUDIANTES DE TERCERO DE SECUNDARIA

Autor: Carlos Michelle Díaz Leyva, Asesor: Dra. María del Carmen Olvera Martínez  
*cdiazleyva@gmail.com*

UNIVERSIDAD JUAREZ DEL ESTADO DE DURANGO

Facultad de Ciencias Exactas

Estadística

El objetivo de la Estadística es recopilar información de orden cualitativa o cuantitativa, perteneciente a individuos, grupos, hechos o fenómenos, y deducir a partir del análisis de los datos respuestas a interrogantes o proyecciones futuras. La estadística, en general, estudia los métodos empleados en la recolección, organización, resumen, análisis e interpretación de datos, con el fin de obtener validez en las conclusiones y tomar decisiones de manera razonable y efectiva (Spiegel, 2013). Además, se usa en áreas de negocios o instituciones gubernamentales ya que su principal objetivo es describir al conjunto de datos obtenidos para la toma de decisiones o bien, para realizar generalizaciones sobre las características observadas.

En este trabajo se hace uso de la estadística descriptiva para mostrar los resultados obtenidos de la aplicación de un cuestionario cuyo objetivo era medir el nivel de aprovechamiento en aritmética y álgebra en alumnos de tercer grado de secundaria. Esta investigación surgió de la necesidad de analizar el desempeño académico de tres diferentes secundarias con base en el reconocimiento, ubicación y demanda de las mismas. Se escogió a alumnos de tercero de secundaria de manera arbitraria, en un principio, se esperaba que el desempeño de los alumnos de las escuelas secundarias de mayor demanda fuera mejor. Se analizó una muestra de 60 estudiantes, 20 de cada una de las tres escuelas secundarias seleccionadas para el estudio. Se consideraron tres escuelas de características diferentes con la finalidad de comparar los resultados entre ellas. La escuela secundaria A, pertenece al sistema de escuelas secundarias técnicas y es considerada entre las mejores de su tipo en el turno matutino, donde fue aplicado el cuestionario. La escuela secundaria B, se ubica en el sistema de escuelas secundarias generales y se aplicó el cuestionario a estudiantes del turno vespertino, esta escuela se encuentra en una zona alejada del centro de la ciudad y carece de un buen prestigio. La escuela secundaria C, también es del sistema de escuelas secundarias generales, se ubica en una zona céntrica de la ciudad y cuenta con fama de tener un buen nivel académico en el turno matutino de donde se escogió la muestra.

El cuestionario estuvo conformado por diez preguntas de opción múltiple las cuales se obtuvieron del libro Álgebra y Aritmética del Colegio Nacional de Matemáticas (CONAMAT); cinco se enfocaban en contenidos de aritmética y las restantes en álgebra (Tabla 1). Las preguntas están enfocadas en algebra y aritmética, ya que estos campos son indispensables a nivel medio superior, ya que su aplicación continua en materias como son geometría, cálculo diferencial e integral. El cuestionario abarca contenidos como: operaciones de fracciones, potenciación, jerarquía de operaciones, ecuaciones lineales,

problemas contextualizados y sucesiones. La aplicación del instrumento se llevó a cabo durante la clase de matemáticas en un módulo de 40 minutos.

Tabla 20.

*Cuestionario de problemas de aritmética y álgebra*

|  |  |
|--|--|
| <p>1. Si <math>x = -2</math> y <math>y = 3</math>, ¿Cuál es el valor de la expresión <math>\frac{xy}{(-5)}</math>?</p> <p>a) <math>\frac{6}{5}</math><br/> b) <math>-\frac{6}{5}</math><br/> c) <math>-\frac{1}{5}</math><br/> d) <math>\frac{1}{5}</math></p> <p>2. ¿Cuál es el resultado de simplificar la expresión <math>(2^3 \times 2^2)</math>?</p> <p>a) 32<br/> b) 24<br/> c) 64<br/> d) 54</p> <p>3. ¿Cuál es el valor de <math>x</math> en la ecuación <math>\frac{1}{4}x + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}</math>?</p> <p>a) <math>\frac{4}{3}</math><br/> b) <math>\frac{16}{3}</math><br/> c) 12<br/> d) <math>\frac{1}{12}</math></p> <p>4. ¿Cuál es el valor que falta en la expresión <math>(72) ( \quad ) + 20 = 216</math>?</p> <p>a) 3<br/> b) <math>\frac{49}{18}</math><br/> c) <math>-\frac{42}{5}</math><br/> d) -3</p> <p>5. ¿Cuánto debe valer <math>x</math> para que se cumpla la siguiente igualdad <math>(x^3)^2 = 64</math>?</p> <p>a) 3<br/> b) 2<br/> c) 7<br/> d) 1</p> | <p>6. En un taller de carpintería un equipo de 6 carpinteros, hacen 60 puertas en 15 días. Si la empresa que los contrató requiere 900 puertas en máximo de 6 quincenas, ¿cuántos trabajadores más necesitan contratar para entregar a tiempo el pedido, bajo el supuesto de que todos trabajaran al mismo ritmo?</p> <p>a) 6<br/> b) 9<br/> c) 12<br/> d) 15</p> <p>7. En la sucesión numérica -6,-1, 4,9, ... ¿Cuál es el término que ocupa la posición 9?</p> <p>a) -20<br/> b) -2<br/> c) 25<br/> d) 34</p> <p>8. ¿Cuál es el resultado al efectuar las siguientes operaciones <math>(2 \times 4 + 12)(6 - 4)(8 \div 2 - 2)</math>?</p> <p>a) 64<br/> b) 0<br/> c) 32<br/> d) 80</p> <p>9. Si por un kilo de manzana se paga \$16.00 y por un kilo de naranja \$7.00 ¿Cuánto se pagará en total si compran 2.5 kg de manzana y 3.5 kg de naranja?</p> <p>a) \$40.00<br/> b) \$33.50<br/> c) \$24.60<br/> d) \$64.50</p> <p>10. ¿Cuál es la solución de la ecuación <math>5(x - 3) - 2 = 23</math>?</p> <p>a) <math>x = 2</math><br/> b) <math>x = 5.6</math><br/> c) <math>x = 7.2</math><br/> d) <math>x = 8</math></p> |
|--|--|

En el análisis de los datos recolectados, primeramente, se calificaron los cuestionarios. Los resultados muestran que las calificaciones oscilan entre cero y nueve, siendo 2 la moda, es decir, la calificación más frecuente (Figura 1). Los promedios específicos de cada escuela fueron: la escuela A obtuvo 4, la escuela B alcanzó un 3.1 y la escuela C tuvo 2.7. También, se analizó de manera general, en cuál área tenían mayor dificultad, siendo los problemas de álgebra donde hubo más respuestas incorrectas. Algunas de las dificultades que se observaron son: los estudiantes no identifican la notación de operaciones básicas y no reconocen operaciones inversas para el despeje de una incógnita.

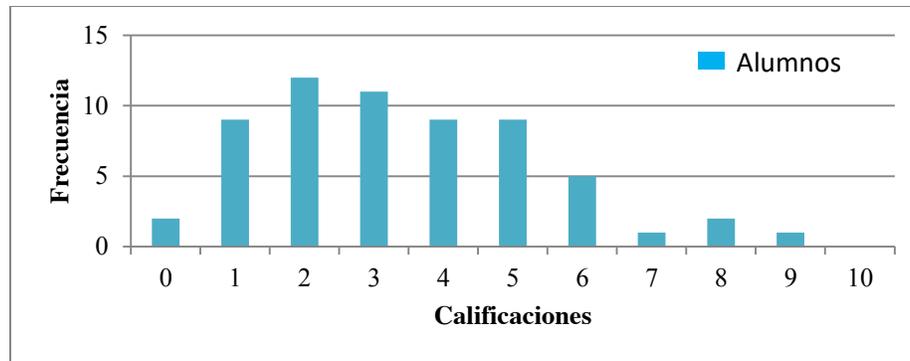


Figura 1. Calificaciones del total de participantes.

En los resultados se encuentra que, el mejor rendimiento fue el de los alumnos de la secundaria A, siguiendo los alumnos de la secundaria B y por último la secundaria C, por lo tanto, se puede observar que la demanda y buena ubicación no son factores determinantes de un buen aprendizaje y que el renombre no es sinónimo de una buena calidad educativa.

Los resultados obtenidos llaman demasiado la atención, ya que a pesar de que hubo alumnos que obtuvieron una calificación aprobatoria, los promedios fueron muy bajos. Lo anterior, sugiere reflexionar sobre la calidad de la educación que se está impartiendo en las escuelas secundarias y en la manera de mejorarla mediante propuestas innovadoras.

## Referencias

Spiegel, M. (2013). *Estadística*. España: McGraw-Hill.

Márquez, A., Vázquez, F., Ruiz, H., Villegas, M. & Figueroa, R. (2009). *Aritmética y álgebra*. México: Prentice Hall.

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 36

### POTENCIAS DE UN NÚMERO COMPLEJO EN GEOGEBRA

Elisa Salcedo Talamantes, Martha Patricia Galindo Solís, Claudia Daniela Corral Hernández.

Asesor: M.E.M. Miguel Ángel Núñez, [nugonmi@gmail.com](mailto:nugonmi@gmail.com)

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED

[elisa\\_st\\_1995@hotmail.com](mailto:elisa_st_1995@hotmail.com), [paty\\_dance89@hotmail.com](mailto:paty_dance89@hotmail.com), [dannyy@live.com.mx](mailto:dannyy@live.com.mx).

Área del trabajo: Variable Compleja

Cosas curiosas ocurren a veces con los números complejos. Con los reales, las potencias enteras de un número son siempre distintas (salvo con 1 y -1), pero en los complejos

existen ciertos ciclos, de tal forma que las potencias de un número complejo se tienden a organizar como espirales o como una circunferencia.

En esta ponencia veremos cómo las potencias de ciertos números complejos corresponden a los vértices de polígonos regulares, algunos simples como los convexos, y otros que pueden llegar a ser muy complejos, como los son ciertos polígonos estrellados.

### Potencias de un número complejo

Para multiplicar dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Las potencias de un número complejo, corresponden a otros números, cuyos **módulos** van en **progresión geométrica**, es decir:

- $|A^2|=|A|^2$
- $|A^3|=|A|^3$
- $|A^4|=|A|^4$
- $|A^5|=|A|^5$
- $|A^6|=|A|^6$

En el caso de los **argumentos**, crecen en **progresión aritmética**, de manera que el argumento de la potencia n-ésima corresponde a n veces el argumento inicial:  $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

Así, podemos concluir que con las potencias de un número complejo, ocurre lo siguiente:

*Para un número complejo con módulo  $r$  y argumento  $\alpha$ , su potencia n-sima tiene módulo  $r^n$  y argumento  $n \cdot \alpha$ .*

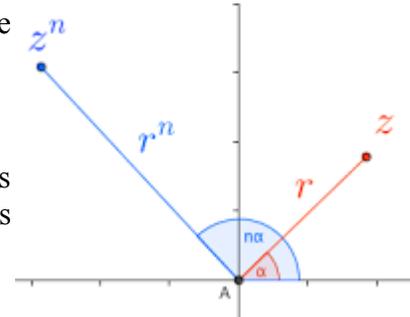
*En notación polar tenemos:*

$$[r(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha)$$

Los módulos van en progresión geométrica, hay tres casos que considerar:

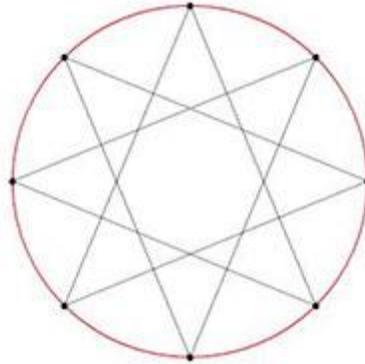
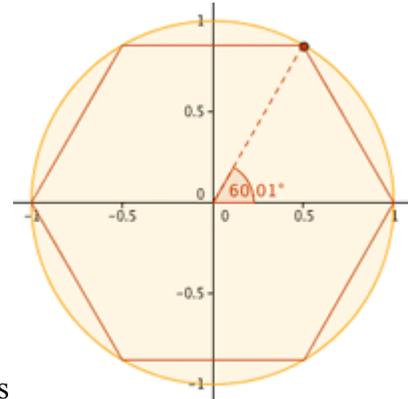
1. **Módulo menor que 1.** Las potencias de los módulos entre 0 y 1 van decreciendo, de manera que en este caso los puntos se van acercando al origen en espiral.
2. **Módulo igual a 1.** En este caso todos los módulos son de la forma  $1^n$ , es decir, son siempre iguales a 1. En tal circunstancia, las potencias de A se organizan sobre la circunferencia unitaria.
3. **Módulo mayor que 1.** De manera inversa al primer caso, las potencias de los módulos mayores que 1, crecen, por lo que estos puntos se van alejando del origen también en espiral.

Los argumentos de todos estos puntos varían siempre de la misma forma, aumentan en progresión aritmética, de manera que, ya sean espirales o polígonos los que se forman, se organizan en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Considerando argumentos positivos. Si se consideran argumentos negativos lo harán en el sentido horario.



Potencias dentro de la

Algo particular ocurre cuando  $B$  tiene módulo 1, puesto que todas sus potencias mantienen sus módulos iguales a 1. Pero ubicando  $B$  en posiciones clave, es posible que los segmentos formen polígonos regulares convexos. Por ejemplo, con un argumento de  $90^\circ$ , los puntos corresponden a los vértices de un cuadrado, pues sus argumentos se van sumando de  $90^\circ$  en  $90^\circ$ . Análogamente con un argumento de  $120^\circ$ , el polígono que se forma es un triángulo equilátero. Lo que tienen en común ambos polígonos, es que el primero y  $n$ -ésimo vértices son siempre los mismos: el  $n$ -ésimo es  $(1,0)$  y el primero naturalmente es  $B$ .

circunferencia unitaria

Con un argumento de  $72^\circ$ , o uno de  $45^\circ$ , se obtienen distintos polígonos regulares, con ambos puntos en común. De esta forma, podemos apreciar que existen algunos números complejos, muy particulares, cuyas potencias  $n$ -ésimas son iguales a la unidad, es decir, satisfacen la siguiente igualdad:  $z^n = 1$

Números de De Moivre

Pensémoslo primero geoméricamente, los complejos con módulo 1 se organizan en una circunferencia unitaria, formando ángulos congruentes, porque los argumentos simplemente se van sumando. Si  $A$  tiene argumento  $30^\circ$ , es claro  $A^2$  tiene argumento  $60^\circ$ , y así seguirá hasta que  $A^{12}$  tendrá argumento  $360^\circ$ , es decir, será igual a 1. Si seguimos multiplicando por  $A$ , tenemos que  $A^{13}=A$ . Luego, estos puntos son los vértices de un dodecágono, que parte en  $A$  y termina en  $(1,0)$ .

Si  $A$  tiene argumento  $72^\circ$ , su quinta potencia será igual a 1, de manera que se forma un pentágono regular, que también parte en  $A$  y termina en la unidad.

Geoméricamente los números de De Moivre son aquellos que permiten que el polígono se cierre, es decir, los vértices de un polígono regular centrado en el origen y de los cuales el  $n$ -ésimo vértice es la unidad.

Estos números satisfacen la ecuación  $z^n = 1$ , por lo que todos tienen módulo 1, es decir, son esos números que se ubican en la circunferencia unitaria. Además los ángulos que se van formando son todos congruentes, se obtienen básicamente de ir rotando un punto alrededor del origen, por lo que, si se vuelve al principio, lo que se determina es un polígono regular, que puede ser convexo o estrellado. Pero entonces es razonable preguntarse si todos los números con módulo 1 son números de De Moivre.

BIBLIOGRAFÍA

Marsden J.E., Hoffman M.J., *Análisis Básico de Variable Compleja*, trillas, México, 2003.

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/numeros\\_complejos\\_sg\\_b/complejos3\\_sg.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/numeros_complejos_sg_b/complejos3_sg.htm)

<https://www.youtube.com/watch?v=4grJkq2pw-Q>

<http://www.geometriadinamica.cl/2012/04/numeros-de-de-moivre/>

<http://algebralinealichan.blogspot.mx/2012/12/3-5-teorema-de-de-moivre-potencias-y.html>

[Programa general](#)

## Ponencia de Divulgación 37

### EL DILEMA DEL PRISIONERO

Edwin Bladimir García Velarde, Candy Jazmín Soto Betancourt

M.C Adriana Escobedo Bustamante

Facultad de Ciencias Exactas UJED

*pinyu\_9@hotmail.com, sobc980202mdgttn05@gmail.com*

### Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos surge de la necesidad de estudiar y explicar el comportamiento y la interacción de los diversos agentes de un mercado, así como los incentivos que llevan a éstos a realizar sus procesos de decisión.

Entonces el objetivo es dar con la estrategia óptima adelantándose y previendo a la estrategia del resto. Esta teoría cobra especial relevancia en mercados en los que existen competidores muy directos que luchan por hacerse con una mayor cuota de mercado, por ejemplo en los oligopolios o en determinados sectores de gran consumo donde la competencia es feroz. En la Teoría de Juegos lo relevante es tomar una vía de actuación teniendo en cuenta lo que pensamos que harán los demás, sabiendo que ellos actuarán a su vez pensando en lo que creen que nosotros vamos a hacer. En la teoría de Juegos suelen usar herramientas como matrices y árboles de decisión.

### *El dilema del prisionero y el equilibrio de Nash*

El llamado Dilema del prisionero es uno de los ejemplos más conocidos dentro de la categoría de juegos del tipo Equilibrio de Nash. En él se analizan los incentivos que tienen 2 presos encarcelados por un delito menor para delatar al otro a la policía y acceder así a beneficios penitenciarios, teniendo siempre en cuenta la decisión que podría tomar el otro:

Este ejercicio considera el supuesto de que cada prisionero está encarcelado por separado, de tal forma que no pueden comunicarse entre ellos, ponerse de acuerdo, pactar sus decisiones o saber qué hace el otro.

Las posibilidades de condena en función de la decisión tomada por ambos son las siguientes:

a) *Nadie delata*: si ninguno de los dos delata al otro a la policía, entonces cada uno recibirá una condena de 2 años.



**b) Uno delata al otro:** si uno de los prisioneros delata al otro, pero este otro no delata a uno, entonces el prisionero que delata reduciría su condena hasta solo 1 año, mientras que el prisionero delatado vería incrementada su condena hasta 10 años.

**c) Ambos se delatan mutuamente:** si ambos deciden delatar al otro, entonces recibirán una condena de 6 años de cárcel para cada uno.

G. Hardin es su artículo “The Tragedy of the Commons” de 1968 generalizo, para cualquier número de jugadores, el dilema del prisionero de Tucker.

Esta generalización ha sido muy importante, tanto en la motivación del desarrollo de la teoría, como para modelar y analizar verdaderas estrategias que provocamos los humanos en nuestro mundo.

La conclusión que explica este ejercicio, es que el pensamiento lógico por separado de cada prisionero hace que al final cada uno tome por separado la decisión que es mejor para él individualmente y no la que sería la mejor decisión para el bien común. Si nos ponemos en la piel de uno de los dos prisioneros, sabemos que nuestra mejor decisión será la de delatar al otro en cualquier caso, pues así siempre minimizaremos nuestra condena, independientemente de lo que el otro haga. Y dado que el otro prisionero es igual de inteligente y razonará de la misma manera, lo que al final ocurrirá es que ambos acabarán pasando 6 años entre rejas, mientras que si hubieran cooperado hubieran sido condenados sólo 2.

La situación alcanzada finalmente es un equilibrio de Nash; situación en la que cada jugador individual no gana nada modificando su estrategia mientras que los otros mantengan las suyas. En este caso concreto, ambas partes no pueden cambiar su decisión individual sin empeorar (si uno de los presos decidiera no delatar al otro, su situación sería aún peor, pues le caerían más años de condena, mientras que el otro preso siga teniendo incentivos a delatar). De esta forma, cada jugador ejecuta el mejor movimiento que pueda dados los movimientos de los demás jugadores.

Es decir, un equilibrio de Nash es una situación en la que todos los jugadores ponen en práctica una estrategia que maximiza sus ganancias individuales, dadas las estrategias de los otros. Como consecuencia ningún jugador tiene incentivos para modificar individualmente su estrategia. En el equilibrio de Nash se logra el mejor resultado individualmente para cada jugador, pero no el mejor resultado para todos en su conjunto. Es posible que el resultado fuera mejor para todos los jugadores si éstos coordinasen su actuación (situación que ocurre en los oligopolios).

Aplicado a la economía, el equilibrio de Nash es un tipo de equilibrio de competencia imperfecta que describe la situación de varias empresas compitiendo por el mercado de un mismo bien y que pueden elegir cuánto producir para intentar maximizar sus ganancias.

### *Bibliografía*

Zapata Lillo, Paloma (2016). “Economía, política y otros juegos”. México: UNAM, Facultad de ciencias

K. Binmore. (1994). “Teoría de Juegos”, McGraw-Hill

Recuperado de <http://mundodelaempresa.blogspot.mx/2012/12/economia-la-teoria-de-juegos-el-dilema.html>

[Programa general](#)

## DIRECTORIO DE PARTICIPANTES

[A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [F](#) [G](#) [H](#) [I](#) [J](#) [K](#) [L](#) [M](#) [N](#) [O](#) [P](#) [Q](#) [R](#) [S](#) [T](#) [U](#) [V](#) [W](#) [X](#) [Y](#) [Z](#)

[Programa general](#)

### A

**Ávila Dévora Alonso Eloy**  
[alon.so.12@hotmail.com](mailto:alon.so.12@hotmail.com)

**Ayala Ceniceros Luis Antonio**  
[antonio.a.98.la@gmail.com](mailto:antonio.a.98.la@gmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

### B

**Barraza Barraza Diana**  
[diana.barraza@ujed.mx](mailto:diana.barraza@ujed.mx)

**Bello Aguirre Ricardo Isaac**  
[ricardo.bello.aguirre@gmail.com](mailto:ricardo.bello.aguirre@gmail.com)

**Beltrán Hernández Erick Assael**  
[erick\\_behe@hotmail.com](mailto:erick_behe@hotmail.com)

**Bernadac Lozano Jonathan**  
[specimen\\_428\\_@hotmail.com](mailto:specimen_428_@hotmail.com)

**Bobadilla Calleros Denzel**  
[piolin.bob@hotmail.com](mailto:piolin.bob@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## C

**Cabral Álvarez Ana Cristina**  
[ana171296@gmail.com](mailto:ana171296@gmail.com)

**Candia Vargas Juan**  
[lma.candia@gmail.com](mailto:lma.candia@gmail.com)

**Carrasco Gámez Sergio**  
[cags9607@gmail.com](mailto:cags9607@gmail.com)

**Carreón Rodríguez Jesús**  
[jescarod@gmail.com](mailto:jescarod@gmail.com)

**Cervantes Ortega Fausto Adrian**  
[adriantperm@gmail.com](mailto:adriantperm@gmail.com)

**Conde Ramírez Celene Yajahira**  
[celeneconde15@gmail.com](mailto:celeneconde15@gmail.com)

**Corral Hernández Claudia Daniela**  
[danny@live.com.mx](mailto:danny@live.com.mx)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## D

**Díaz de León Juan José**  
[juanjo9614@hotmail.com](mailto:juanjo9614@hotmail.com)

**Díaz Leyva Carlos Michelle**  
[cdiazleyva@gmail.com](mailto:cdiazleyva@gmail.com)

**Dozal Alcántar Omar**  
[VI\\_blackblood\\_IX@hotmail.com](mailto:VI_blackblood_IX@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)



## E

**Estrada Alemán José Jorge**  
[jjorge0111@gmail.com](mailto:jjorge0111@gmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## F

**Fernández Barneth Gabriel**  
[fernandezgabriel885@gmail.com](mailto:fernandezgabriel885@gmail.com)

**Flores Casas Valeria Yaneth**  
[havae\\_3@hotmail.com](mailto:havae_3@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## G

**Galindo Solís Martha Patricia**  
[paty\\_dance89@hotmail.com](mailto:paty_dance89@hotmail.com)

**García Alvarado Miguel**  
[mignewton33@hotmail.com](mailto:mignewton33@hotmail.com)

**García Meza Mario Alberto**  
[marius.agm@gmail.com](mailto:marius.agm@gmail.com)

**García Terán Ana Margarita**  
[amgiti@hotmail.com](mailto:amgiti@hotmail.com)

**García Velarde Edwin Bladimir**  
[pinguy\\_9@hotmail.com](mailto:pinguy_9@hotmail.com)



[Directorio](#)

[Programa general](#)

## H

**Hernández Ibarra Salma Celeste**  
[s.celeste.h@gmail.com](mailto:s.celeste.h@gmail.com)

**Hernández Laura Margarita**  
[laura.m.hernandez.e@hotmail.com](mailto:laura.m.hernandez.e@hotmail.com)

**Hernández Reyes Nélica Marlene**  
[hda.01@hotmail.com](mailto:hda.01@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## I

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## J

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## K

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## L

**Lerma Domínguez Jesús Alfredo**  
[jesuslerma.jld@gmail.com](mailto:jesuslerma.jld@gmail.com)

**López Hernández Juan Antonio**  
[juanant79@yahoo.com.mx](mailto:juanant79@yahoo.com.mx)

**López Montiel Jesús Alejandro**  
[alejandro\\_sant@hotmail.com](mailto:alejandro_sant@hotmail.com)  
**Directorio**

**Programa general**

## M

**Martínez Sánchez Jafed Alejandro**  
[jafsed@hotmail.com](mailto:jafsed@hotmail.com)

**Mercado Favela Eybette**  
[eybette\\_mercado@hotmail.com](mailto:eybette_mercado@hotmail.com)

**Montes López Noé**  
[elone\\_la30@hotmail.com](mailto:elone_la30@hotmail.com)

**Mora Sarabia Abraham Duvany**  
[duvalin\\_2486@hotmail.com](mailto:duvalin_2486@hotmail.com)

**Moreno González Brayam Antonio**  
[brayam02@gmail.com](mailto:brayam02@gmail.com)

**Directorio**

**Programa general**

## N

**Noriega Meléndez Miguel Ángel**  
[mnoriega.9853@gmail.com](mailto:mnoriega.9853@gmail.com)

**Núñez Miguel Ángel**  
[nugonmi@gmail.com](mailto:nugonmi@gmail.com)



[Directorio](#)

[Programa general](#)

## O

**Olvera Martínez Héctor Alan**  
[alanolvera1234@hotmail.com](mailto:alanolvera1234@hotmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## P

**Pulido Castañeda Martín**  
[martinpulido@rocketmail.com](mailto:martinpulido@rocketmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## Q

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## R

**Ramos Rochel Emmanuel**  
[xzxalpha@gmail.com](mailto:xzxalpha@gmail.com)

**Luis Angel Reyes Rojas**  
[angelreyes19931@outlook.com](mailto:angelreyes19931@outlook.com)

**Ruíz Morales Cecilia**  
[cecy0209@outlook.es](mailto:cecy0209@outlook.es)



[Directorio](#)

[Programa general](#)

**S**

**Salcedo Talamantes Elisa**  
[elisa\\_st\\_1995@hotmail.com](mailto:elisa_st_1995@hotmail.com)

**Sánchez Aragón Héctor Alfonso**  
[poncho\\_290@hotmail.com](mailto:poncho_290@hotmail.com)

**Silva Aguirre Carlos Omar**  
[cradle\\_kako@hotmail.com](mailto:cradle_kako@hotmail.com)

**Solís Beltrán Silvia Janeth**  
[janeth\\_kltz\\_89@hotmail.com](mailto:janeth_kltz_89@hotmail.com)

**Soto Betancourt Candy Jazmín**  
[sobc980202mdgttn05@gmail.com](mailto:sobc980202mdgttn05@gmail.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

**T**

**Tapia Ávalos Axel**  
[axel.infimo@gmail.com](mailto:axel.infimo@gmail.com)

**Torres Valenzuela Jonathan Iván**  
[prococo\\_love@outlook.com](mailto:prococo_love@outlook.com)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## U

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## V

**Vargas Antuna Raúl**  
[raul.vargas@cimat.mx](mailto:raul.vargas@cimat.mx)

**Vargas Betancourt Enrique**  
[quique\\_vab@ujed.mx](mailto:quique_vab@ujed.mx)

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## W

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## X

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## Y

[Directorio](#)

[Programa general](#)

## Z

**Zamora Delfín José Feliciano**

[chano-1@hotmail.com](mailto:chano-1@hotmail.com)

**Zamora Ríos Rosa Angélica**

[rzamora@ujed.mx](mailto:rzamora@ujed.mx)

[Directorio](#)

[Programa general](#)