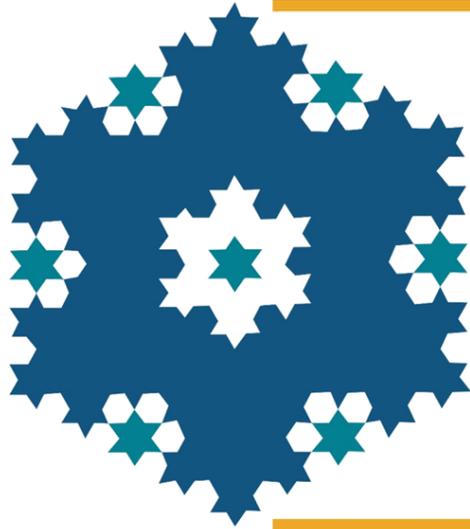


Noveno



ENCUENTRO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA

COMITÉ ORGANIZADOR

Dra. Angelina Alvarado Monroy
Dr. Ricardo Isaac Bello Aguirre
M.C. Adriana Escobedo Bustamante
L.M.A. Javier Espinoza de los Monteros Díaz
M.C. Miguel García Alvarado
Dr.(c) José Othón Huerta Herrera
Dra. Alicia López Betancourt
Dr. Armando Mata Romero
M.C. Saul Nevárez Nieto
M.E.M. Miguel Ángel Núñez González
Dra. María del Carmen Olvera Martínez
Dra. Yaziel Pacheco Juárez
Dr. José Patricio Sánchez Hernández
Dra. Alejandra Soria Pérez
M.C. Enrique Vargas Betancourt
Dra. Rosa Angélica Zamora Rios



Programa General

Lunes 4 de Junio		Martes 5 de Junio		Miércoles 6 de Junio		Viernes 8 de junio	
11:20 – 11:40	Inauguración	Grupo de aristas de un complejo simplicial <i>José Crispín Alvarado Calderón</i>	Los tres famosos teoremas de Sylow <i>Eyvette Mercado Favela</i>	Rally Matemático 8:45-13:00 hrs.			
11:40 – 12:00	Integrales Elípticas <i>Salma Celeste Hernández Ibarra</i> <i>Martin H. Pulido Castañeda</i>	La sección aurea en el decágono regular <i>Carlos Michelle Díaz Leyva</i> <i>Claudia Daniela Corral Hernández</i>	Ruta obligada de longitud mínima <i>Elisa Salcedo Talamantes</i> <i>Martha Patricia Galindo Solís</i> <i>Brayam Antonio Moreno González</i>				
12:00 – 12:20	El problema del pastel y su generalización <i>José Enrique Mata Vázquez</i>	Varilla deslizante con collarín <i>Noé Montes López</i> <i>Jesús Alfredo Lerma Domínguez</i> <i>Erik Assael Beltrán Hernández</i>	Presentación de un grupo <i>Gerardo Ismael Salazar Herrera</i>				
12:20 – 12:25	RECESO	RECESO	RECESO				
12:25 – 12:45	Modelización matemática del cáncer: aportaciones para su estudio <i>Celene Yajahira Conde Ramírez</i> <i>Brandon Soto Salas</i>	El universo al alcance de un Doughnut <i>David Augusto Levi Hernández</i> <i>Alcántara</i> <i>Mariam Magallanes Escobedo</i>	Las plantas como alternativa para generar electricidad <i>Lizeth Ortiz Juárez</i> <i>Alonso Ávila Devora</i> <i>Dulce María Reyes Rojas</i>				
12:45 – 13:05	¡No te hagas nudos con los nudos! <i>Erik Assael Beltrán Hernández</i>	¿Influye la estatura y el peso de un árbitro en una prueba de velocidad de resistencia? <i>Luis Enrique Alvarado Chávez</i> <i>Edson Aarón Luna Barboza</i>	Extensión del campo de los complejos <i>Ana Margarita García Terán</i>				
13:05 – 13:25	Ajuste de Modelos Estadísticos Lineales a Resultados Electorales <i>Jorge Gabriel Martín del Campo</i> <i>Cisneros</i>	Proyección estereográfica <i>Ana Cristina Cabral Álvarez</i> <i>Laura Margarita Hernández Espinosa</i> <i>Candy Soto Betancourt</i>	El problema de la barra parcialmente dentro de un tubo <i>Abraham Duvany Mora Sarabia</i> <i>Raúl Vargas Antuna</i>				
13:25 – 13:30	RECESO	RECESO	RECESO				
13:30 – 13:50	Escalera con cajón y pasaje con dos escaleras <i>Alondra Valdez Hernández</i> <i>Sócrates de la Cruz Cháidez</i>	Las matemáticas y el ADN <i>Héctor Alan Olvera Martínez</i>	Viaje al centro de las normas <i>David Augusto Levi Hernández</i> <i>Alcántara</i> <i>Sebastián Morales Amaya</i>				
13:50 – 14:10	Slam Dunk. Descubre como siempre meterla <i>Gerardo Ismael Salazar Herrera</i> <i>José Crispín Alvarado Calderón</i> <i>Jesús Tairí Nevárez Muñoz</i> <i>Jesús Iván López Reyes</i>	Efecto de la chaya en ratas long-evans con dieta de sobrenutrición <i>José Enrique Mata Vázquez</i> <i>Adriana Guadalupe Caballero</i> <i>González</i> <i>Felipe de Jesús Alvarado</i>	Desarrollo de modelo ARX para simulación de la degradación de turbinas de jet bajo condiciones de operación variables <i>José Edgar Alcántar Muñoz</i>				

[CONCURSO PARA EL DISEÑO DEL LOGOTIPO](#)



[DIRECTORIO DE PARTICIPANTES](#)



Ponencia de Investigación 1

SLAM DUNK. DESCUBRE COMO SIEMPRE METERLA

Gerardo Ismael Salazar Herrera, José Crispin Alvarado Calderón, Jesús Tairí Nevárez

Muñoz, Jesús Iván López Reyes. Saul Nevárez Nieto

salazar.gerardo117@gmail.com, jose.alvarado@cimat.mx, tainmu52@hotmail.com,

ivan_gow@live.com, saul_2n@hotmail.com

Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas.

Licenciatura.

Basquetbol. LSD. ANOVA Bifactorial.

Resumen

Nuestra investigación es de carácter deportivo, en el que se pretende medir la efectividad para encestar con distintos tamaños de balones reglamentarios de básquetbol, a diferentes distancias y con diferentes métodos de tiro. Como resultado de la investigación logramos esclarecer los siguientes objetivos: mejor balón, mejor método de lanzamiento, mejor posición de jugador para cada miembro del equipo y comprobar si la altura es un factor influyente al lanzar el balón. Para los cálculos realizamos un anova bifactorial, con el software Minitab®.

Introducción

Desde siempre en el ámbito deportivo se ha buscado una evolución tanto en los jugadores, como en los elementos que forman parte del juego. En particular, el basquetbol ha sufrido varios cambios tanto en la manera de jugar y de lanzar, como en las propiedades que posee el balón. En la antigüedad la estética del balón era de color marrón y de cuero natural. Igualmente los tamaños y pesos han variado, según el reglamento oficial, el balón para jugar basquetbol debe medir en torno a 68 y 73 cm de circunferencia y de 23 a 24 cm de diámetro. La organización deportiva obliga a que pesen entre 567 y 650 gramos. Las medidas de baloncesto varían de acuerdo a la edad, por ejemplo un niño de 7 años no debe jugar con un balón de adultos. Lo cual suena lógico si se considera que personas a distintas edades pueden tener distinta complejión física, la cual puede repercutir en la calidad del juego. Actualmente el material con el que se fabrican estos balones suele ser piel de alta calidad como el cuero o material sintético, como la goma (Base 2018).

Dicho esto, nos gustaría saber cuál es el balón adecuado para jugar y practicar baloncesto, dada nuestra inexperiencia utilizaremos herramientas que nos proporciona el diseño estadístico de experimentos para elegir el balón adecuado en conjunto a la mejor posición de la cancha para cada miembro del equipo.

Marco teórico

Análisis de la varianza con dos factores.

Si un experimento de naturaleza cuantitativa y dos variables explicativas que están definidas de forma que cada parte del experimento puede ser expuesta como cualquier combinación de un nivel de la primera de las variables y un nivel de la otra variable entonces el método de análisis más común es el análisis de la varianza de dos factores.

La idea detrás de este método es extender el modelo de análisis de la varianza con un solo factor a dos factores. El problema de la comparación de medias no se resuelve con la aplicación del primero método sobre dos factores pues es posible que provengan de distintas naturaleza (fijos o aleatorios). Al incluir dos factores también existe la posibilidad que éstos actúen de forma independiente o que la acción combinada de ambos factores potencie o inhiba la acción de cada uno por separado, en tal caso diremos que existe *interacción*. Cuando todos los grupos representados con un número igual de medidas diremos que el diseño es *equilibrado* y si todas las categorías de un factor pueden ser combinadas con las de otro factor diremos que se trata de un diseño *cruzado* que en el caso de incluir interacción se le denomina *modelo factorial*.

Para nuestros fines, trataremos solamente con modelos equilibrados y cruzados. Nos centraremos particularmente en el estudio de factores fijos.

Estudiaremos los valores de dos variables dependientes (factores) A , con I niveles y B , con J niveles. Supondremos que el diseño es cruzado con n observaciones en cada clase obteniendo un total de $N = IJn$ observaciones.

Supuestos:

- Independencia: Las IJ muestras de tamaño n son aleatorias e independientes.
- Normalidad: Las IJ poblaciones de donde se extraen las n muestras son normales.
- Homocedasticidad: Las IJ poblaciones tienen, todas ellas, la misma varianza.

El modelo de análisis de la varianza con dos factores **sin interacción** se puede escribir como:

$$X_{ij} = \mu + A_i + B_j + \varepsilon_{ij}$$

Donde X_{ij} es una variable aleatoria que representa el conjunto de posibles valores de la variable dependiente correspondiente al nivel i -ésimo del factor A y al nivel j -ésimo del factor B , μ es la media general, A_i es el efecto aditivo que sobre esa media produce el nivel i -ésimo del factor A , B_j el correspondiente al nivel j -ésimo del factor B y ε_{ij} el residuo del modelo. Se considera que los términos ε_{ij} son todos variables aleatorias normales independientes de media cero y varianza σ^2 .

Los distintos elementos que componen el modelo se definen como:

$$A_i = \mu_{i\bullet} - \mu$$

$$B_j = \mu_{\bullet j} - \mu$$

$$\varepsilon_{ij} = X_{ij} - \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet j} + \mu$$

siendo $\mu_{i\bullet}$ la media poblacional del nivel i -ésimo del factor A y $\mu_{\bullet j}$ la media poblacional del nivel j -ésimo del factor B .

El modelo de análisis de la varianza con dos factores **considerando interacción** se escribe como:

$$X_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

donde $(AB)_{ij}$ es el efecto de la combinación del nivel i -ésimo del factor A con el j -ésimo del factor B no contemplado por dichos niveles individualmente.

Si consideramos la media total correspondiente a los niveles i -ésimo de A y j -ésimo de B , $\mu_{ij} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij}$, éste modelo lo podemos definir convenientemente como

$$X_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = X_{ijk} - \mu_{ij}$$

y *medir* la interacción de la siguiente forma:

$$(AB)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet j} + \mu$$

En el caso en que tenemos *factores fijos* (los distintos niveles de cada factor son los únicos que nos interesa estudiar), se verifica que los términos A_i, B_j y $(AB)_{ij}$ son todos constantes y que $\sum_i A_i = 0, \sum_j B_j = 0$, y que $\sum_i (AB)_i = 0$ y $\sum_j (AB)_j = 0$.

El contraste de análisis de la varianza se plantea como:

H_0 : todos los A_i, B_j y $(AB)_{ij}$ son cero.

H_1 : alguno de los A_i, B_j y $(AB)_{ij}$ no son cero.

Este contraste supone que si todos los efectos de todos los niveles son cero entonces todas las medias de todos los grupos son iguales e iguales a la media general, es decir no hay interacción.

Para el contraste se toma una muestra aleatoria (x_{ijk}) de cada una de las combinaciones de los factores y se les aplica el modelo mencionado (Gutiérrez Pulido & De la Vara Salazar, 2008).

Estadístico de contraste

Definimos lo siguiente:

$T_{i\bullet}$: Totales de cada nivel del factor A

$T_{\bullet j}$: Totales de cada nivel del factor B

T_{ij} : Totales de cada grupo (casilla)

T : Total de la muestra

$$SCT = \sum_{i,j,k} x_{ijk}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$SCA = \frac{\sum_i T_{i\bullet}^2}{nI} - \frac{T^2}{N}$$

$$SCB = \frac{\sum_j T_{\bullet j}^2}{nJ} - \frac{T^2}{N}$$

$$SCAB = \frac{\sum_{ij} T_{ij}^2}{n} - \frac{\sum_i T_{i\bullet}^2}{nI} - \frac{\sum_j T_{\bullet j}^2}{nJ} + \frac{T^2}{N}$$

$$SCE = \sum_{i,j,k} x_{ijk}^2 - \frac{\sum_{ij} T_{ij}^2}{n}$$

La expresión para dos factores del teorema de descomposición de varianza se expresa entonces como

$$SC = SCA + SCB + SCAB + SCE$$

donde los grados de libertad para cada uno de los sumandos son:

$$N - 1 = nIJ - 1 : \text{Para SCT}$$

$$I - 1 : \text{Para SCA}$$

$$J - 1 : \text{Para SCB}$$

$$(I - 1)(J - 1) : \text{Para SCAB}$$

$$N - IJ = IJ(n - 1) : \text{para SCE}$$

Con estos cálculos se determina la media de los cuadrados dividiendo cada sumando entre sus correspondientes grados de libertad.

Si los efectos de todos los niveles son cero, significa que las medias de todos los cuadrados estiman la misma cantidad mientras que de lo contrario la media de los cuadrados será mayor que la media de los cuadrados del error. El contraste se realiza por medio de la distribución F de Snedecor, con los grados de libertad respectivos del numerador y denominador, comparando el cociente entre cada media de cuadrados y la media de cuadrados del error.

Si F_A , F_B y F_{AB} son los cocientes de los cuadrados medios de A, de B, y de interacción(AB) con la media de los cuadrados del error, respectivamente, entonces:

$$F_A \text{ se distribuye según } F_{I-1, N-IJ} \text{ y la zona crítica es } F_A \geq 1-\alpha F_{I-1, N-IJ}$$

$$F_B \text{ se distribuye según } F_{J-1, N-IJ} \text{ y la zona crítica es } F_B \geq 1-\alpha F_{J-1, N-IJ}$$

$$F_{AB} \text{ se distribuye según } F_{(I-1)(J-1), N-IJ} \text{ y la zona crítica es } F_{AB} \geq 1-\alpha F_{(I-1)(J-1), N-IJ}$$

Método LSD.

La prueba LSD (Least significant difference) es una prueba de comparaciones múltiples. Permite comparar las medias de los t niveles de un factor después de haber rechazado la hipótesis nula de igualdad de medias mediante el ANOVA. Para k tratamientos se tiene que el estadístico de prueba es la diferencia de las medias en valor absoluto

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$$

Tomando como estadísticamente diferentes si ocurre que:

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > t_{\frac{\alpha}{2}, (I-1)(b-1)} \sqrt{\frac{2CME}{b}}$$

(Fuente: <https://estadisticaorquestainstrumento.wordpress.com/2013/01/28/test-bsd-least-significant-difference/> & Gutiérrez Pulido & De la Vara Salazar, 2008).

A continuación se describen los métodos que fueron utilizados en el experimento:

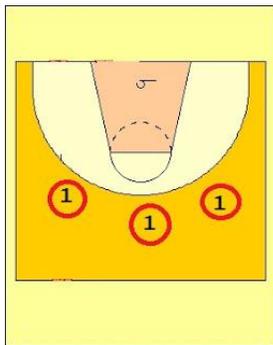


Método 1. Tira la pelota con la mano debajo de ella. La pelota se lanza suavemente desde la mano y toca la tabla con suavidad y cuidado.

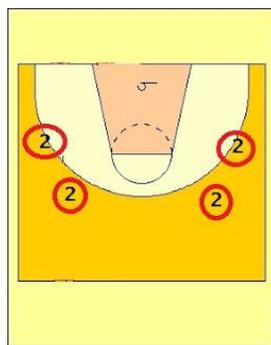
Método 2. Utilizar las dos manos, una mano, la más débil se coloca a un “lado” de la pelota, solo para mantenerla en equilibrio sobre tu mano, con la otra mano sujeta la pelota con la punta de los dedos. La mano más débil debe quedarse donde está, suelta y relajada, mientras con la otra debes girar la muñeca después de liberar la pelota, para darle un efecto de retroceso y un toque de delicadeza. El efecto de retroceso le dará una mayor rotación a la pelota. Si la pelota no entra en la canasta en un primer momento, la rotación adicional hará que entre. Este es el método que usualmente usamos todas las personas.

Método 3. Correr y luego lanzar el balón con el método 2.

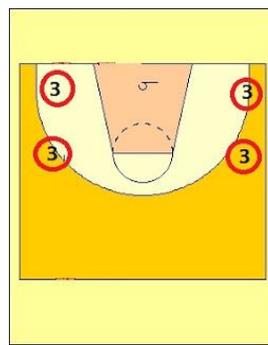
Las posiciones de los jugadores sobre la cancha son las siguientes:



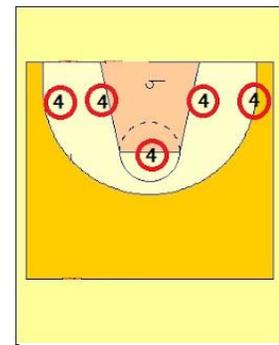
Base



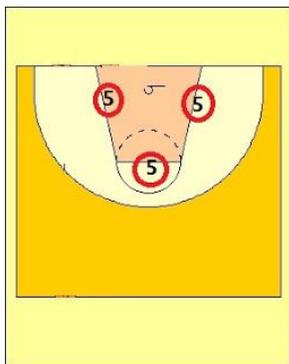
Escolta o alero bajo



Alero alto



Ala pivot



Pivot o center

Finalmente para el experimento, y en nuestro equipo, una persona se considera de estatura baja si mide menos de 1.68 metros, mediana si mide menos de 1.76 y alta mayor que 1.76.

Planteamiento del problema

Al iniciar un juego de básquetbol o formar un equipo, ya sea de manera profesional o por afición, siempre queda en duda cual es la mejor posición para un jugador. Hemos notado que los entrenadores de los equipos profesionales analizan al equipo contrario antes de un partido y en base a eso determinan la mejor estrategia. Por otra parte algunas veces para formar un equipo solo nos fijamos en ciertas aptitudes de los jugadores que tal vez no sean

las más óptimas, también puede suceder que el jugador tiene una posición en la cancha que no es la más adecuada para él y como consecuencia tenemos un equipo desbalanceado con muchas vulnerabilidades. Es por ello que nuestro propósito es realizar un estudio de dichas aptitudes que consideramos más marcadas y relevantes en un miembro del equipo, para posteriormente colocarlo en la mejor posición de la cancha y así dar ventaja al equipo sin tener que analizar al equipo contrario a la hora de un juego. Se propone dar un primer acercamiento a la solución del problema de determinar cuáles factores afectan o son influyentes en el desempeño del equipo. Esto tiene más que nada un uso práctico en aquellos que son jugadores o están interesados en formar un equipo y tener un estudio como base en la formación de dicho equipo. Además, se presenta esta curiosa aplicación del análisis y diseño de experimentos, mostrando que no solo se da en proyectos de gran escala como lo son la optimización y mejoramiento de procesos en empresas y fábricas, sino que se presenta a un nivel más sencillo. Debido a que las condiciones bajo las que se elabora este experimento, pudiesen variar ya sea por la experiencia como jugador para cada miembro del equipo, o por el tipo de canasta, etc.; se decidió escoger los factores que pudiesen ser más significativos para marcar una diferencia. La distancia se consideró un factor obligado a considerar, pues es bien sabido que a mayor distancia mayor complejidad de lanzamiento, mientras que los demás factores se consideraron significativos debido a que son características que presentan los miembros del equipo.

Metodología

El experimento fue realizado en el patio de la Facultad, los tiros fueron ejecutados por miembros del equipo. Se hicieron 3 tiros por cada uno, a tres distancias distintas con 3 tipos de balón y con 3 métodos de tiro distintos. Los tiros fueron a distancias de tiro reglamentarias, variando los tamaños del balón, contabilizando solo los tiros encestandos. El único error en la recolección de datos fue la altura de la canasta, dicho factor no es el reglamentario puesto que la canasta de la facultad estaba en su límite después de haberla ajustado. Después de la recolección de datos realizamos un *anova bifactorial* con el software Minitab®

Resultados

El muestreo arrojó los siguientes datos:

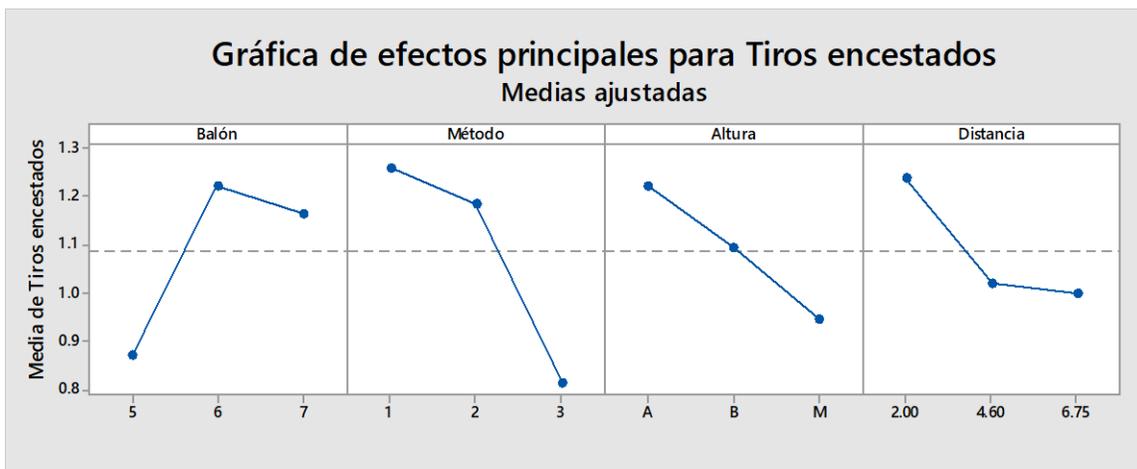
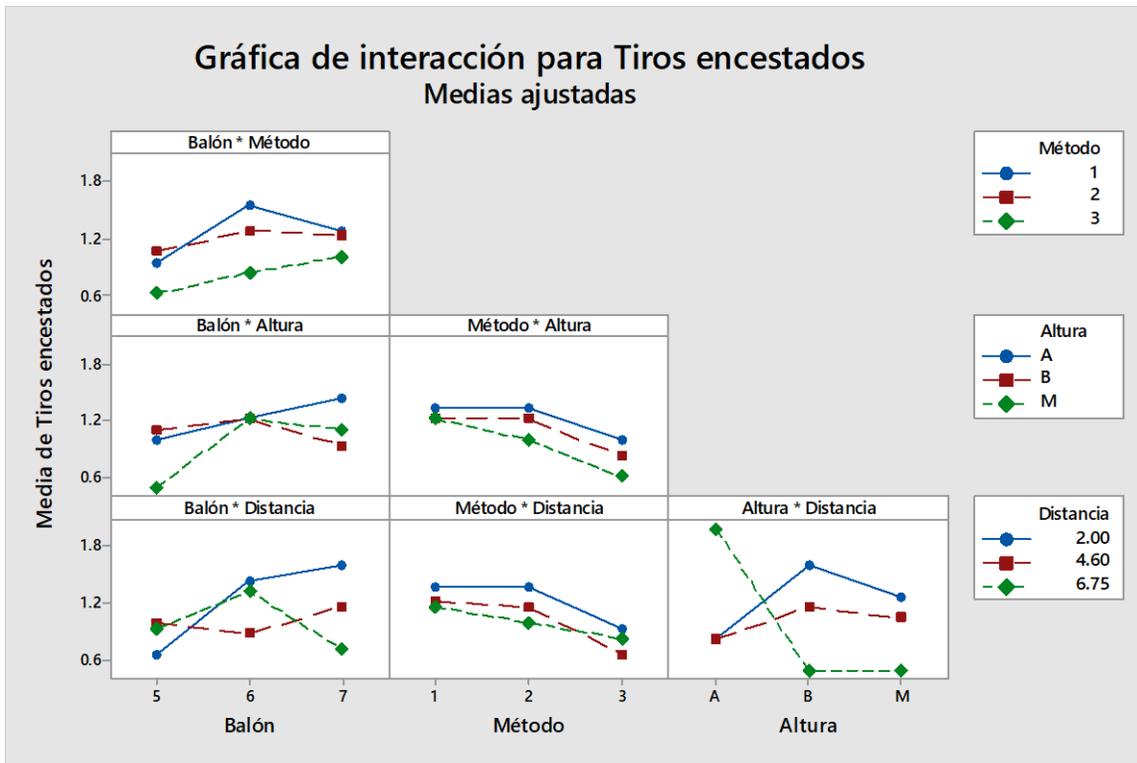
		<i>Alto</i>			<i>Mediano</i>			<i>Bajo</i>		
		<i>4.60 metro s</i>	<i><4.6 metro s</i>	<i>6.75 metro s</i>	<i>4.60 metro s</i>	<i><4.6 metro s</i>	<i>6.75 metro s</i>	<i>4.60 metro s</i>	<i><4.6 metro s</i>	<i>6.75 metro s</i>
Tamaño de balón: 7	Método 1	1	2	2	1	3	0	0	2	0
		1	1	2	2	2	0	3	0	1
	Método 2	0	1	2	2	2	0	0	1	0
		1	3	2	1	3	0	1	3	0
	Método 3	1	1	2	2	0	0	1	2	0
		3	0	1	1	1	0	0	2	1
Tamaño de	Método 1	1	0	2	1	2	2	3	2	0
		1	3	3	2	3	0	0	1	2
	Método 2	1	1	2	2	2	2	1	2	1
		0	0	3	0	1	1	3	1	0

	Método 3	0	0	2	0	0	1	1	2	0
	Método 1	0	1	2	0	2	1	0	3	0
Tamaño de balón: 5	Método 1	1	0	1	0	0	0	1	0	2
	Método 2	1	1	1	1	0	0	2	1	0
	Método 2	2	0	3	1	0	0	2	3	1
	Método 3	0	0	3	0	1	0	0	1	0
	Método 3	0	1	1	1	0	1	2	0	0

Con estos datos se realizó la siguiente tabla de ANOVA Bifactorial:

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Balón	2	3.864	1.9321	2.37	0.100
Método	2	6.123	3.0617	3.76	0.028
Altura	2	2.086	1.0432	1.28	0.284
Distancia	2	1.938	0.9691	1.19	0.310
Balón*Método	4	1.358	0.3395	0.42	0.796
Balón*Altura	4	4.062	1.0154	1.25	0.298
Balón*Distancia	4	9.432	2.3580	2.89	0.027
Método*Altura	4	0.469	0.1173	0.14	0.965
Método*Distancia	4	0.617	0.1543	0.19	0.943
Altura*Distancia	4	31.432	7.8580	9.64	0.000
Balón*Método*Altura	8	4.494	0.5617	0.69	0.700
Balón*Método*Distancia	8	8.123	1.0154	1.25	0.283
Balón*Altura*Distancia	8	4.309	0.5386	0.66	0.724
Método*Altura*Distancia	8	5.457	0.6821	0.84	0.573
Balón*Método*Altura*Distancia	16	9.025	0.5640	0.69	0.794
Error	81	66.000	0.8148		
Total	161	158.790			

De acuerdo a lo mostrado en la tabla, lo destacado en color azul manifiesta que el **Valor P** al ser comparado con nuestro valor de α , se rechaza la hipótesis nula de que los métodos sean estadísticamente iguales, es decir, que existe una diferencia entre los métodos de tiro y una interacción *Balón-Distancia* y *Altura-Distancia*. En la siguiente imagen se aprecian las gráficas de los factores y de interacción para nuestra primer tabla ANOVA, sin embargo las que llaman nuestra atención son las ya mencionadas.



Se realizó una prueba LSD para el factor método y con ello obtener una escala en las maneras de tiro. La siguiente tabla nos muestra que tanto el método 1 como el método 2 son estadísticamente iguales. Además estos dos métodos son los mejores para realizar los lanzamientos.

Comparaciones por parejas de Fisher: Respuesta = Tiros encestados, Término = Método

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Método	N	Media	Agrupación
1	54	1.25926	A
2	54	1.18519	A
3	54	0.81481	B

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Posteriormente se elaboró un ANOVA fijando cada uno de estos métodos.

Modelo lineal general (Método 1): TIROS vs. BALON, ALTURAS, DISTANCIAS

Análisis de Varianza

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
BALON	2	3.3704	1.68519	1.42	0.259
ALTURA	2	0.1481	0.07407	0.06	0.940
DISTANCIA	2	0.4815	0.24074	0.20	0.817
BALON*ALTURA	4	2.5185	0.62963	0.53	0.714
BALON*DISTANCIA	4	3.1852	0.79630	0.67	0.617
ALTURA*DISTANCIA	4	9.4074	2.35185	1.98	0.125
BALON*ALTURA*DISTANCIA	8	3.2593	0.40741	0.34	0.941
Error	27	32.0000	1.18519		
Total	53	54.3704			

Modelo lineal general (Método 2): TIROS vs. BALON, ALTURAS, DISTANCIAS

Análisis de Varianza

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
BALON	2	0.4815	0.2407	0.34	0.713
ALTURA	2	1.0370	0.5185	0.74	0.488
DISTANCIA	2	1.3704	0.6852	0.97	0.391
BALON*ALTURA	4	5.2963	1.3241	1.88	0.143
BALON*DISTANCIA	4	8.9630	2.2407	3.18	0.029
ALTURA*DISTANCIA	4	14.7407	3.6852	5.24	0.003
BALON*ALTURA*DISTANCIA	8	3.2593	0.4074	0.58	0.786
Error	27	19.0000	0.7037		
Total	53	54.1481			

Como se puede apreciar en las tablas ANOVA, la del método 2 es la única que posee una interacción entre *Balón-Distancia* y *Altura-Distancia*. Para ver cuál es la mejor combinación de estas interacciones se aplica de nuevo una prueba LSD.

LSD para Balón-Distancia

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

BALON*DISTANCIAS	N	Media	Agrupación
7 <4.6	6	2.16667	A
5 4.60	6	1.50000	A B
6 6.75	6	1.50000	A B
6 <4.6	6	1.16667	B
6 4.60	6	1.16667	B
5 <4.6	6	0.83333	B
5 6.75	6	0.83333	B
7 4.60	6	0.83333	B
7 6.75	6	0.66667	B

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

LSD para Altura-Distancia

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

ALTURAS*DISTANCIAS	N	Media	Agrupación
A 6.75	6	2.16667	A
B <4.6	6	1.83333	A B
B 4.60	6	1.50000	A B C
M <4.6	6	1.33333	A B C D
M 4.60	6	1.16667	B C D E
A <4.6	6	1.00000	B C D E
A 4.60	6	0.83333	C D E
M 6.75	6	0.50000	D E
B 6.75	6	0.33333	E

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Regresando a nuestros datos originales y aplicando LSD para las últimas dos interacciones, tenemos:

Comparaciones por parejas de Fisher: Respuesta = Tiros encestandos, Término = Balón*Distancia

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Balón*Distancia	N	Media	Agrupación
7 <4.6	18	1.61111	A
6 <4.6	18	1.44444	A B
6 6.75	18	1.33333	A B
7 4.60	18	1.16667	A B C
5 4.60	18	1.00000	B C
5 6.75	18	0.94444	B C
6 4.60	18	0.88889	B C
7 6.75	18	0.72222	C
5 <4.6	18	0.66667	C

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Comparaciones por parejas de Fisher: Respuesta = Tiros encestandos, Término = Altura*Distancia

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Altura*Distancia	N	Media	Agrupación
A 6.75	18	2.00000	A
B <4.6	18	1.61111	A B
M <4.6	18	1.27778	B C
B 4.60	18	1.16667	B C
M 4.60	18	1.05556	B C D
A 4.60	18	0.83333	C D
A <4.6	18	0.83333	C D
B 6.75	18	0.50000	D
M 6.75	18	0.50000	D

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Conclusiones

Para nuestro equipo es recomendable que se realicen tiros a distancias cortas y largas, ya que aquí es donde se obtuvieron las medias más altas. Según las pruebas LSD y nuestro estudio, es recomendable que al momento de realizar tiros a una distancia menor a 4.6 metros se utilice el balón de tamaño 7. Si se desean realizar tiros a una distancia de 6.5 metros es preferible lo realice una persona de estatura alta. Además, debido a estas características la mejor posición para esta persona es Alero alto, Base o Escolta. Aunque es recomendable utilizar el método de tiro 2 para aprovechar los efectos de interacción. En caso de ser una persona de estatura baja o mediana conviene tirar a distancias menores o iguales a 4.6 metros con el método 1; sus posiciones más favorables son Ala Pivot y Pivot Center.

Referencias

Gutiérrez Pulido, Humberto; De la Vara Salazar, Román. (2008). Análisis y diseño de experimentos. Ciudad de México, México. McGraw-Hill.

BASE. (2018). ¿Cuáles son las medidas de los balones de baloncesto reglamentarios?. 22 de abril 2018, de BASE Sitio web: <https://www.base.net/movimientobase/medidas-de-los-balones-de-baloncesto/>.

Seltman, H. (Septiembre 8 2015). Experimental Design and Analysis.1st ed. [ebook] Pittsburgh, pp 311-314. Sitio web: <http://www.stat.cmu.edu/~hseltman/309/Book/Book.pdf>
Revisado el 10 de Mayo 2018.

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 2

¿INFLUYE LA ESTATURA Y EL PESO DE UN ÁRBITRO EN UNA PRUEBA DE VELOCIDAD DE RESISTENCIA?

Luis Enrique Alvarado Chávez, Edson Aarón Luna Barboza, Asesor: Saúl Nevares Nieto
wer0o.dgo_arn@hotmail.com, bkcena_25@hotmail.com, saul_2n@hotmail.com
Facultad de Ciencias Exactas
Licenciatura
Futbol, árbitro, prueba física, condición

Los árbitros profesionales del estado de Durango, aproximadamente, cada trimestre se someten a una serie de pruebas físicas para darse una idea de si estos se encuentra con una condición física óptima para poder desempeñarse en su labor arbitral, en este caso nos enfocaremos en la prueba de velocidad de resistencia (péndulo de 120 metros). Aunque hay varias condiciones para analizar, decidimos llevar el enfoque de la investigación a dos características principales (peso y estatura) para hacer su comparación entre el tiempo en que llevan a cabo dicha prueba.

INTRODUCCIÓN

Para todo deporte, se exige tener una buena condición física para poder realizarla, tratándose de un deporte de campo abierto o de salón.

En este caso, hablaremos del deporte más popular en todo el mundo y que está en altas expectativas porque nos encontramos en tiempos mundialistas, el futbol soccer.

El futbol es un deporte de campo jugado entre dos conjuntos de once jugadores cada uno y algunos árbitros que se ocupan de que las normas se cumplan correctamente, de quienes nos vamos a enfocar en este trabajo de investigación.

El árbitro es la autoridad deportiva única e inapelable, en el orden técnico, para dirigir los partidos. Sus facultades comienzan en el momento de entrar en el recinto deportivo y no terminan hasta que lo abandona, conservándolas, por tanto, durante los descansos, interrupciones y suspensiones, aunque el balón no se halle en el campo.

Tanto directivos, como los futbolistas, entrenadores, auxiliares y delegados de los clubes, deben acatar sus decisiones y están obligados, bajo su responsabilidad, a apoyarle y protegerle en todo momento para garantizar la independencia de su actuación y el respeto debido al ejercicio de su función, así como su integridad personal, interesando, a tales fines, si fuese preciso, la intervención de la autoridad.

Como se tiene en mente, para poder rendir el tiempo correspondido a un partido de futbol, cada participante debe de tener las condiciones físicas para aguantar el riguroso esfuerzo



que causa el estar persiguiendo el balón por la cancha y tratar de anotar un gol o el tratar de evitar de que anote el otro equipo; para los árbitros es lo mismo, ya que ellos necesitan tener las condiciones para estar al nivel de los jugadores y poder estar al pendiente de cada jugada.

Es cierto que para ejercer cada posición en un equipo de futbol debe de tener ciertas características físicas para una mayor ejecución, ya sea su velocidad y agilidad, o su amplia vista periférica; para los árbitros también se requieren de ciertas características para ejercer su profesión, pero no sólo es entrar a la cancha y listo, tiene que cumplir con algunos puntos legales para considerarse apto.

Todos los árbitros han de superar exámenes teóricos y pruebas físicas cuyos resultados, junto a informes de los partidos del Comité de Árbitros, les habilitan para ejercer su actividad y, en su caso, ascender de categoría.

Para este caso, nos enfocaremos en las pruebas físicas, en especial en una de alto rendimiento, y en las características físicas principales que tiene una persona, la estatura y el peso.

MARCO TEÓRICO

Una prueba física es el medio de certificación de campo mediante la cual se intenta obtener una estimación objetiva del nivel actual de condición física de un deportista (Flores Gurrola M., 2018).

Empecemos por definir algunos términos. La resistencia es “la capacidad psíquica y física que posee un deportista para resistir a la fatiga” (Weineck, 1992), y la velocidad es “la capacidad que se manifiesta por completo en aquellas acciones motrices donde el rendimiento máximo no queda limitado por el cansancio” (Monroy Ardila & Mora Cardenas, 2014).

Ahora bien, podríamos definir la Velocidad de Resistencia como la capacidad psíquica y física que posee un deportista para resistir un recorrido a una máxima intensidad, también hay que mencionar que la duración de la prueba debe ser mayor de 12 segundos de lo contrario solo sería una prueba de velocidad (Vallodoro, 2011).

El objetivo de dicha prueba es medir la capacidad de realizar esfuerzos de carrera y desplazamientos arbitrarios durante jugadas rápidas largas de más de 20 segundos de intensidad sub-máxima, sin bajar la calidad del esfuerzo y tiempo de reacción selectivo ante un estímulo visual (Zintl, 1991).

DESCRIPCIÓN DE LAS MODIFICACIONES MÁS IMPORTANTES EN BASE A LA PRUEBA DE VELOCIDAD DE RESISTENCIA

Fecha: 7 de Abril del 2009

CUADRO

Desarrollo: Se marca con estacas de 1.60 m un rectángulo de 25 m X 43.30 m con una zona de llegada de 1.5m, el participante se coloca en el vértice de salida y cuando escucha el silbatazo de salida emprende el siguiente recorrido: 25 m carrera frontal, rodea la estaca y carrera frontal de 50 m (75 m), rodea la estaca y 25 m corre hacia atrás (100 m), rodea la estaca y carrera frontal de 50 m (150 m), rodea la estaca y 25 m se desplaza con pasos laterales viendo al interior de rectángulo (175m), rodea la estaca y carrera frontal de 50 m

(225 m), rodea la estaca y se desplaza con pasos laterales de 25 m viendo al interior del rectángulo (250 m), rodea la estaca y finalmente, carrera frontal de 50 m, para completar un recorrido de 300 m.

Si el participante realiza el recorrido de forma incorrecta o no consigue pisar la zona de llegada en el tiempo estipulado (Hombres: 62.5seg., Mujeres: 69seg.), se le otorgará otra oportunidad, pero sí vuelve a fallar, se considerará que no ha superado la prueba (Flores Gurrola, 2017).

Fecha: 6 de Agosto del 2009

CODA

Desarrollo: Los conos deben estar colocados así: La «línea de salida» debe marcarse 0.5 m antes de la puerta de cronometraje (A). La distancia entre (A) y (B) es 5 metros. La distancia entre (B) y (C) es 10 metros.

Los árbitros han de completar las siguientes carreras de aceleración:

- 15 m hacia adelante (A a C),
- 10 m de carrera lateral hacia la izquierda (C a B),
- 10 m de carrera lateral hacia la derecha (B a C) y
- 15 m hacia adelante (C a A).

Si el participante realiza el recorrido de forma incorrecta o no consigue pisar la zona de llegada en el tiempo límite estipulado (Hombres: 18 seg., Mujeres: 20 seg.), se le otorgará otra oportunidad, pero sí vuelve a fallar, se considerará que no ha superado la prueba (Flores Gurrola, 2017).

Fecha: 12 de julio del 2011

PENDULO (120 mts. + Técnico)

Desarrollo: Los conos deben estar colocados así: La «línea de salida» debe marcarse 1 m antes de la puerta de cronometraje (A). La distancia entre (A) y (B) es 20 metros.

Los árbitros han de completar las siguientes carreras de aceleración:

- 20m. Carrera de frente, dar vuelta a la estaca
- 20m. Desplazamiento lateral izquierdo, dar vuelta a la estaca
- 20m. Carrera de frente, dar vuelta a la estaca
- 20m. Desplazamiento lateral derecho, dar vuelta a la estaca
- 20m. Desplazamiento hacia atrás, dar vuelta a la estaca
- 20m. Carrera de frente.

Si el participante realiza el recorrido de forma incorrecta o no consigue pisar la zona de llegada en el tiempo límite estipulado (Hombres y Mujeres: 35 seg.), se le otorgará otra oportunidad, pero si vuelve a fallar, se considerará que no ha superado la prueba.

En el caso de los árbitros asistentes:

- El banderín debe siempre estar visible al evaluador, en los tramos de desplazamiento lateral izquierda - derecha, el banderín se portará con mano izquierda.

- Constante contacto visual con el evaluador, sí no se logra, el evaluador puede eliminar al participante.

En el caso de los árbitros centrales:

- Constante contacto visual con el evaluador, sí no se logra, el evaluador puede eliminar al participante (Flores Gurrola, 2017).

Fecha: 3 de junio del 2013

NUEVO PENDULO (70mts)

Desarrollo: Los tiempos de esta prueba deben registrarse con puertas de cronometraje electrónicas (células fotoeléctricas). Los conos deben estar colocados así: La «línea de salida» debe marcarse 1 m antes de la puerta de cronometraje (A). La distancia entre (A) y (B) es 15 metros. La distancia entre (B) y (C) es 10 metros. Los árbitros han de completar el siguiente recorrido.

- 25m. Carrera de frente, (A a C).
- 10m. Desplazamiento lateral izquierdo, (C a B).
- 10m. Desplazamiento lateral derecho, (B a C).
- 10m. Desplazamiento hacia atrás, (C a B).
- 15m. Girar para tener de frente (A) y carrera de frente, (B a A).

Si el participante realiza el recorrido de forma incorrecta o no consigue pisar la zona de llegada en el tiempo límite estipulado (Hombres: 23 seg., Mujeres: 24.5 seg.), se le otorgará otra oportunidad, pero sí vuelve a fallar, se considerará que no ha superado la prueba (Flores Gurrola, 2017).

Fecha: 11 de enero del 2015

PENDULO ACTUAL (120 mts.)

Los tiempos de esta prueba deben registrarse con puertas de cronometraje electrónicas (células fotoeléctricas). Se colocan tres estacas de 1.40 m de altura, la 1ª en el punto de partida (punto A), la 2ª a 20 m (punto B) y la 3ª a 30 m (punto C). Los árbitros han de completar el siguiente recorrido.

- 40 m. Ida del punto A al C y vuelta a B = Carrera frontal.
- 10 m. Regreso del B al C = Carrera hacia atrás,
- 10 m. Vuelta del C al B = Pasos laterales costado izquierdo,
- 10 m. Regreso del B al C = Pasos laterales costado derecho,
- 10 m. Vuelta del C al B = Carrera hacia atrás,
- 40 m. Regreso del B al C y retorno al A = Carrera frontal.

Si el árbitro no realiza adecuadamente el recorrido o no consigue pisar en la llegada el punto A por debajo de tiempo máximo para esta prueba (Hombres: 34 seg., Mujeres: 37 seg.), tendrá una segunda oportunidad y si vuelve a fallar se considerará que no ha superado la prueba y quedará eliminado (Flores Gurrola, 2017).

DESCRIPCIÓN DE CADA MODIFICACIÓN EN BASE AL PESO

Fecha: 5 de noviembre del 2009

PESO MÁXIMO; El día fechado para realizar la prueba física, el árbitro (a) deberán estar dentro de los márgenes de su peso ideal estipulado por el jefe de servicios médicos. El peso máximo que deberá tener cada árbitro, es en relación a su peso y talla.

El Índice de Masa Corporal (**IMC**) es una operación matemática que consiste en dividir tu peso en kilos entre tu altura al cuadrado en metros: $IMC = \frac{peso(kg)}{altura^2(m)}$

Pues bien ya que tienes tu (**IMC**) vamos a describir brevemente los parámetros que sigue el IMC para que un árbitro se encuentre dentro del margen de una persona saludable (mejor con salud, s.f.).

- **17 – 19:** se puede considerar como delgadez aceptable sin caer en ningún trastorno alimentario. No obstante, en algunos casos puede indicar el principio de uno de ellos. De 17 para bajo obviamente menos estará con buena salud.
- **19 – 25:** esta franja se considera la más saludable pues si tu operación matemática te ha dado este resultado te encuentras en un peso adecuado o normal.
- **25 – 30:** en el caso de que te encuentres entre estas dos cifras, estarías rozando ya el sobrepeso, por no decir que ya te encuentras dentro de él. De 30 para arriba obviamente menos estará con buena salud (mejor con salud, s.f.).

Fecha: 26 de enero del 2010

PESO MÁXIMO; El árbitro (a) deberán estar dentro de los márgenes de su peso ideal, y porcentaje de grasa estipulado por el jefe de servicios médicos. Pero el peso máximo y el porcentaje de grasa que deberá tener cada árbitro, es en relación a un estudio antropométrico.

El porcentaje de grasa no deberá ser mayor a: **HOMBRES 18.0%** y **MUJERES 20.5%**

Fecha: 3 de junio del 2013

PESO MÁXIMO; El árbitro (a) deberán estar dentro de los márgenes de su peso ideal, y porcentaje de grasa estipulado por el jefe de servicios médicos. El peso máximo que deberá tener cada árbitro, es en relación a estudio antropométrico.

ESTUDIO ANTROPOMÉTRICO; Con el estudio antropométrico se pretende fraccionar el peso total del cuerpo de la persona, y así decirte el porcentaje corresponde a masa grasa, masa muscular, masa ósea, agua corporal, etc.

Las mediciones realizadas para el estudio antropométrico son las siguientes:

*Registro de peso

*Registro de la altura

*Pliegues cutáneos: Tricicipital, Biccipital, Subescapular, Cresta Iliaca, Supraespinal, Abdominal, Muslo (frontal) y Pantorrilla media (g-se, 1993)l.

*Medición de los perímetros: Perímetro de brazo relajado, Perímetro de brazo flexionado en máxima tensión, Perímetro de antebrazo, Perímetro de muñeca, Perímetro del tórax, Perímetro de cintura, Perímetro de cadera (o glúteo), Perímetro de muslo, Perímetro de pantorrilla, Perímetro del tobillo, Perímetro de cabeza, Perímetro de cuello (g-se, 1993).

*Longitudes segmentadas del cuerpo: Longitud acromial-radial, Longitud radial-estiloide, Longitud medioestiloidea-dactiloidea, Longitud o altura ilioespinal, Longitud o altura

trocantérea, Longitud trocantérea-tibial lateral, Longitud o altura tibial lateral, Longitud tibial medial-maleolar medial (g-se, 1993).

*Medición de diámetros: Diámetro biacromial, Diámetro transverso de tórax, Diámetro o profundidad antero-posterior de tórax, Diámetro bi-ileocrestideo, Diámetro de húmero, Diámetro de fémur (g-se, 1993).

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Objetivos

General:

Identificar si la estatura y el peso de los árbitros tienen impacto directo en la prueba de Péndulo (Velocidad de Resistencia) con ayuda del análisis de varianza (ANOVA) de un factor.

Justificación

El fútbol es un deporte que exige un alto nivel no solo técnico y táctico, sino también requiere de un excelente estado físico, por lo que es importante que el árbitro este al mismo nivel del estado físico del futbolista o por qué no, por encima de él (Monroy Ardila & Mora Cardenas, 2014).

La cercanía a la jugada y la búsqueda de un posicionamiento adecuado que te permita tener una mejor visión de la jugada son dos aspectos importantes que ayudan a la hora de tomar de una decisión para ello el árbitro tiene que hacer desplazamientos que tienen que ser inmediatos y en algunos casos también consecutivos.

El árbitro no puede darse el lujo de detenerse ni un segundo ya que, si se despista un segundo, puede ocurrir la jugada que marque un punto de inflexión en el partido, para bien o para mal.

Alcances y Limitaciones

- Se tiene un fácil acceso al objeto de estudio y al archivo de pruebas anteriormente realizada.
- No todas las pruebas cuentan con un buen número para estudio.
- El número de árbitros varía por trimestre.
- Las pruebas varían en algunos trimestres.

METODOLOGÍA

Tipología del estudio: La investigación es de tipo documental ya que se obtiene la información de informes archivados por la delegación. También es descriptivo pues se describe propiedades tales como el peso y estatura del grupo de árbitros profesionales del estado de Durango.

Método de investigación: es de tipo cuantitativa pues estamos recogiendo y analizando datos cuantitativos.

Técnicas y procedimientos para recopilar la información: La información la obtuvimos de los documentos archivados donde el preparador físico anual mente hace un informe General de su trabajo, las pruebas físicas y las actividades realizadas. De igual forma, se entrevistó al preparador físico y se investigó en páginas de internet, para aclarar unos puntos y conceptos desconocidos por nosotros.

Técnicas para analizar la información obtenida: Las técnicas de análisis de información que se utilizan en la investigación es el análisis de varianza (ANOVA) de un factor. El ANOVA de un solo factor se centra en la comparación de más de dos medias poblacionales o de tratamiento. Sea

I = número de muestras comparadas.

μ_1 = media de la población 1.

⋮

μ_I = media de la población I .

Las hipótesis de interés son:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$$

Contra

H_1 : por lo menos dos de las μ_i son diferentes

Si $I = 4$, H_0 es verdadera solo si las 4 μ_i son idénticas. H_1 sería verdadera, por ejemplo, si

$$\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 = \mu_4,$$

si

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 \neq \mu_2$$

o si las 4 μ_i son diferentes entre sí.

Una prueba de estas hipótesis requiere que se tenga disponible una muestra aleatoria de cada población o tratamiento.

Usaremos la siguiente notación:

-Se denotará por I al número de muestras.

- J será el número de individuos en cada muestra.

- x_{ij} denota la medición j -ésima en la muestra i -ésima.

- \bar{x}_i será la media de cada muestra, $i = 1, \dots, I$.

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij}}{J}, i = 1, \dots, I$$

$\bar{x} \dots$ será la media global o la gran media.

$$\bar{x} \dots = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}}{IJ}$$

(Gutierrez Pulido & De la Rosa Salazar, 2008)

Suma de cuadrados

La suma total de los cuadrados (STC), la suma de los cuadrados del tratamiento (SCT) y la suma de los cuadrados del error (SCE) están dadas por

$$STC = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x} \dots)^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}^2 - \frac{x \dots^2}{IJ}$$

$$STC = J \sum_{i=1}^I (\bar{x}_{i \cdot} - \bar{x} \dots)^2 = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I x_{i \cdot}^2 - \frac{x \dots^2}{IJ}$$

$$SCE = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x}_{i \cdot})^2$$

Donde $x_{i \cdot} = \sum_{j=1}^J x_{ij}$ y $x \dots = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij}$

Otra fórmula para calcular la STC está dada de la siguiente forma

$$STC = SCT + SCE$$

Por consiguiente, si se calculan dos de las sumas de cuadrados, la tercera se puede obtener por medio de la ecuación anterior.

Las sumas de cuadrados divididas entre sus respectivos grados de libertad se llaman cuadrados medios. Los dos que más interesan son el cuadrado medio de tratamientos y el cuadrado medio del error, que se denotan por

$$CMT_r = \frac{STC}{I - 1}$$

$$CME = \frac{SCE}{I(J - 1)}$$

El estadístico de contraste para realizar la prueba ANOVA se construye de la forma siguiente:

$$F = \frac{CMT_r}{CME}$$

que se distribuye según una F-Fisher con $I - 1$ grados de libertad del numerador y $I(J - 1)$ grados de libertad del denominador.

La región de rechazo será $F \geq F_{\alpha, I-1, I(J-1)}$.

Todos estos cálculos se resumen en una tabla, llamada tabla de ANOVA, la cual es la siguiente:

	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	F
TRATAMIENTO	$I - 1$	SCT	CMT_r	$\frac{CMT_r}{CME}$
ERROR	$I(J - 1)$	SCE	CME	
TOTAL	$IJ - 1$	STC		

(Gutierrez Pulido & De la Rosa Salazar, 2008)

RESULTADOS

Los datos obtenidos para esta investigación fueron los siguientes:

Nombre	Estatura	Peso	Tiempo de recorrido
Antonio	1.85	68	30.18
Brayan	1.69	60	31.77
Cristian	1.79	83	31.41
Diego	1.82	74	32.22
Erick	1.78	78	31.3
Hugo	1.71		33.33
Jorge1	1.82	74	32.12
Jorge2	1.78	61	30.79
Jorge 3		73	31.36
José1	1.70	63	33.45
José 2	1.66	67	33.94
Juan	1.74	66	32.88
Lorenzo	1.72	70	32.28
Luis	1.72	71	30.36
Marco	1.85	79	31.14
Miguel		74	32.20
Óscar	1.8	78	32.68
Ulises	1.7		33.7

(Flores Gurrola, s.f.)

Con los datos de las condiciones de los árbitros, junto con el tiempo de duración de la prueba, se realiza el análisis entre las características.

Para iniciar, los datos adjuntos son para comparar el tiempo de duración de la prueba de péndulo con respecto a rangos de estatura de los árbitros que participaron en dicha prueba:

Estatura	Tiempo en que realizó la prueba			
1.65 -- 1.70	33.94	31.77	33.45	33.7
1.70 -- 1.75	33.33	30.16	32.28	32.88
1.75 -- 1.80	30.78	31.3	31.41	32.68
1.80 -- 1.85	32.22	32.12	31.14	30.18

Se tiene en cuenta que cada uno de los rangos de estatura tiene un promedio de tiempo de realización.

La hipótesis nula manifiesta que el promedio de tiempo es idéntico en cada uno de los rangos en contra de que el promedio de tiempo no es el mismo en todos los rangos de estatura.

Para ello, se realiza el análisis de varianza (ANOVA) de un solo factor de los datos con un nivel de significancia del 0.05%, obteniendo su tabla:

Fuente	Grados de libertad	SC	MC	Valor F
Estatura	3	8.104425	2.701475	2.40071538
Error	12	13.50335	1.12527917	
Total	15	21.607775		

Al consultar la tabla de distribución de F de Fisher, obtenemos el valor $F_{0.05, 3, 12} = 3.49$, que es el correspondiente a las condiciones ya establecidas por el estudio.

Al hacer la comparación, se tiene que el Valor $F = 2.41 < 3.49 = F_{0.05, 3, 12}$, por lo tanto, la hipótesis nula es aceptada, es decir, no hay diferencia entre los promedios de tiempo de realización entre los árbitros, con respecto a su estatura.

Ahora, los datos adjuntos son para comparar el tiempo de rendimiento de la misma prueba de péndulo con enfoque a los rangos de peso de los árbitros participantes:

Peso	Tiempo en que realiza la prueba			
60 -- 66	31.77	30.79	33.45	32.88
66 -- 72	33.94	30.18	32.28	30.36
72 -- 78	31.36	32.2	32.22	32.12
78 -- 84	31.3	32.68	31.14	31.41

Igual que en el caso anterior, se tiene que cada uno de los rangos de peso tiene su promedio de tiempo de rendimiento.

La hipótesis nula manifiesta que el promedio de tiempo de rendimiento por rango de peso es idéntico en cada uno de ellos en contra de que el promedio no es el mismo en todos los rangos.

Para ello, se realiza el ANOVA de un solo factor de los datos con un nivel de significancia del 0.05%, obteniendo su tabla:

Fuente	Grados de libertad	SC	MC	Valor F
Peso	3	0.89475	0.29825	0.228467468
Error	12	15.66525	1.3054375	
Total	15	16.56		

Al consultar la tabla de distribución de F de Fisher, obtenemos el valor $F_{0.05, 3, 12} = 3.49$, que es el correspondiente a las condiciones ya establecidas por el desarrollo.

Al hacer la comparación, se tiene que el Valor $F = 0.23 < 3.49 = F_{0.05, 3, 12}$, por lo tanto, la hipótesis nula es aceptada, es decir, no hay diferencia entre los promedios de tiempo de realización entre los árbitros, con respecto a su peso.

CONCLUSIONES

Como se observa por los resultados obtenidos, no hay ningún límite para poder tener un buen rendimiento para llevar a cabo estos tipos de pruebas, ya sea que tan “alto” o que tan “chaparro” o que tan “ligero” o que tan “pesado” puede llegar a ser.

Es cierto que no cualquiera puede realizar estas actividades, ya que pide un alto nivel de condición física, pero al tener un acondicionamiento adecuado, puede llegar a conseguir terminar una prueba sin sufrir de agotamiento y desgaste excesivo. Por lo tanto, si se tienen las condiciones físicas para cumplir con las rigurosas pruebas físicas y los exámenes teóricos, sin importar las dimensiones de la estatura y del peso del practicante arbitral, puede llegar a ejercer su actividad y, en casos especiales, ascender de categoría.

REFERENCIAS

- Flores Gurrola, M. A. (mayo de 2017). La importancia de la preparación física y la alta exigencia en sus evaluaciones de condición física en los árbitros de fútbol profesional del estado de Durango con edades de entre 18 y 25 años. *Tesis de Licenciatura*. Durango, Durango, Mexico: UJED.
- Flores Gurrola, M. A. (s.f.). Informe general de actividades correspondientes a la preparación física. Delegación Durango. *Manuscrito no publicado*. Durango, Durango, Mexico: No publicado.
- g-se. (1993). *Mediciones antropométricas. Estandarización de las técnicas de medición, actualizada según parámetros internacionales*. Recuperado el 15 de abril de 2018, de PubliCE: <https://g-se.com/mediciones-antropometricas-estandarizacion-de-las-tecnicas-de-medicion-actualizada-segun-parametros-internacionales-197-san57cfb2711576d>
- Gutierrez Pulido, H., & De la Rosa Salazar, R. (2008). *Análisis y diseño de experimentos*. México, D.F.: MCGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C.V.
- mejor con salud. (s.f.). *Índice de Masa Corporal y tipos de obesidad*. Recuperado el 15 de abril de 2018, de mejor con salud: <https://mejorconsalud.com/indice-masa-corporal-tipos-obesidad/>
- Monroy Ardila, A. L., & Mora Cardenas, D. (diciembre de 2014). *Caracterización de la velocidad de desplazamiento en los futbolistas de la categoría sub17 participantes de la liga de fútbol de bogota*. Recuperado el 11 de abril de 2018, de Sistema nacional de bibliotecas rafael garcia herreros: http://repository.uniminuto.edu:8080/xmlui/bitstream/handle/10656/3169/TEFIS_MonroyArdilaAndres_2014.pdf?sequence=3
- Vallodoro , E. (21 de febrero de 2011). *¿Resistencia a la velocidad o velocidad-resistencia?* Recuperado el 11 de abril de 2018, de entrenamiento deportivo: <https://entrenamientodeportivo.wordpress.com/tag/resistencia-a-la-velocidad/>
- Zintl, F. (1991). *Entrenamiento de la resistencia: Fundamentos, métodos y dirección del entrenamiento*. Recuperado el 15 de abril de 2018, de scribd: <https://es.scribd.com/document/375176857/Entrenamiento-de-La-Resistencia-Fmydde-Fritz-Zintl-pdf>
- Flores Gurrola, M., Preparador Físico-Delegación Durango, comunicación personal, 10 de abril de 2018.
- Flores Gurrola, M., Preparador Físico-Delegación Durango, comunicación telefónica, 12 de mayo de 2018.

[Programa general](#)



Ponencia de Investigación 3

EFECTO DE LA CHAYA EN RATAS LONG-EVANS CON DIETA DE SOBRENUTRICIÓN

José Enrique mata Vázquez, Adriana Guadalupe Caballero González, Felipe de Jesús Alvarado. Asesor: Dr. Saul Nevárez Nieto

enrique_mata96@outlook.com, adrianagonzalez_2312@hotmail.com, felipeandradealvarado@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED
Lic. Matemáticas Aplicadas. Octavo semestre.
Palabras clave: chaya, azúcar, té, dieta, ratas.

RESUMEN

En el presente trabajo se expone un proyecto de experimentación con el fin de ver si la planta chaya (*Cnidocolus chayamansa* o *Cnidocolus aconitifolius*) es útil para reducción de peso y control de dietas. Para este experimento se eligieron un grupo de ratas (Long-Evans) separándolas entre machos y hembras, se les dio un tratamiento con tres dietas diferentes y se monitorearon los pesos, la primera dieta fue una dieta normal, la segunda rica en grasas y azúcares, y la tercera fue la misma que la segunda pero suministrando la chaya. La aplicación de la chaya sobre las ratas se administró en forma de té de dos maneras, una disuelta con etanol ($\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-OH}$) y una con metanol CH_3OH (CH_4O).

INTRODUCCION

Durante siglos, el conocimiento de las grandes civilizaciones mesoamericanas fue enriquecida mediante la práctica, llevándolos a descubrir propiedades curativas para distintas plantas, incluyendo la Chaya. Dentro de la medicina tradicional, se empleaba principalmente para controlar enfermedades respiratorias, mantener una buena digestión y evitar el estreñimiento. Actualmente, se ha retomado la búsqueda de las aplicaciones de esta planta, por lo que se han realizado numerosas investigaciones sobre sus componentes nutricionales (Herrera Díaz, J. L., 2017).

La presente investigación tiene como objetivo determinar el efecto de la chaya en ratas Long-Evans cuando son sometidas a una dieta en la que la cantidad de grasas como azúcares es mayor a la que aporta una dieta estándar. Además, gracias a los datos recabados, encontramos una influencia del sexo en la capacidad de ganar peso de los sujetos estudiados.

El interés por el que se realiza este trabajo se basa en el impacto que esta planta pudiera tener en personas con problemas de obesidad, diabetes tipo 2 y otras enfermedades relacionadas con el peso de los individuos y su alimentación.

MARCO TEÓRICO

La chaya, conocida científicamente como *Cnidocolus chayamansa* o *Cnidocolus aconitifolius* y coloquialmente como árbol espinaca, es un arbusto robusto de follaje

perenne. En México y en Centroamérica es muy conocida ya que se puede encontrar fácilmente de forma silvestre. El nombre de chaya, deriva del vocablo maya Chay. Los mayas encontraron en la chaya, o árbol de espinaca mexicana, una fuente de consumo alimenticio gracias a su fácil producción y sus aportes benéficos a la salud. Esta planta se encuentra como un arbusto, y sus hojas son destinadas a consumo alimenticio preparadas de forma similar a la espinaca, aunque la chaya tiene un sabor fuerte (Herrera Díaz, J. L., 2017).

Las ratas Long-Evans son roedores de aproximadamente 20 centímetros de largo en su vida adulta y llegan a pesar los 800 gramos. Estos animales son recomendados en investigaciones sobre hipertensión y obesidad.

El etanol es una sustancia líquida e incolora inflamable, suele obtenerse mediante destilación de productos fermentados. El metanol es un líquido incoloro que, a diferencia del etanol, es altamente tóxico. Es obtenido como resultado de la reacción entre el monóxido de carbono y el hidrógeno, y es utilizado como aditivo en algunos combustibles.

Análisis de la varianza con un factor (ANOVA)

Este análisis permite comparar las medias de poblaciones presentando dos alternativas, donde las medias son iguales y la otra donde al menos una es diferente.

El ANOVA se basa en la descomposición de la variación total de los datos con respecto a la media global. Las expresiones para el cálculo de los elementos que intervienen en el ANOVA son las siguientes:

$$\text{Media global: } \bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n}$$

$$\text{Variación en el mismo grupo: } SCD = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

$$\text{Variación Inter-grupos: } SCE = \sum_{j=1}^K (\bar{X}_j - \bar{X})^2 n_j$$

Con k el número de poblaciones y x_{ij} el i -ésimo valor de la muestra j -ésima;

Cuando la hipótesis nula es cierta $SCE/k-1$ y $SCD/n-k$ son estimadores insesgados de la varianza poblacional y el cociente entre ambos se distribuye según una F con $k-1$ grados de libertad en el numerador y $N-k$ grados de libertad en el denominador

	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F
Tratamiento	SCT	I-1	$CMTr = SCT/I-1$	$CMTr/CME$
Error	SCE	$I(j-1)$	$CME = SCE/I(J-1)$	
Total	STC	$IJ-1$		

Si F es menor que α es que las dos variables están relacionadas y por lo tanto hay una diferencia entre las medias, cabe mencionar que entre más grande sea el valor de F más relacionadas están las variables.

La tabla ANOVA bifactorial o de dos factores.

En esta prueba se da a conocer si existe algún tipo de interacción entre dos factores o bien que algún Factor ver que tan relacionados están uno de del otro.

En esta prueba se presentan tres hipótesis nulas, la primera hipótesis sería saber si las medias poblacionales correspondientes a los niveles del primer factor son iguales, la segunda sería observar si las medias poblacionales correspondientes a los niveles del segundo factor son iguales, y por último la tercera hipótesis saber si hay efecto de interacción entre los factores.

Los cálculos quedan dictaminados por las formulas:

$$SCT = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$SCA = \frac{\sum_j T_{j*}^2}{nK} - \frac{T^2}{N}$$

$$SCB = \frac{\sum_k T_{*k}^2}{nj} - \frac{T^2}{N}$$

$$SCAB = \frac{\sum_j \sum_k T_{jk}^2}{n} - \frac{\sum_j T_{j*}^2}{nK} - \frac{T^2}{N}$$

$$SCE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_j \sum_k T_{kj}^2}{n}$$

$$SCT = SCA + SCB + SCAB + SCE$$

Donde

J: niveles del primer factor

K: niveles del segundo factor

n: número de observaciones en cada casilla

N: número total de observaciones

T_{j*} =totales de cada nivel del primer factor

T_{*k} =totales de cada nivel del segundo factor

T_{jk} =totales de cada casilla

T=total de la muestra

La tabla se puede resumir en la siguiente tabla

FV	SC	G.L	MC	F
Factor 1	SCA	J-1	MCA=SCA/J-1	MCA/MCE
Factor 2	SCB	K-1	MCB=SCB/K-1	MCB/MCE

Interacción	SCAB	(J-1)(k-1)	MCAB=SCBA/(J-1)(K-1)	MCAB/MCE
Error	SCE	N-JK	SCE/N-JK	
Total	SCT	N-1		

La decisión sobre las hipótesis con base en la f obtenida para el primer factor se tiene que si es mayor a $F_{J-1, N-JK}$ esta se rechaza, así mismo para el f del segundo factor si es mayor a $F_{K-1, N-JK}$ también se rechaza, para la f de la interacción tiene que ser mayor a $F_{(J-1)(K-1)}$.

Prueba LSD de Fisher.

ES una prueba de comparación múltiple. Permite comparar las medias de los niveles de los factores después de haber rechazado la hipótesis nula de igualdad mediante la tabla ANOVA.

Esta prueba se basa en la creación de un valor común, basado en la t de Student. Las diferencias que estén por encima de este valor indican una diferencia entre las medias significativa y las que se encuentren por abajo no son significativas, para calcular este valor se usan las formulas

$$T_{N-T} = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{\sqrt{\hat{S}_E^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$

$$LSD = T_{N-T} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\hat{S}_E^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

N =número total de observaciones

T =número de niveles del factor

n_i, n_j = tamaños muestrales de los niveles i y j

\hat{S}_E^2 = estimación de la varianza del error o residual

$T_{N-T} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ = distribucio t de Student con $N-T$ grados de libertad y a un nivel de significancia de $\left(\frac{\alpha}{2} \right)$

Para determinar si existe una diferencia significativa se debe cumplir que $|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| > LSD$ donde \bar{Y}_i, \bar{Y}_j son las medias muestrales para los dos niveles (Gutiérrez Pulido, H. y De la Vara Salazar, R., 2008).

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se pretende verificar el efecto de la chaya en el peso de los individuos que mantienen una dieta alta en grasas y azúcares. El proyecto se llevará a cabo en el laboratorio de la Facultad de Ciencias Químicas de la UJED, se hará todo lo relacionado con el proyecto que incluye el trabajo con ratas como el pesaje de cada una de ellas y también la toma de la planta de chaya en lugar del agua, con el fin de ver el impacto que tiene la chaya en los individuos,

antes de su aplicación se les mantendrá con una dieta normal, con una dieta rica en azúcares (carbohidratos) y grasas. Posteriormente, se les aplica la chaya en forma de té y se observa si aun manteniendo la última dieta existe alguna disminución en el peso.

METODOLOGÍA

Se inicia el experimento con 13 ratas Long-Evans, siendo 5 machos y 8 hembras, que cuentan con la edad requerida y se tomaron los pesos iniciales el día 28 de agosto del 2017, posteriormente se colocaron en contenedores individuales dentro de unas instalaciones que mantienen un ambiente controlado (ventilación normal, sombra y temperatura ambiente promedio).

Se procedió a alimentar las ratas con una dieta “normal” a base de pellets (comprimidos de trigo saborizado con queso y aceite vegetal), durante 12 semanas (28/08/17-20/11/17) y se monitoreo el peso con una báscula calibrada.

A partir del día 20 de noviembre del 2017, se implementa una nueva dieta, la cual era alta en azúcares y grasas saturadas por el mismo periodo que la dieta anterior (20/11/17-19/02/18).

En el periodo final que comprende del día 19 de febrero al 14 de mayo del presente año, se utilizó la segunda dieta cambiando el agua común por una infusión en forma de té a base de chaya, haciendo dos combinaciones; una con etanol y la otra con metanol, sustancias que se utilizaron para extraer y conservar la esencia de la chaya. La distribución de los objetos de estudio se encuentra en la siguiente tabla

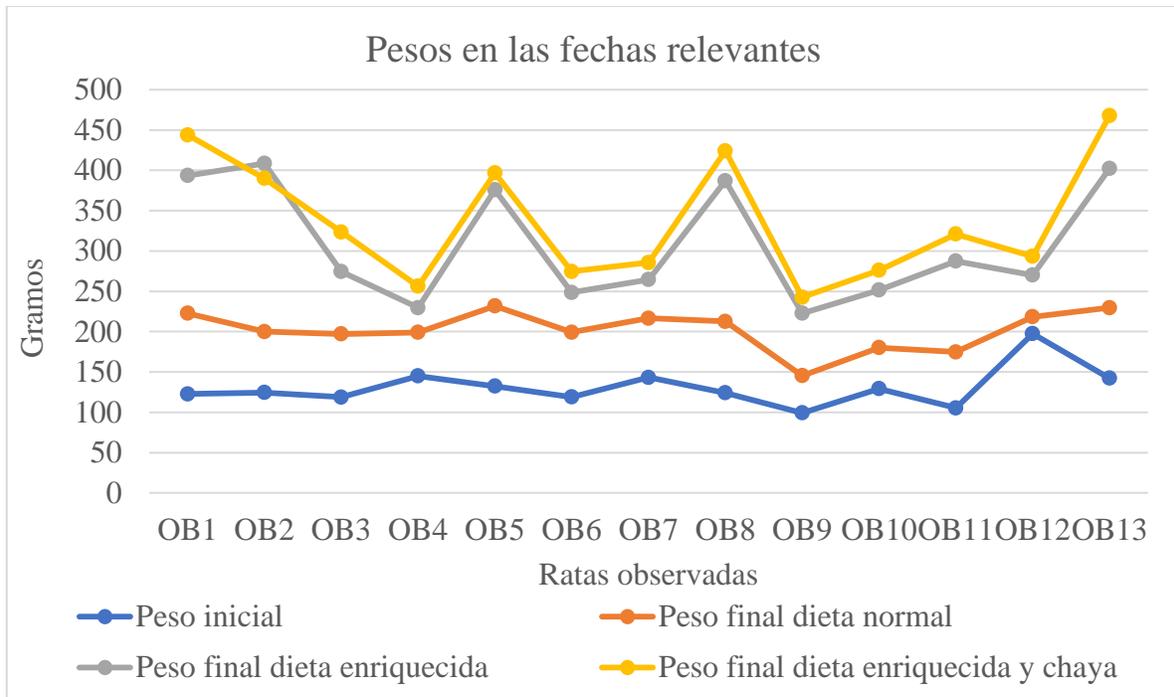
	Solución de la chaya con etanol	Solución de la chaya con metanol
Machos	OB5, OB13	OB1, OB2, OB8
Hembras	OB3, OB4, OB6, OB7, OB9	OB10, OB11, OB12

Los datos recabados se organizaron, primordialmente para verificar si el sexo y el tipo de infusión tenían algún efecto relevante en el control del peso, y posteriormente revisar el efecto en el cambio de peso del último periodo respecto a los anteriores.

Para el análisis de los datos se utilizaron las herramientas estadísticas las cuales fueron ANOVA de un factor, ANOVA bifactorial y los métodos de comparación LSD de Fisher.

RESULTADOS

A continuación, se presenta la gráfica de los pesos de las cuatro fechas relevantes para cada una de las ratas observadas.



Se puede apreciar a simple vista que ocurre una variación respecto a los pesos con las diferentes dietas.

Se estudió en las primeras dos dietas, a través de una tabla ANOVA de análisis de varianza, la influencia del sexo de las ratas en la variación del peso.

Se examina la siguiente hipótesis:

$$H_0: \text{No hay diferencia en el aumento de peso entre machos y hembras con dieta normal.}$$

Tabla ANOVA simple (sexo, dieta normal)

		SC			
Fuente	GL	Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Sexo	1	2988	2988.0	10.09	0.009
Error	11	3258	296.2		
Total	12	6246			

Dado el valor de p obtenido, rechazamos nuestra hipótesis nula. Al existir diferencia en el aumento de peso entre machos y hembras con la dieta normal, utilizamos la tabla de comparación LSD que a continuación se presenta, para mostrar que los machos tienen mayor tendencia a ganar peso.

Método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Sexo	N	Media	Agrupación
Machos	5	90.3000	A
Hembras	8	59.1375	B

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Para el aumento de peso con la segunda dieta, en la que se administra una alimentación enriquecida de azúcares y grasas saturadas, se verifica si la hipótesis nula es correcta.

H_0 : No hay diferencia en el aumento de peso entre machos y hembras con dieta de sobrenutrición.

Tabla ANOVA simple (sexo, dieta de sobrenutrición)

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Sexo	1	36691	36691.2	60.95	0.000
Error	11	6622	602.0		
Total	12	43313			

El valor de p obtenido nos arroja un resultado el cual nos rechaza nuestra hipótesis nula, como existe diferencia en el aumento de peso entre machos y hembras con la dieta de sobrenutrición, utilizamos nuevamente la tabla de comparación LSD que a continuación se presenta.

Método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Sexo	N	Media	Agrupación
Machos	5	174.0	A
Hembras	8	64.8	B

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Respecto a los datos obtenidos, se aprecia que los machos tienen mayor tendencia a ganar peso con esta dieta.

ANOVA BIFACTORIAL PARA EL SEXO Y EL TIPO DE SOLUCIÓN DE LA CHAYA EN LA TERCERA DIETA

H_{0A} : No existe un efecto significativo del sexo en la ganancia de peso con la tercer dieta

H_{0B} : No existe un efecto significativo en el tipo de alcohol empleada en las soluciones de la chaya con la tercer dieta.

H_{0AxB} : No existe interacción entre el sexo y el tipo de solución con la tercer dieta

Tabla ANOVA de dos factores

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Sexo	1	82.27	82.27	0.17	0.688
Chaya	1	346.57	346.57	0.73	0.416
Sexo*Chaya	1	256.88	256.88	0.54	0.482
Error	9	4293.80	477.09		
Total	12	4819.50			

Respecto a los resultados obtenidos, se observa que no existe interacción.

En cuanto a los aumentos que se presentan en las distintas dietas, se realiza una prueba para teniendo la siguiente hipótesis:

H_0 : No existe diferencia entre en aumento de peso en las tres dietas aplicadas a las ratas Long – Evans.

Tabla ANOVA simple (dietas)

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
Dietas	2	39226	19613	12.98	0.000
Error	36	54379	1511		
Total	38	93605			

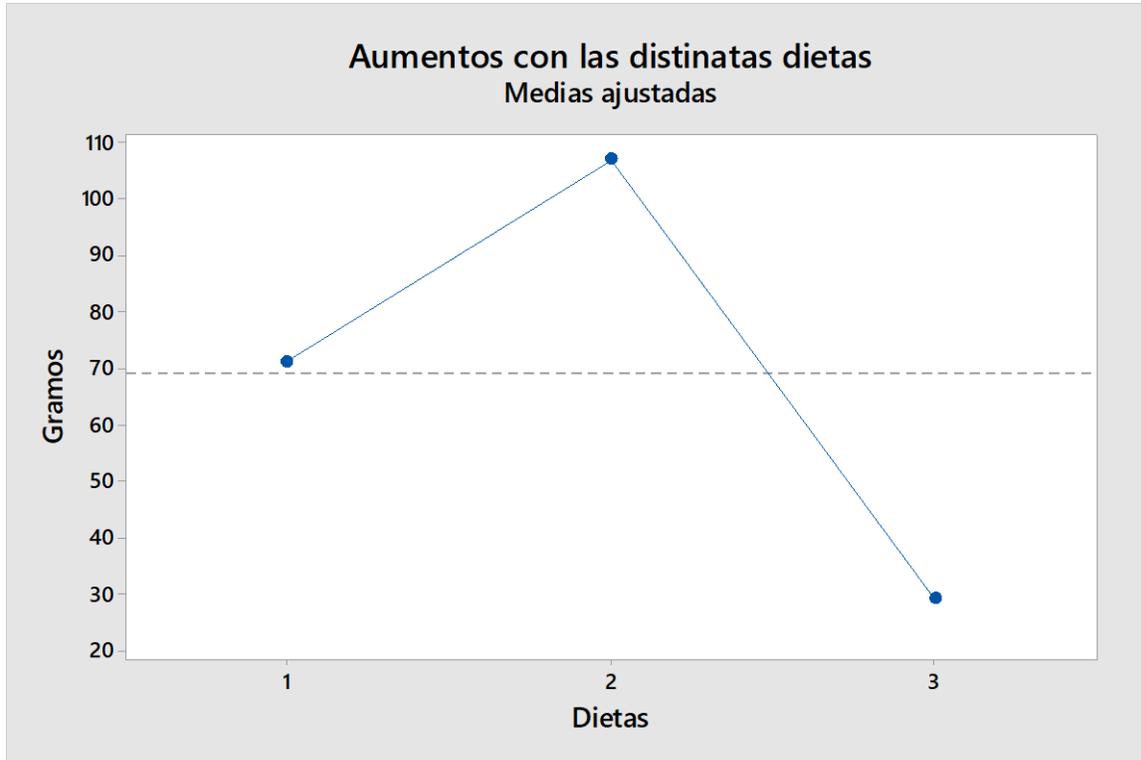
Al ser rechazada nuestra hipótesis nula, procedimos a realizar una prueba de comparación de las tres muestras, logrando identificar que para la prueba LSD, que se presenta enseguida, las dietas tienen un efecto en el peso distinto entre ellas. Como se intuía, la dieta enriquecida crea un aumento mayor debido a que se administra una mayor cantidad de carbohidratos y azúcares en comparación a la primera dieta.

Método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Dietas (diferencias)	N	Media	Agrupación
2	13	106.800	A
1	13	71.123	B
3	13	29.200	C

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Se observa claramente que el aumento promedio con la dieta que incluía la chaya, se tiene un aumento menor comparado con las dietas anteriores. Esto mismo lo podemos ver gráficamente con lo que presentamos a continuación.



CONCLUSIONES

En la primera dieta, los machos presentan un aumento notablemente mayor respecto al de las hembras, con lo cual se puede concluir que el sexo influye en la ganancia de peso con las dietas normales a base de pellets. De manera similar, los machos con dieta enriquecida en grasas saturadas y azúcares también aumentaron considerablemente comparados con las hembras que tomaron la misma dieta.

En la tercera dieta, donde introducimos la chaya como parte de su alimentación y a diferencia de las dos dietas anteriores, el sexo no es un factor relevante en la ganancia del peso. Así mismo, el auxiliar para realizar la infusión de la chaya tampoco representa un efecto significativo en el peso de las ratas Long-Evans.

Podemos confirmar que la aplicación de la chaya para este tipo de animales de laboratorio tiende a disminuir el aumento en el peso de los individuos que son sometidos a una dieta rica en grasas y azúcares.

Debido a las similitudes, en la obtención de peso, entre las ratas Long-Evans y los seres humanos, los resultados contenidos en este artículo dan paso a realizar nuevos estudios en los que se verifique la efectividad de la chaya como método de control en enfermedades con factores alimenticios como la obesidad y la diabetes.

REFERENCIAS

Herrera Díaz, J.L. (2017). Chaya y sus beneficios. 2018, de CONACYT Sitio web:
<http://www.cienciaydesarrollo.mx/?p=articulo&id=69>

Gutiérrez Pulido, H. y De la Vara Salazar, R. (2008). Análisis y diseño de experimentos.
México: McGraw-Hill.

[Programa general](#)

Ponencia de Investigación 4

LAS PLANTAS COMO ALTERNATIVA PARA GENERAR ELECTRICIDAD

Lizeth Ortiz Juárez, Alonso Ávila Devora, Dulce María Reyes Rojas. Asesor: Saúl Nevárez Nieto.

lizeth_ortiz_juarez@hotmail.com, alon.so.12@hotmail.com

dulce_reyes_rojas@hotmail.com, saul_2n@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango
Licenciatura

Plantalámpara, cuadrados latinos, plantas, energía eléctrica, tierra.

En el presente trabajo se realizó una investigación para hacer una reflexión sobre la introducción de plantalámparas en la ciudad de Durango, se midió el nivel de energía eléctrica de las plantas típicas de la ciudad, proponiendo una comparación entre tres distintos tipos de plantas y tierras así como haciendo las mediciones en tres distintas horas del día, dando pie a un estudio estadística con un diseño de cuadrados latinos y, como resultado la elección estadística idónea de la planta que genera el mejor nivel de energía eléctrica determinando la mejor combinación posible entre todas las condiciones establecidas.

Introducción

La investigación registrada en este trabajo se realizó con el fin de dar la mejor propuesta sobre el tipo de planta típica en la ciudad de Durango que nos da el mejor nivel de energía eléctrica junto a una comparación entre tres plantas (maleza, cactácea y pasto), tres tipos de tierras (lodosa, tierra de huizache, arcilla), tres horarios diferentes (8:00 am, 2:00 pm y 8:00 pm), para determinar que combinación arroja mayores niveles de energía eléctrica mediante los factores expuestos, se midió su voltaje con un multímetro haciendo un hincapié en la introducción de las plantalámparas. Este estudio se realizó manejando los datos en un arreglo latino de 3x3 factores.

Marco teórico

Plantalámparas: Es una "batería" ecológica o natural donde para producir energía eléctrica convierte los residuos expulsados por las plantas en el proceso de la fotosíntesis, donde el excedente de materia orgánica de la planta se expulsa a la tierra, los microorganismos liberan electrones que son capturados por los electrodos. Puede proveer de energía a una lámpara. Se diseñó con el fin de llevar a regiones sin luz y con pocas posibilidades de tener energía eléctrica por medio de las tecnologías más comunes. Estas

ayudan a iluminar nuestros hogares, controlar plagas, eliminar fertilizantes, tratar aguas residuales y un sin fin más de posibilidades. (La vanguardia, 2017).

Energía eléctrica: Cuando decimos energía eléctrica nos referimos al producto, al resultado en forma de movimiento que se genera cuando la corriente eléctrica interactúa con el ambiente. Por lo general, asociamos la energía eléctrica con la producción de calor, el funcionamiento de equipos eléctricos (es decir que funcionan con electricidad). También conocemos que la energía eléctrica es aquella que se guarda en una batería y es almacenada para ser utilizada posteriormente. Esta tecnología les permite no depender de una conexión constante con una fuente de energía. (Rayvax, 2017).

Voltaje: Cantidad de voltios que actúan en un aparato o sistemas eléctrico. El voltaje es la capacidad física que tiene un circuito eléctrico, debido a que impulsa a los electrones a lo extenso de un conductor, esto quiere decir, que el voltio conduce la energía eléctrica con mayor o menor potencia, debido a que el voltaje es el mecanismo eléctrico entre los dos cuerpos, basándose a que si los dos puntos establecen un contacto de flujo de electrones puede suceder una transferencia de energía de ambos puntos, porque los electrones son cargas negativas y son atraídas por protones con carga positiva, pero además los electrones son rechazados entre sí por tener la misma carga. (Venemedia, 2014).

Multímetro: Un multímetro es un aparato que se usa para medir el voltaje AC (corriente alterna) o DC (corriente continua), la resistencia, la continuidad de los componentes eléctricos y cantidades pequeñas de corriente en los circuitos. El instrumento permite saber si un determinado circuito tiene voltaje. (Wikihow, 2014).

Medida del voltaje con un multímetro: Coloca el selector del multímetro en su rango más alto para voltios en corriente alterna (AC). Muchas veces se desconoce el voltaje del circuito a medir. Por este motivo, se deberá seleccionar el rango más alto posible para que los circuitos y el movimiento del aparato no se dañen por un voltaje mayor del esperado. (Wikihow, 2014).

Cuadrados latinos: En el diseño en cuadro latino (DCL) se controlan dos factores de bloque y se estudia un factor de tratamientos, por lo que se tienen cuatro fuentes de variabilidad que pueden afectar la respuesta observada, éstas son: los tratamientos, el factor de bloque I (columnas), el factor de bloque II (renglones) y el error aleatorio. Se llama cuadro latino por dos razones: es un cuadro debido a que tiene la restricción adicional de que los tres factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles, y es latino porque se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos o niveles del factor de interés. Sean A, B, C, ..., K, los k tratamientos a comparar, por lo tanto, ambos factores de bloques tienen también k niveles cada uno.

El modelo estadístico para describir el comportamiento de las observaciones está dado por:

$$Y_{ijl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varepsilon_{ijl}$$

Donde:

- Y_{ijl} es la observación del tratamiento l , en el nivel i del factor renglón y en el nivel j del factor columna.
- μ es la media global poblacional.
- $\tau_i, \gamma_j, \delta_l$ son los efectos debido al tratamiento i, j, l respectivamente.
- ε_{ijl} es el error atribuible a dicha observación.

Este modelo es ideal para evitar hacer un muestreo demasiado extenso, y se aplica en casos donde no hay interacción propia entre los factores.

De acuerdo con este modelo, la variabilidad total presente en los datos se puede descomponer como

$$SC_T = SC_{TRAT} + SC_A + SC_B + SC_E$$

Los grados de libertad correspondientes son

$$k^2 - 1 = (k - 1) + (k - 1) + (k - 1) + (k - 2)(k - 1)$$

El ANOVA para el diseño en cuadro latino se muestra en la tabla. En él se prueba la hipótesis sobre los efectos de tratamiento del factor renglón y del factor columna. Otra vez, la hipótesis fundamental es la de los tratamientos; las otras dos proporcionan un adicional al objetivo inicial y permiten comprobar la relevancia de controlar los factores de bloque.

Fuente de variabilidad	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor-p
Tratamientos	SC_{TRAT}	$k - 1$	CM_{TRAT}	$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Renglones	SC_{B1}	$k - 1$	CM_{B1}	$F_0 = \frac{CM_{B1}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Columnas	SC_{B2}	$k - 1$	CM_{B2}	$F_0 = \frac{CM_{B2}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Error	SC_E	$(k - 2)(k - 1)$	CM_E		
Total	SC_T	$k^2 - 1$			

Donde se quiere probar la hipótesis

$$H_{0TRAT}: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$$

Frente a $H_{1TRAT}: \delta_l \neq 0$ para algún l .

Análogamente para los factores A y B:

$$H_{0TRAT}: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = 0$$

Además H_{0A} y H_{0B} se plantean de manera análoga.

Selección y aleatorización de un cuadro latino. No cualquier arreglo de letras latinas en forma de cuadro es un cuadro latino. La regla fundamental es que cada letra debe aparecer sólo una vez en cada renglón y en cada columna. Siempre es fácil construir un cuadro latino estándar: en el que en la primera columna y en el primer renglón aparecen las letras en orden alfabético.

La estrategia de selección y aleatorización recomendada en la práctica es la siguiente:

1. Se construye el cuadro latino estándar más sencillo.

2. Se aleatoriza el orden de los renglones (o columnas) y después se aleatoriza el orden de las columnas (o renglones).

3. Por último, los tratamientos a comparar se asignan en forma aleatoria a las letras latinas.

El cuadro latino tiene dos restricciones a la aleatorización que se deben a los dos factores de bloque, lo cual implica que a la hora de correr el experimento no hay ningún margen de aleatorización. Es decir, se puede correr por columna o por renglón según convenga. (Gutiérrez Pulido, H. y De la Vara Salazar, R., 2008)

LSD:

Mediante este método se prueba la igualdad de todos los posibles pares de medias con las hipótesis

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$

$$H_1: \mu_i \neq \mu_j$$

Para k tratamientos se tiene que el estadístico de prueba para cada una de las hipótesis dados es la correspondiente diferencia en valor absoluto entre sus medias muestrales

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$$

Se rechaza la hipótesis H_0 si ocurre que

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > t_{\frac{\alpha}{2}, I(J-1)} \sqrt{CME \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = LSD$$

Donde n_i y n_j son el número de observaciones para los tratamientos i y j respectivamente la cantidad LSD se llama diferencia mínima significativa. Si el diseño es $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ la diferencia será:

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2}, I(J-1)} \sqrt{\left(\frac{2CME}{n} \right)}$$

En los diseños de bloques estas expresiones se transforman en:

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2}, (I-1)(b-1)} \sqrt{\left(\frac{2CME}{b} \right)}$$

b siendo el número de bloque y $(I-1)(b-1)$ grados de libertad del error.

(Gutiérrez Pulido, H. y De la Vara Salazar, R., 2008)

Planteamiento del problema

Hoy en día el uso de energía eléctrica es indispensable para las actividades de las personas, pero existen casos donde el aislamiento, la falta de instalaciones o la mala posición u olvido por parte de las autoridades influyen en que no llegue la electricidad a distintos lugares. Es por eso que se crean nuevas formas de hacer llegar la energía a todos los lugares, y una de estas formas es la plantalámpara con las que se ha estado experimentando, sin embargo la utilización de plantas en este tipo de proyectos es indispensable y con esto se piensa en que debe haber una adaptación total para que se pueda aprovechar la utilización de energía de

las plantas, pero se debe tomar en cuenta que las plantas utilizadas no se adaptan a todos los lugares, es extremadamente importante que se pueda estudiar el medio ambiente en el que se desarrolla la planta para aprovechar toda la energía eléctrica.

El proceso por el que pasa una planta para poder crear energía eléctrica, es a través de su fotosíntesis, esto quiere decir que las plantas pueden conseguir energía por sí mismo, lo cual beneficia este tipo de proyectos, un aspecto más es que al realizar este proceso las plantas generan desechos que son expulsados hacia la tierra a través de sus raíces y los microorganismos desechados pueden liberar electrones que son capturados por los electrodos.

Es por esto que el uso de plantas que se adapten a la región es de excesiva importancia además de verificar que en los suelos de estas mismas entidades puedan crecer sanas, ante estas situaciones es posible verificar que tanto se puede adaptar una planta a diferentes tipos de suelos.

Se propone hacer este acercamiento a la solución del problema bajo qué condiciones se puede medir el mayor nivel de energía eléctrica producido por las plantas, investigando junto a estos diferentes factores.

La mayor importancia de esta investigación es que su uso en la vida diaria puede favorecer increíblemente, ya que como se dijo puede generar gran impacto en zonas donde no tengan servicio eléctrico, así como una fuente ecológica que no dañe el medio ambiente.

Se decidió escoger los factores que pudiesen ser más significativos para marcar la diferencia. Nuestro factor principal fueron las plantas típicas de la zona ya que son la clave de que se pueda producir la máxima energía eléctrica. Una de ellas fue la maleza ya que este tipo de plantas se encuentran en casi todos los lugares de Durango y se adaptan a condiciones rigurosas dentro de la ciudad es por ellos que otra de las plantas fue el zacate. Así también podemos nombrar a las cactáceas que son adaptables ya que Durango es una zona de clima seco. También se consideró significativo el tipo de tierra que se pudiera encontrar en la ciudad de Durango y donde las plantas estuvieran, los cuales fueron tierra de huizache ya que en la mayoría de las partes de la ciudad es posible encontrarla, la arcilla y lodosa. Otro de los factores fue el horario, ya que la energía solar puede repercutir en las plantas por los procesos de fotosíntesis lo que la hace importante.

La investigación se llevó a cabo en distintas áreas verdes donde se encontraron las plantas típicas (invernaderos, parque Guadiana, tramos próximos a carreteras donde se encuentre vegetación, hogares de la ciudad), las limitaciones del proyecto fueron lugares que estuvieron fuera de la ciudad, y aquellos donde había plantas no endémicas de la ciudad

Con esta investigación se puede dar una conclusión acerca de las plantas en las que se puede considerar estadísticamente un nivel alto de energía eléctrica junto a la combinación de los distintos factores.



Figura 1. De izquierda a derecha: Arcilla, tierra lodosa y tierra de huizache.

Metodología

Para realizar el experimento se extrajeron tres plantas por cada tipo de tierra recolectada (tres tipos) para las distintas combinaciones de planta tierra, estas se dividieron en muestras iguales para usarse en las tres diferentes horas planteadas.

El proceso del experimento fue:

- I. Plantar cada planta en un tipo de tierra regarla y esperar al día siguiente para que la planta se adaptara a la tierra.
- II. Enterrar en cada maceta del experimento dos placas, una de aluminio y otra de cobre para que actúen de ánodo y cátodo, conectar pinzas de caimán para poder conectarlas al multímetro y empezar a medir. Se pueden utilizar las mismas pinzas caimán para todas, solo se tendrían que reconectar en cada placa de cada maceta.
- III. Realizar las mediciones con el multímetro, midiendo el voltaje en los horarios acordados en un solo día (8:00 am, 2:00 pm y 8:00 pm).



Figura 2. Método de medición de la energía. (Cactácea en tierra de maceta o huizache)

Resultados

El muestreo arrojó los siguientes datos:

Medición de Voltaje			
Cactácea	Tierra		
	Roja	Café	Maceta
Mañana	0.56	0.54	0.465
Tarde	0.52	0.555	0.515
Noche	0.535	0.56	0.48

Medición de Voltaje			
Césped	Tierra		
	Roja	Café	Maceta
Mañana	0.415	0.43	0.495
Tarde	0.5	0.475	0.47
Noche	0.38	0.47	0.505

Medición de Voltaje			
Maleza	Tierra		
	Roja	Café	Maceta
Mañana	0.47	0.44	0.475
Tarde	0.48	0.455	0.455
Noche	0.48	0.39	0.485

Se hicieron mediciones de cada una de las combinaciones posibles Planta, Hora del día y Tierra.

Los datos se decidieron ordenar en un arreglo de cuadrado latino de la siguiente forma:

Tabla para cuadrados latinos			
Tierra/Hora	Mañana	Tarde	Noche
Roja	B	C	A
Café	A	B	C
Maceta	C	A	B

Con

A: Cactácea

B: Césped

C: Maleza

Quedando los valores de la siguiente forma:

Tabla para cuadrados latinos			
Tierra/Hora	Mañana	Tarde	Noche
Roja	0.415(B)	0.48(C)	0.535(A)
Café	0.54(A)	0.475(B)	0.39(C)
Maceta	0.475(C)	0.515(A)	0.505(B)

Con estos datos se realizó la siguiente tabla **ANOVA**

Origen	G.L.	Cuadrados	C.M.	Valor f	Valor p	Decisión
A: Tierra	2	0.001439	0.000719	0.18	0.845	Se acepta H_0
B: Hora del día	2	0.000356	0.000178	0.05	0.957	Se acepta H_0
T: Planta	2	0.011172	0.005586	1.42	0.413	Se acepta H_0
Error	2	0.007872	0.003936			
Total	8	0.020839				

Como en los tres casos se acepta la hipótesis nula de que los efectos de los factores sean cero, no es necesario realizar la prueba LSD a cada factor para determinar cuáles de los posibles diferentes pares de medias pudiesen resultar iguales estadísticamente, determinando con ello una jerarquía de los niveles en cada tratamiento de mejor a peor, ya que ya se sabe el hecho de que no importa cual combinación usemos no existe ninguna mejor que otra puesto que estadísticamente todas son iguales. Al realizar la prueba LSD mediante el programa Minitab® se da el resultado antes previsto:

Comparaciones por parejas de Fisher: Tierra

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Tierra	N	Media	Agrupación
Maceta	3	0.498333	A
Roja	3	0.476667	A
Café	3	0.468333	A

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Comparaciones por parejas de Fisher: Hora del día

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Hora del día	N	Media	Agrupación
Tarde	3	0.490000	A
Noche	3	0.476667	A
Mañana	3	0.476667	A

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Comparaciones por parejas de Fisher: Planta

Agrupar información utilizando el método LSD de Fisher y una confianza de 95%

Planta	N	Media	Agrupación
A(Cactácea)	3	0.530000	A
B(Césped)	3	0.465000	A
C(Maleza)	3	0.448333	A

Las medias que no comparten una letra son significativamente diferentes.

Así pues, queda confirmado que no existe una diferencia entre ninguno de los factores.

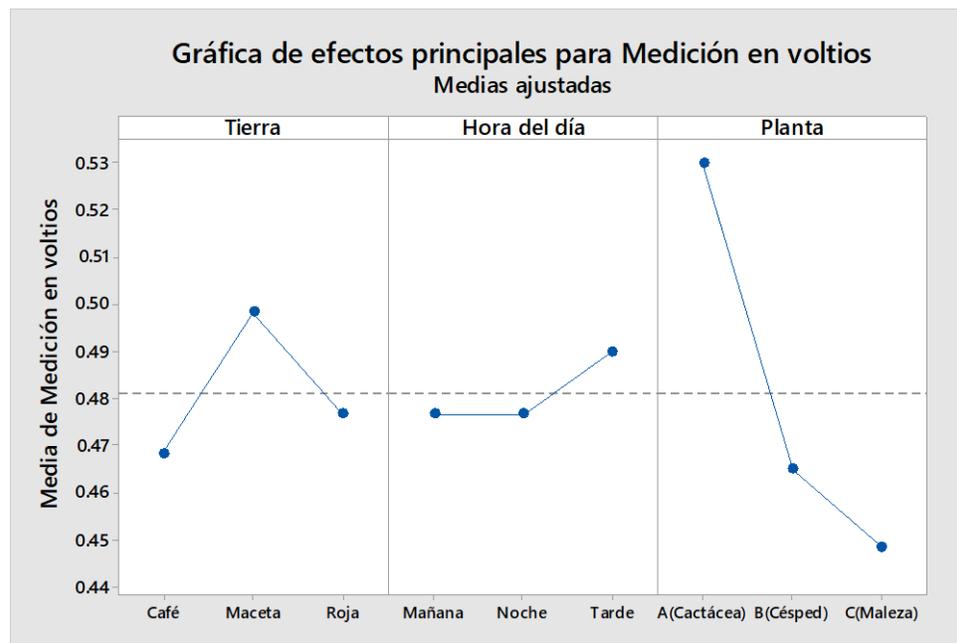


Figura 3. Gráfica de resultados del experimento

Conclusión

Al no haber una diferencia significativa en la energía eléctrica producida por las diferentes plantas, en diferente tipo de tierra y a distintas horas del día, se llega a la conclusión de que cualquiera de estas combinaciones puede ser utilizada como una fuente de energía alternativa para su uso común.

Ya que podemos escoger cualquier opción, podríamos optar por tomar la combinación de los singulares con mayor medición de cada factor, es decir plantar la cactácea en la tierra de maceta y usar su energía a las 14:00 horas. Aunque significativamente no importe cual combinación se use.

Si bien, las plantas del experimento no presentan una medición muy alta, cabe destacar que es posible enlazar en el mismo circuito eléctrico más de una planta, resultando así la suma del voltaje y por ende una mayor cantidad de energía utilizable.

Ahora, si esto se hace en lugares con mucha vegetación, como parques, viveros, jardines, etc., podría usarse la energía producida para cargar aparatos electrónicos, iluminar un lugar o simplemente llevar energía a lugares de difícil acceso.

Referencias

Gutiérrez Pulido, Humberto; De la Vara Salazar, Román. (2008). *Análisis y diseño de experimentos*. Ciudad de México, México. McGraw-Hill.

Universidad de Ingeniería y Tecnología. (2014). "Plantalámparas": Plantas que dan luz. Recuperado en Mayo 2018, de UTEC Sitio web: <https://www.utec.edu.pe/plantalamparas-plantas-que-dan-luz>

WIKIHOW. (2014). Como usar un multímetro. Recuperado en Mayo 2018, de Wikihow Sitio web: <https://es.m.wikihow.com/usar-un-multímetro>

¿Don cómo?. (2017). ¿Cuáles son los productos de la fotosíntesis?. Recuperado en Mayo 2018, de © DonCómos Sitio web: <https://jardin.doncomos.com/productos-fotosintesis>

La vanguardia. (Enero 2017). Las plantas también pueden ser fuente de electricidad. Mayo 2018, de © La Vanguardia Ediciones Sitio web: <http://www.lavanguardia.com/natural/20170118/413415278331/planta-electricidad.html>

Rayvax. (Noviembre 2017). Definición de Electricidad. Mayo 2018, de © Rayvax Sitio web: <https://www.articulosinstantaneos.com/definicion-de-electricidad/>

Venemedia. (Octubre 2014). Definición de Voltaje. Mayo 2018, de ©2014 Venemedia Sitio web: <http://conceptodefinicion.de/voltaje/>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 1

INTEGRALES ELÍPTICAS

Salma Celeste Hernández Ibarra, Martin H. Pulido Castañeda. Dr. Ricardo Bello Aguirre
s.celeste.h@gmail.com, martinpulido15@gmail.com
 Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango
 Cálculo Integral y Diferencial

En la clase de cálculo IV se llevó el tema de las integrales de línea, las cuales se pueden utilizar para calcular la longitud de una curva en el espacio. Entre ellas tenemos la integral curvilínea de un campo escalar, la cual se define como:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\gamma) \|\gamma'(t)\| dt$$

Donde γ que pertenece al intervalo $[a, b]$ es la parametrización de la curva C .

Uno de los problemas con los que se quiso trabajar fue encontrar el área de la pared de una alberca elíptica, entonces se utilizó la herramienta, mencionada anteriormente, y ésta resultó en una integral diferente a todas las previamente estudiadas.

Pero ¿Que la hace diferente a las integrales con las que se trabaja usualmente?

A principios del siglo XVII con cálculos de longitudes de arco de ciertas curvas, principalmente de elipses. Aparte de la elipse, un ejemplo muy interesante es la lemniscata de Bernoulli con ecuación:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

La cual tiene una longitud de arco dada por una integral de la forma:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Fue a partir de ésta integral que el matemático italiano Fagnano tomó interés por este tema, seguido de Euler. Y ambos obtuvieron teoremas de adición para estas integrales y otras de forma más general.

Después de Euler, Legendre trabajó por muchos años en el desarrollo de la teoría de las integrales elípticas. Él resumió los resultados de sus estudios en el libro “*Ejercicios en Cálculo integral*” (*Exercices de calcul intégral*), publicado en 1811-1819. Una versión revisada se emitió en 1827-1832 bajo el nombre “*Tratado sobre funciones elípticas e integrales de Euler*” (*Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*). Legendre llamó *funciones elípticas* a lo que ahora se le llama *integrales elípticas*.

Una integral elíptica es aquella de la forma:

$$\int \frac{A(x) + B(x)\sqrt{S(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}} dx$$

ó

$$\int \frac{A(x) dx}{B(x)\sqrt{S(x)}}$$

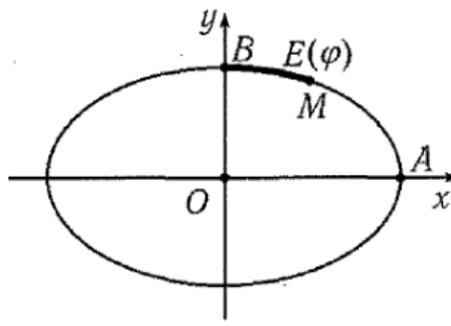
Donde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$ son polinomios en x , y $S(x)$ es un polinomio de grado 3 o 4. De manera más simple, una integral elíptica es aquella de la forma:

$$\int R(w, x) dx$$

Donde $R(w, x)$ es una función racional de x y w , w^2 es una función de x que es cúbica o cuadrática en x , $R(w, x)$ contiene al menos una potencia impar de w , y w^2 no tiene factores repetidos.

La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser parametrizada por las fórmulas. El diferencial dl de la longitud de la $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ elipse es igual a $\sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$. Si $a = 1$ y $b = \sqrt{1 - k^2}$, entonces $dl = d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$. En este caso la longitud de arco de la elipse entre el punto final del eje más largo A, y el punto $M = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ es igual a

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$



Por lo tanto, la longitud de arco de la elipse puede expresarse en términos de una integral elíptica del segundo tipo. Ésta es precisamente la razón por la que la integral es llamada “elíptica”.

Bibliografía

Prasolov, V. V., & Solovyev, I. P. (1998). *Elliptic functions and elliptic integrals*. American Mathematical Society.

Weisstein, Eric W. "Elliptic Integral." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegral.html>

Hancock, Harris. (1917). *Elliptic Integrals*. Mathematical Monographs

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 2

EL PROBLEMA DEL PASTEL Y SU GENERALIZACIÓN

José Enrique Mata Vázquez. Dra. Alejandra Soria Pérez

enrique_mata96@outlook.com

Facultad de Ciencias Exactas

TOPOLOGÍA

El propósito del siguiente trabajo será definir el problema de pastel, así como las definiciones que se utilizaran para resolverlo. Los conocimientos previos que se utilizarán y que se darán por hecho que ya son conocidos serán tales como continuidad, conjuntos acotados, conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

Ahora definimos uno de los problemas del pastel.

Problema del pastel.

Supongamos que se tienen dos pasteles en una bandeja; demostrar que es posible cortarlos ambos exactamente por la mitad con un solo golpe del cuchillo.

Para resolver los problemas necesitaremos introducir la teoría sobre el teorema del valor medio.

1.1 Lema. Si $f: I \rightarrow R$ es una función continua y I el intervalo $[1,1] \in R$, tal que el producto $f(0)f(1)$ es finito y no positivo, entonces existe un punto $t \in I$ tal que $f(t) = 0$.

1.4 Corolario. Supongamos que $f: I \rightarrow I$ es una función continua; entonces existe siempre algún punto $t \in I$ tal que $f(t) = t$.

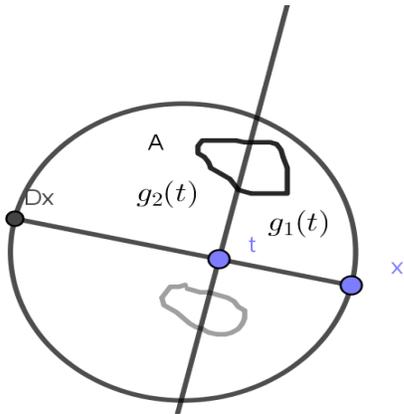
1.5 Corolario. Toda función continua de una circunferencia en la recta real manda por lo menos un par de puntos diametralmente opuestos en el mismo punto.

Con lo anterior ahora enunciamos el siguiente teorema

1.5 Teorema. Sean A y B subconjuntos acotados en el plano euclidiano. Entonces existe una recta en el plano que divide cada región exactamente en dos partes de igual área.

Demostración. Sea S una circunferencia con centro $(0,0) \in R^2$ que contenga a A y a B veremos estos dos conjuntos como los dos pedazos de pastel. Mediante un cambio de escala podemos suponer que S tiene diámetro 1. Para cada $x \in S$ consideremos el diámetro D_x de S que pasa por x y sea L_x la recta perpendicular a D_x que pasa por el punto de D_x que se encuentra a distancia t de x , nótese que por el cambio de escala $t \in I$.

Denotemos por $g_1(t)$ el área de la parte de A que está situada en el semiplano que contiene a x . Designemos por $g_2(t)$ el área de la otra parte. Está claro que g_1 y g_2 son aplicaciones de $I \rightarrow R$.



Definamos

$$f(t) = g_2(t) - g_1(t).$$

Es una función continua que satisface $f(0) = -f(1)$, es decir $f(0)f(1) \leq 0$. En virtud del lema sabemos que existe algún punto $t \in I$ tal que $f(t) = 0$. Este punto no tiene por qué ser único. Puesto g_2 y $-g_1$ son funciones decrecientes, también lo es $f = g_2 - g_1$. Así pues, se tiene $f(t) = 0$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ o en un único punto c . En el primer caso pongamos $h_A(x) = \frac{1}{2}(a + b)$, y en el segundo $h_A(x) = c$, donde, la recta perpendicular a D_x que pase por el punto de D_x se encuentra a la distancia $h_A(x)$ de x y bisecta el área de A a. Obsérvese que

$$h_A(-x) = 1 - h_A(x).$$

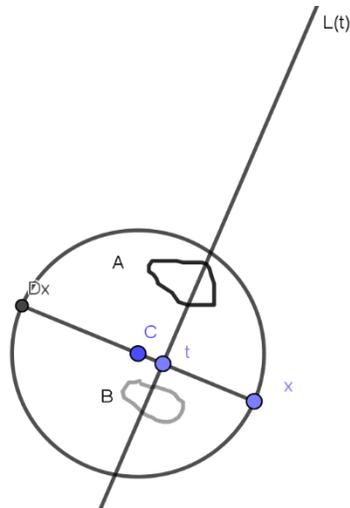
Nótese también que $h_A: S \rightarrow I$ es una función continua.

De forma análoga definimos una función $h_B: S^1 \rightarrow I$ usando B en lugar de A . Definimos ahora $h: S^1 \rightarrow R$ por

$$h(x) = h_A(x) - h_B(x).$$

Que es continua ya que h_A y h_B lo son. Entonces, para todo $x \in S^1$ tenemos $h(x) = -h(-x)$. Pero, en virtud del corolario, existe algún punto $y \in S^1$ tal que $h(y) = h(-y)$. Así pues,

$h(y) = 0, h_A(y) = h_B(y)$ Y la recta perpendicular a D_y que pasa por el punto de D_y que está a una distancia $h_A(y)$ de y bisecta el área de A y el área de B .



Nótese que también se cumple el siguiente teorema

1.6 Teorema. Sean A , B y C subconjuntos acotados de R^3 . Existe entonces un plano de R^3 que divide cada región exactamente en dos partes de igual volumen.

En general se cumple el Teorema de Borsuk-Ulam

1.7 Teorema de Borsuk-Ulam. Cualquier función continua en una n -esfera en el espacio euclidiano de n -dimensión hace corresponder algún par de puntos antipodales al mismo punto, es decir

Si $f: S^n \rightarrow R^n$ es continua entonces existe un $x \in S^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Bibliografía

Kosniowski, C. (1986). *Topología Algebraica*. Barcelona, España: EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 3

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DEL CÁNCER: APORTACIONES PARA SU ESTUDIO

Celene Yajahira Conde Ramírez, Brandon Soto Salas
celeneconde15@gmail.com, bsoto112796@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas
 Matemáticas Aplicadas

INTRODUCCIÓN

Aunque desde tiempos muy remotos al hombre le ha interesado medir y explicar matemáticamente los fenómenos biológicos que ocurren a su alrededor, no fue sino hasta el siglo pasado que se estableció la biología matemática como una rama de las matemáticas,

cuyo principal fin es describir los procesos biológicos por medio de herramientas matemáticas y computacionales para poder entender su fenomenología por medio de otro enfoque y, en algún momento, hacer aportaciones al área biológica. En los últimos años, el interés por aplicar técnicas matemáticas en la modelización y el análisis de procesos biológicos se ha visto incrementado, ya sea en aquellos que ocurren en la naturaleza en general, o los que se producen en el cuerpo humano en particular. Los modelos matemáticos se basan en ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, procesos estocásticos, autómatas celulares, algoritmos genéticos, entre otros, y se están convirtiendo en una herramienta rompedora en la investigación oncológica.

Para ello, se deben seleccionar aquellas variables que se consideren más adecuadas y reflejen lo máximo posible la realidad. Por tanto, la modelización matemática nos permite el análisis de problemas biológicos, posibilitando el desarrollo y la comprobación de hipótesis que puedan conducir a una mejor comprensión de los mismos, aunque de una forma simplificada y exenta de la complejidad del mundo real. El proceso de modelización no es un proceso lineal. Por un lado, se tiene la realidad biológica, o en este caso “realidad médica”, luego unos datos en forma de variables y , por otro lado, un proceso gradual de abstracción por el cual, mediante la elaboración de hipótesis, aproximaciones y teorías, se llega a la construcción de un modelo que refleja el fenómeno biológico. Posteriormente, se desarrolla, analiza y estudia el modelo para obtener un comportamiento y unos datos teóricos, que nos permiten tomar decisiones, en este caso en el aspecto terapéutico junto con los médicos. Es importante resaltar que un modelo nunca debe sustituir la parte experimental, ya que los datos experimentales son precisamente la fuente de riqueza del modelo y, además, permiten su validación. La investigación necesita de ambos para comprender y tratar de controlar sistemas y procesos tan complejos como los biológicos.

Es evidente que las posibles barreras iniciales de comunicación entre las matemáticas y la medicina se están rompiendo gracias a los avances en los estudios de oncología matemática, lo que está haciendo crecer la esperanza de que nuevos tratamientos contra el cáncer están a la vuelta de la esquina.

En la literatura existen numerosos modelos matemáticos que intentan describir procesos que ocurren durante el desarrollo del cáncer, algunos de estos describen:

- El crecimiento de tumores cancerosos
- La respuesta del sistema inmune a la presencia de células cancerosas en el cuerpo.
- El movimiento de las células cancerosas y su propagación en el organismo.
- Control de crecimiento de tumores, modelos de vascularización o angiogénesis de los mismos.
- El efecto de la medicación en cualquiera de estos procesos y las formas óptimas de la administración de fármacos.
- El estudio de la resistencia a múltiples drogas (MDR).

Por lo dicho anteriormente, es misión imposible obtener un modelo universal válido para todos los cánceres o para todo el desarrollo de un tipo de cáncer. Se pueden estudiar modelos simplificados que se centren en aspectos particulares.

CARACTERÍSTICAS DEL CÁNCER

Ya en el comienzo del estudio de esta enfermedad, en 1838, se describió que el tejido canceroso estaba conformado por células con morfología alterada, y se postuló que la causa

de esta enfermedad yacía en lesiones celulares. El cáncer es considerado como un desorden de células que se dividen anormalmente, lo que conduce a la formación de agregados que crecen dañando tejidos vecinos, se nutren del organismo y alteran su fisiología. Además, estas células pueden migrar e invadir tejidos lejanos donde encuentran un nicho apropiado para continuar su crecimiento originando una metástasis que en muchas ocasiones es la causa de muerte de los individuos afectados.

Actualmente, se trata de una de las principales causas de mortalidad en todo el mundo. Por este motivo, se están llevando a cabo numerosos estudios para comprender mejor su comportamiento en el organismo y poder combatirlo de manera eficaz.

Todas las células de nuestro cuerpo siguen un mecanismo controlado de división y muerte celular. Además, nuestro organismo posee un sistema de “detección de errores” que reconoce cualquier fallo o mutación en la célula, activando un mecanismo de reparación o, en última instancia, induciendo la muerte celular. Sin embargo, los mecanismos de control celular pueden verse modificados por varios factores, lo que le permite a la célula dañada continuar su división dando lugar a células hijas cancerosas con capacidad de dividirse de forma incontrolada.

Como nuestro organismo está constituido por más de un centenar de tipos celulares distintos, cabe destacar que existen más de cien tipos de cáncer. Esta variedad complica enormemente el estudio de la enfermedad, así como su comprensión y tratamiento, convirtiéndola en uno de los mayores retos de la medicina actual. Su elevada morbilidad y mortalidad convierten al cáncer en una de las enfermedades más temidas del siglo XXI. Según una nota descriptiva publicada por la Organización Mundial de la Salud (OMS) en Febrero de 2015, el cáncer es una de las principales causas de mortalidad en todo el mundo.

Debido a esta gran variedad celular existente en el organismo, las características distintivas del cáncer son proporcionadas por el tejido de origen del mismo. Aproximadamente el 85% de los cánceres se producen en las células epiteliales y son clasificados como carcinomas. Los cánceres derivados de las células del mesodermo, como las que constituyen los huesos y los músculos, se llaman sarcomas, mientras que los cánceres del tejido glandular, como la próstata, se conocen como adenocarcinomas. Los tumores no sólidos son conocidos generalmente como cánceres de la sangre, llegando a afectar a los componentes sanguíneos, a la médula ósea y al sistema linfático, siendo ejemplos de ello las leucemias o linfomas.

El proceso de desarrollo del cáncer se conoce con el nombre de carcinogénesis y se trata de un proceso de varias etapas en el que se han identificado diez capacidades biológicas conocidas como hallmarks o sellos distintivos del cáncer. Se ha sugerido que la mayoría, si no todos, los tipos de cáncer adquieren el mismo conjunto de capacidades funcionales (hallmarks) durante su desarrollo, aunque su adquisición puede aparecer en diferentes fases del mismo. Los sellos distintivos del cáncer, incluyen el mantenimiento autosuficiente de la señalización proliferativa, la evasión de las señales supresoras del crecimiento y la resistencia a la muerte celular, lo que les confiere la inmortalidad replicativa.

Además, se induce el desarrollo de una nueva red de vasos sanguíneos, proceso conocido como angiogénesis, y la invasión a otros tejidos, conocida como metástasis. Subyacente a estas señales de identidad se encuentran la inestabilidad del genoma, que genera la variabilidad genética que acelera su desarrollo, y la aparición de procesos inflamatorios, asociados al daño tisular y a la regeneración. El progreso conceptual realizado en la última

década ha permitido añadir a la lista dos características (hallmarks) emergentes, como son la reprogramación del metabolismo energético y la evasión del sistema inmune.

Además de las células cancerosas, los tumores muestran otra dimensión de complejidad, ya que contienen un repertorio de células reclutadas, aparentemente normales, que contribuyen a la adquisición de los rasgos distintivos mediante la creación del microambiente tumoral. El ambiente extracelular proporciona una selección clonal y modula la angiogénesis, la invasión celular y la metástasis, controlando así el crecimiento del tumor y su propagación independientemente de la genética de los clones del cáncer.

¿QUÉ ES UN MODELO MATEMÁTICO?

Un modelo matemático es un tipo de modelo científico que emplea términos matemáticos para expresar hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre éstos con el objetivo de estudiar comportamientos de sistemas complejos ante situaciones difíciles de observar en la realidad.

Toda modelización supone una mera imitación de la realidad, lleva consigo una cierta “idealización” o simplificación de los problemas reales. La modelización matemática es el arte de traducir problemas a un destino más aplicable a partir de funciones matemáticas tratables cuyo análisis numérico y teórico proporciona una visión, respuestas y orientaciones útiles para la aplicación de origen.

Sin embargo, el problema inicial y más complejo es desarrollar los modelos matemáticos que describan el comportamiento de los tumores y permitan aplicarlos a la vida real.

Los elementos esenciales para que un modelo sea útil y realista son:

- La buena comprensión y apreciación del problema biológico.
- La representación matemática realista de la importancia del fenómeno biológico.
- Encontrar soluciones útiles, preferiblemente cuantitativas.
- La interpretación biológica de los resultados matemáticos en términos de conocimientos y predicciones.

Es de suma importancia para el modelado matemático que cada una de las variables implicadas en la formulación matemática pueda ser considerada individualmente o en conjunto para valorar su relevancia en el problema biológico y que sea capaz de sugerir hipótesis o conclusiones que puedan ser comprobadas biológicamente. En comparación con los resultados de la vida real, el modelo puede ser modificado para emular una mayor precisión sobre los fenómenos.

En algunos campos de la ciencia, la investigación va dirigida en conocer el desarrollo de algunos fenómenos de la naturaleza. Para ello, se estudia el comportamiento, sus consecuencias y fines, según los parámetros que intervienen en dichos fenómenos reales, pudiendo realizar simulaciones de ellos. Esto lleva a reemplazar dicho fenómeno real por otro simulado, simple y que pueda ser manipulado. Por lo tanto, podemos definir un Modelo Matemático como una construcción matemática abstracta y simplificada relacionada con una parte de la realidad y creada para un propósito en particular.

Con la elaboración de modelos matemáticos se persiguen fundamentalmente los siguientes objetivos en lo que se refiere al cáncer:

- Desarrollar una herramienta que permita decidir o predecir sobre futuras situaciones de distintas enfermedades.
- Comprender los mecanismos de actuación de distintas poblaciones celulares.
- Entender mejor la realidad del proceso considerado y su evolución.
- Determinar la prevalencia (importancia del proceso) e incidencia (velocidad de propagación).
- Decidir un sistema de control del proceso detectado (optimización del tratamiento). Para lograr estos objetivos, un modelo debe cumplir una serie de requisitos que lo harán válido y, por tanto, útil para explicar el proceso:
- Incluir todos los factores que influirán de algún modo en el proceso.
- Ser sensible a los parámetros importantes e insensible a los parámetros irrelevantes.

Por otro lado, el desarrollo de un modelo matemático supone desarrollar una serie de fases:

1. **Formulación del modelo:** implica el diseño del modelo a nivel teórico, de acuerdo a la información que conozcamos acerca del proceso observado. En esta fase lo realmente importante es decidir “qué se desea modelar y por qué”, lo que supondrá definir cada elemento que lo integra así como las relaciones entre ellos.
2. **Verificación:** el objetivo en esta fase es comprobar si el modelo realiza lo que se piensa que debe hacer. Para ello se diseñan pruebas, como por ejemplo a un caso teórico que se conozca bien.
3. **Validación:** se trata de aplicar el modelo a un caso real conocido para ver si es correcta su formulación.
4. **Análisis de Sensibilidad de los parámetros:** en esta fase se trata de modificar los datos correspondientes a los factores importantes para ver cómo varían los resultados con el modelo.
5. **Aplicación:** una vez completadas las fases anteriores, podemos aplicar el modelo a la situación que queremos estudiar y analizar los datos obtenidos. El análisis de estos resultados nos va a proporcionar, por ejemplo, datos de interés sobre la enfermedad que queremos estudiar.

Aunque la evolución de un sistema cancerígeno está limitada y condicionada a parámetros químicos y biológicos, su diseminación a través de los tejidos y órganos contaminados obedece a diversas reglas deterministas o estocásticas, las cuales se pueden modelar utilizando herramientas matemáticas y condicionamientos físicos.

EJEMPLOS DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL CRECIMIENTO TUMORAL

Se plantean diversos modelos que utilizan ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), ecuaciones diferenciales parciales (EDP), modelos estocásticos discretos, estadísticos y de análisis numérico. Existen trabajos alrededor de este tema que muestran, por un lado, resultados referidos a tratamientos particulares con modelos no generalizados, y por otro, estructuras funcionales que permiten la aplicabilidad a diversos tipos de cáncer. Sin embargo, hoy en día se carece de un modelo que proporcione una predicción y caracterización del comportamiento para el crecimiento de tumores cancerosos en sus múltiples formas y para cualquier tipo de población, teniendo en cuenta, que los modelos

existentes funcionan bajo condiciones ideales y con poblaciones específicas, científicos de diferentes áreas han desarrollado modelos para el tratamiento de la dinámica del crecimiento tumoral. Modelos provenientes de diversos campos como la matemática aplicada, la estadística, la ciencia computacional, la ciencia de materiales, la mecánica de fluidos, la dinámica poblacional, la evolución y la teoría del juego han sido desarrollados.

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Este modelo supone una población de células cancerosas con igual potencial de crecimiento. Se aplica a problemas de estabilidad y permanencia de sistemas donde se tiene una población biológica compitiendo por recursos. La EDO describe la competición entre organismos como un cambio en la función de saturación.

El número de células en un tiempo t depende de la tasa de crecimiento y está asociado con la capacidad de transporte, que es el tamaño máximo de la población que se puede alcanzar, definida por el nutriente suplido y las restricciones espaciales. La solución a esta ecuación es la curva sigmoideal.

Ecuaciones diferenciales parciales

Este método es una herramienta muy usada en el estudio del crecimiento de tumores y la forma en que se difunden sobre los tejidos que los rodean. En la utilización de estas ecuaciones se supone un sistema descrito bajo un comportamiento mecánico, donde el sistema puede ser un fluido o una mezcla entre líquido y sólido (los fluidos son normalmente los nutrientes). Se presentan fenómenos de difusión y transporte de nutrientes teniendo en cuenta efectos de concentración, tamaño y velocidad de células. En este modelo se aplican condiciones iniciales y de frontera que están relacionadas con el tamaño, la permeabilidad del medio, la geometría y las dimensiones del sistema. Anderson y Chaplain plantearon una EDP para describir la dinámica de la densidad de células endoteliales (EC) que migran a través de un tumor y forman estructuras neovasculares en respuesta a una señal química específica conocida como factor angiogénico del tumor (TAF).

Modelo discreto, autómatas celular

La estructura del modelo está basada en una región del espacio discreta (rejilla cuadrada), donde coexisten unas determinadas especies celulares. La dinámica de crecimiento está definida por algunas reglas de interacción a lo largo de los nodos y entre los vecinos de cada celda. Las reglas pueden ser determinísticas o estocásticas, estas últimas son dictaminadas por procesos aleatorios con inclusión de probabilidades. Cada punto de la rejilla puede representar una célula individual o un grupo de células. En una red de autómatas el estado de una célula dentro de la región depende de las reglas definidas, del estado de los vecinos y de su propio estado en la generación anterior. Un ejemplo básico de autómatas celular es una rejilla en dos dimensiones, con puntos nodales $X_{i,j}$ donde i y j son las dimensiones de la cuadrícula. Se empieza con una población inicial, que se actualiza en cada paso de tiempo bajo unas determinadas reglas de muerte y reproducción. Los modelos de autómatas celular usados para describir sistemas reales son más complejos y tienen en cuenta factores biológicos que caracterizan la difusión y crecimiento del tumor. El modelo de autómatas celular en tres dimensiones describe el crecimiento de un tumor cerebral. En él se incorporan dos tipos de células proliferativas y no proliferativas, que requieren para su evolución de dos cuadrículas una isotrópica y otra adaptable.

Modelo estocástico

Muchos fenómenos biológicos son gobernados por variables aleatorias, y requieren de un modelo que involucre procesos al azar. Según este modelo no se puede predecir con exactitud el estado de un sistema en un tiempo dado pero se logran predecir ciertas tendencias bajo las cuales este sistema evoluciona paulatinamente de tal manera que para experimentos repetidos se encuentran resultados similares pero no idénticos. El proceso de Moran es un modelo estocástico simple el cual describe el comportamiento de una población basado en una dinámica de nacimiento y muerte. Aquí se considera una población de tamaño N , con células sanas y mutadas. En cada paso de tiempo un individuo A es seleccionado aleatoriamente para su reproducción. Debido a esto, otro individuo B es seleccionado para morir. La descendencia de A reemplaza a la célula muerta B , manteniendo a N constante. Así pues el proceso de Moran describe la evolución estocástica de una población finita de tamaño constante. Se supone que todos los individuos residentes son idénticos y se introduce un mutante que tiene un fitness r (el término fitness, se refiere a la aptitud en el contexto biológico, que es el valor adaptativo que tiene un organismo para poder pasar los genes a futuras generaciones y que sus descendientes puedan nacer y sobrevivir), mientras que el de los residentes es 1, es decir, que los mutantes pueden ser menos o más aptos para sobrevivir que sus predecesores. Los únicos estados estables posibles en el proceso de Moran son o todos mutantes o todos residentes. Komarova describe comportamientos celulares de organismos adultos como un modelo simple que tiene como característica una población constante. Otros modelos proponen además poblaciones en continuo crecimiento o decadencia continua hasta su extinción, como es el caso del proceso one-hit o el two-hit.

Modelo estadístico

Este modelo es utilizado en procesos donde las múltiples etapas de la carcinogénesis se presentan como una serie de procesos estocásticos con eventos mutacionales y de expansión de clones. Para este modelo se proponen una serie de variables como tasas de mutación, tasas promedio de expansión de clones por etapa y número de etapas. La probabilidad de desarrollo de cáncer para una cierta edad es calculada, usualmente por simulaciones numéricas, como una función de todos los parámetros desconocidos. El resultado de tales cálculos para cada conjunto de parámetros es comparado con los datos existentes de la incidencia de cáncer, donde se identifica el conjunto de parámetros que mejor se ajuste. Trabajos en los que se analizan curvas de incidencia y muerte con la edad muestran diferentes curvas con las fluctuaciones estadísticas de las muertes a causa del cáncer por año, se destacan las diferencias entre el cáncer a edades tempranas y después de los cuarenta años.

CONCLUSIONES

La modelización matemática es indispensable en numerosas aplicaciones y una enorme ventaja es la cantidad de tiempo ahorrada a la hora de simular escenarios en lugar de tener que recrearlos en el laboratorio y, con ello, exponer predicciones sobre el mundo real.

Así, los modelos matemáticos pueden utilizarse para el diseño de estrategias que eviten o limiten la extensión de subpoblaciones celulares cancerígenas resistentes al tratamiento. Por tanto, si validamos y optimizamos el modelo, este nos permite averiguar sin necesidad de experimentos clínicos mucha información sobre el comportamiento de los procesos del tumor, como la migración de celular o angiogénesis, así como saber aspectos sobre la

terapia. Por ejemplo, en la práctica clínica existen pacientes que, a pesar de presentar el mismo tipo de cáncer y habersele aplicado el mismo tratamiento quimioterapéutico, recaen en la enfermedad e incluso padecen mayor gravedad, lo que refleja que el tratamiento no ha sido eficiente. Haciendo uso de la modelización matemática, será posible predecir a qué enfermos hay que aplicar un tratamiento más agresivo para conseguir la remisión de la enfermedad. Esto mejorará la situación del paciente y optimizará los recursos económicos y materiales, pues la “medicina personalizada” evitará la sobredosis de aquellos pacientes que necesitan un tratamiento más leve. Así será posible destinar más recursos a aquellos casos graves que necesitan una dosis más agresiva para eliminar la enfermedad, lo que conllevará a un aumento de la supervivencia.

En los últimos años, se ha observado una convergencia entre las predicciones de los modelos y el creciente número de publicaciones en revistas biomédicas relacionadas con la modelización matemática, además de un aumento en el interés por parte de la comunidad biomédica en el uso de los modelos matemáticos como herramienta complementaria. Por este motivo, se considera que los modelos matemáticos son importantes para el desarrollo de aplicaciones, haciendo matemáticas de calidad para materializar problemas concretos.

En resumen, la finalidad del uso de modelos matemáticos aplicados a la oncología es utilizar los resultados con el fin de mejorar los tratamientos oncológicos actuales y recaudar hipótesis que puedan ser probadas por los médicos y biólogos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Jair Zapata Peña. J, Alba cristina Ortiz P. (Julio - Diciembre de 2010). Uso de modelos matemáticos para la descripción del crecimiento de tumores cancerosos. MAYO DE 2018, de NOVA - Publicación Científica en Ciencias Biomédicas. Sitio web: http://www.unicolmayor.edu.co/invest_nova/NOVA/NOVA14_ARTORIG2.pdf

Lucía Olvera Collantes. (Julio de 2016). Estudio y desarrollo de modelos matemáticos de resistencia celular a la quimioterapia. Mayo de 2018, de FACULTAD DE CIENCIAS, GRADO EN BIOTECNOLOGÍA. Sitio web: <http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/18462/TFG%20Luc%C3%ADa%20Olvera%20Collantes.pdf?sequence=1>

Ana Álvarez Suárez. (Abril, 2013). MODELIZACIÓN. COMPUTACIÓN Y MATEMÁTICAS CONTRA EL CÁNCER. Mayo, 2018, de Universidad de Alcalá Sitio web: <http://www3.uah.es/libretics/concurso2013/files2013/Trabajos/Modelizacion%20Matematica.pdf>

Robbins y Cotran. (2010). Patología Estructural y Funcional. Barcelona, España: Elsevier.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 4

¡NO TE HAGAS NUDOS CON LOS NUDOS!

Erik Assael Beltrán Hernández. Dra. Yaziel Pacheco Juárez, Lic. Isaac Mejía Hernández.

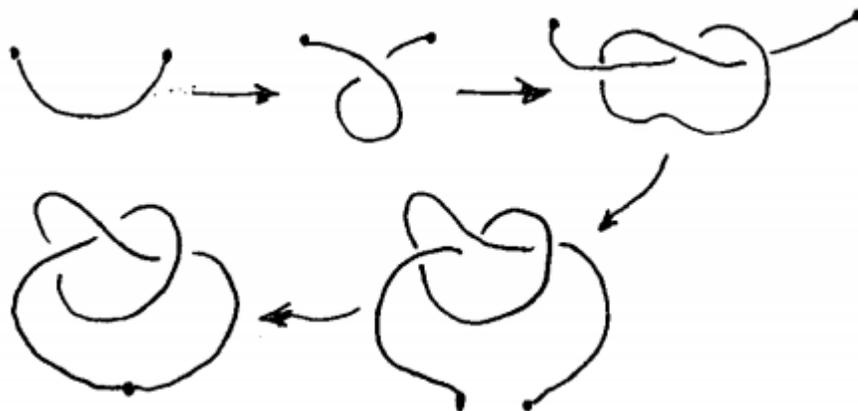


erick_behe@hotmail.com
Facultad de Ciencias Exactas de la UJED.
Topología.

¿Qué es un nudo?

Para comprender qué es un nudo y su definición formal matemáticamente hablando, se puede iniciar con la concepción que tenemos nosotros de nudo en la vida diaria. Podemos visualizar el nudo de nuestros zapatos o simplemente recordar nuestros audífonos, extensiones o series navideñas enredadas en una maraña que parecieran ser imposibles de desanudar.

El siguiente paso es imaginar esos mismos nudos pero juntos por las puntas:



Ahora que se tiene una mejor concepción de nudo, se pueden observar que:

Para un matemático, es una curva, una especie de trayectoria, cerrada en el espacio. De manera un poco más formal los nudos son estudiados con ayuda de la topología.

La Topología es una rama muy joven de la matemática, contrastando con la teoría de números, geometría y el álgebra, cuyas genealogías datan en tiempos antiguos.

De nuestros cursos de Cálculo sabemos qué es una función continua definida en los reales, o incluso en algún R^n (el espacio euclidiano de dimensión n), y también conocemos las nociones de conjunto abierto y cerrado. Esta noción de continuidad se expande a “espacios” más generales, donde también se generalizan estos conceptos de abierto, cerrado y otros más.

La topología trabaja con funciones continuas. Una clase de estas, especialmente importante para la topología, son los homeomorfismos. Intuitivamente, bajo un homeomorfismo, las figuras permanecen “casi invariantes”, cuando se pliegan, dilatan, contraen o deforman pero de modo tal que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir con puntos diferentes. Esta transformación permitida presupone que haya una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura que se tenía originalmente con la que ya se ha transformado, y que la deformación antes mencionada hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. A la propiedad que se menciona al último se le denomina “continuidad”, y lo que requiere es que la transformación y su inversa sean continuas: esto es más formalmente un homeomorfismo.

Para los intereses de la topología, dos figuras (o en general dos espacios) homeomorfos son prácticamente indistinguibles uno del otro. La topología se encarga sólo de propiedades como la posición relativa y la forma general.

Definición

El subconjunto K de R^3 es un **nudo** si existe un homeomorfismo de la circunferencia unitaria S^1 , cuya imagen es K . Donde S^1 es el conjunto de puntos (x, y) en el plano que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

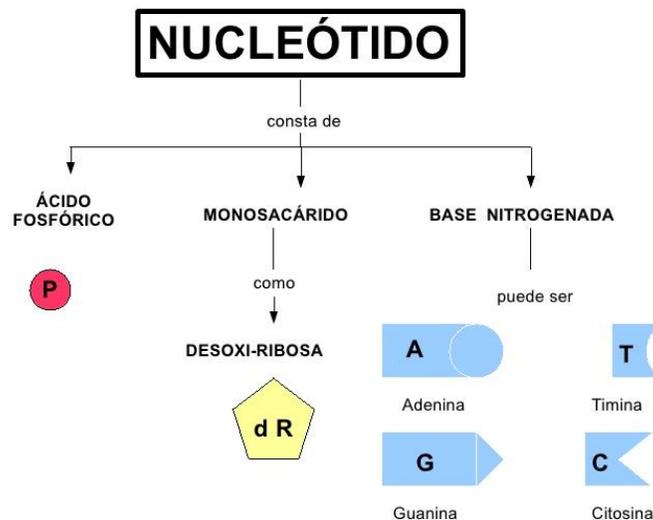
La teoría de nudos es una rama de la topología que aún tiene varios problemas para resolver. Uno de estos problemas es el comportamiento del ADN con ciertas enzimas en esté mismo, la teoría de nudos ayudara a visualizar de una manera distinta dicha información del ADN.

Nudos y el ADN

El ADN, una macromolécula que se encuentra en gran parte de los núcleos celulares, se considera como el destinado a dirigir y regular las actividades principales de cada célula de cualquier organismo como la síntesis de proteínas, además permite transmitir información genética con precisión de una generación a otra.

El ADN es un ácido nucleico constituido por la unión de varias unidades llamadas nucleótidos. Cada nucleótido consta de tres partes:

1. Un grupo fosfato
2. Un azúcar llamado desoxirribosa
3. Una de cuatro bases nitrogenadas (adenina, guanina, timina o citosina: A, G, T y C respectivamente); Las cuales se fijan al carbono uno de la desoxirribosa, mientras que el grupo fosfato se une a la desoxirribosa en el carbono cinco.



Sabiendo las propiedades y características del ADN anteriormente mencionadas, se puede explicar que el ADN tiene la capacidad de adoptar diversas formas, especialmente la de adquirir una forma circular; para lo cual, ambos finales de la doble hélice se unen por medio de dos puentes 3'-5'fosfodiéster, es decir el grupo fosfato y el carbono tres (en el

cual el grupo fosfato y el carbono tres pertenecen a diferente cadena) de un final se unen al carbono tres y al grupo fosfato (ambos siendo de diferente cadena) del otro final respectivamente. Esta unión no se da de otra manera, es por ello que si el ADN se enrolla sobre sí mismo antes de cerrarse, este enrollamiento debe ser de 360° .

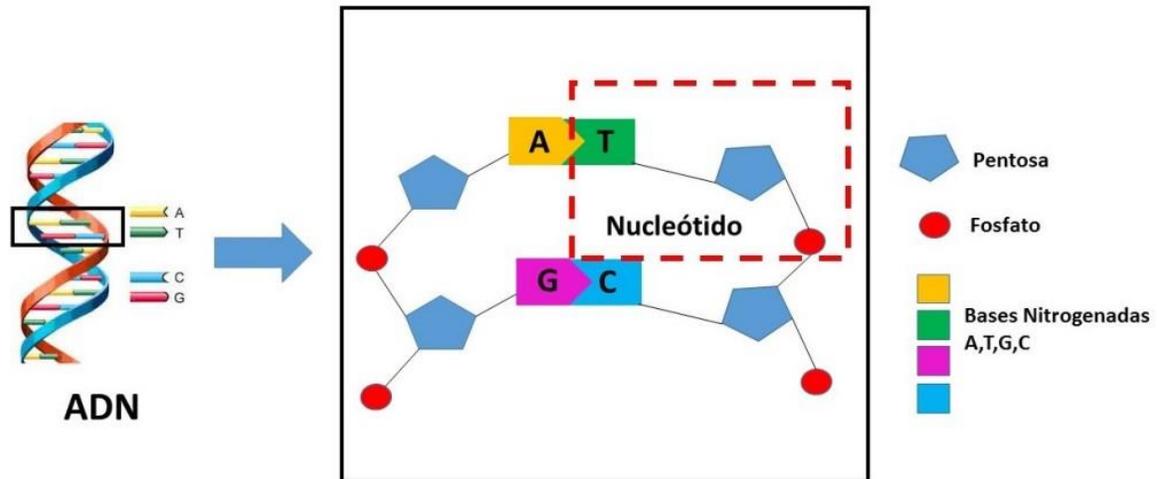
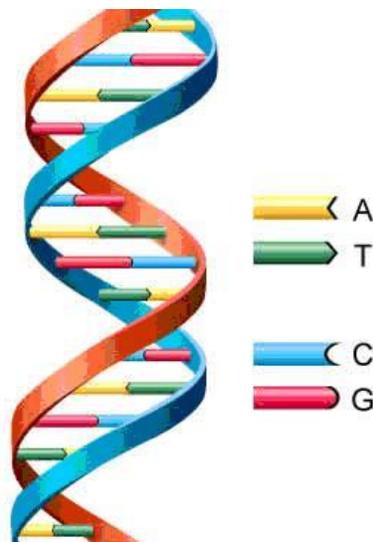


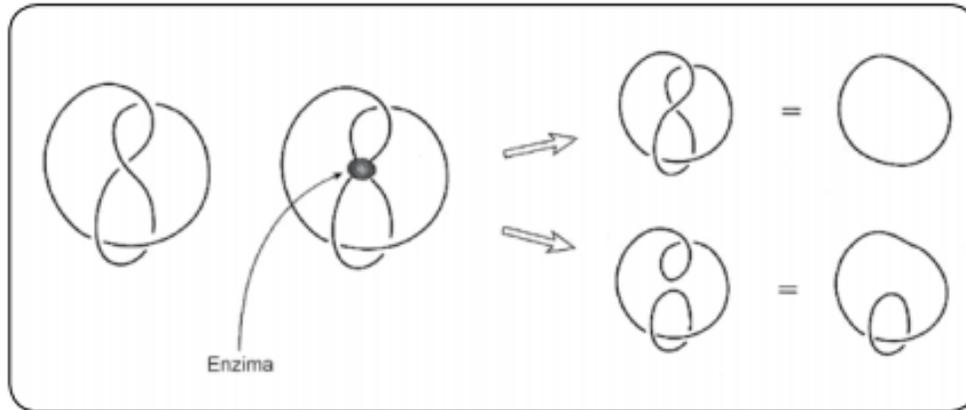
Figura 1. Estructura de ADN y Nucleótidos

De manera que el introducir o quitar enrollamientos al ADN antes de cerrarlo incrementa o reduce los giros de la doble hélice al tiempo de cerrarla, es decir, el sobre-enrollamiento afecta al número de enlace del ADN y éste a su vez afecta la forma geométrica del ADN. Para ADN en forma circular se define el entrelazamiento o twist del ADN, denotado por T_w , la descripción cuantitativa de cómo las dos cadenas de ADN se enrollan entre sí con respecto al eje imaginario, y el retorcimiento o “writhe” del ADN, denotado por W_r , a la descripción cuantitativa de cómo se enrolla al eje imaginario en el espacio.



Hay enzimas que se ubican en los cruces del nudo formado por la molécula, y la cambian de alguna manera. Estas enzimas cambian la topología de la molécula pero no cambian su química, es decir, generan isómeros, de ahí el nombre de topoisomerasas. En general hay diferentes enzimas con distintos efectos en la molécula; y por experiencia no se sabe qué

efecto tienen una cierta enzima, por lo que se requiere de resultados matemáticos no triviales para poder determinar el tipo de “ x ” enzima.



Bibliografía:

Bautista, J. H. (2014). *Nudos y polinomios*. México, CONAMAT.

Feria de las ciencias.(2015). Recuperado de http://www.feriadelasciencias.unam.mx/antiores/feria22/feria382_01_no_te_hagas_nudos_con_la_teor%C3%ADa_de_los_nudos.pdf.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 5

AJUSTE DE MODELOS ESTADÍSTICOS LINEALES A RESULTADOS ELECTORALES

Jorge Gabriel Martín del Campo Cisneros. Dra. Diana Barraza Barraza
joshi.g.m.c@gmail.com, diana.barraza@ujed.mx
 Facultad de Ciencias Exactas, Maestría en Estadística Aplicada

Resumen

El trabajo realizado en el presente artículo tiene como objetivo el determinar la cantidad de votos que recibirá un partido en determinado proceso electoral. Para lograr el objetivo es presentado un análisis descriptivo para establecer la necesidad de los partidos de conocer la predicción de los votos, así como también para analizar la información de los datos históricos de votaciones anteriores presentada en este estudio. Y así llegar al ajuste de modelos estadísticos a los datos, por ultimo presentar conclusiones de los resultados.

1. Descripción del Problema

Los partidos políticos o candidatos que se postulan a un puesto de elección popular cuentan con una cantidad de recursos limitada, por lo que buscan el uso eficiente y preciso de los mismos, así pues, al contar con el dato de la cantidad de votos que obtendrán con antelación en determinada sección electoral los ayuda a la toma de decisiones durante el periodo de

campañas. Es necesario poner en contexto el hecho, de conocimiento general, de que no todos los partidos durante el proceso electoral pretenden juntar la cantidad de votos necesarios para ir a ganar, sino que, en el caso de algunos de ellos su meta particular es conservar el registro como partido, por lo que al conocer la cantidad de votos que obtendrán pueden dirigir los recursos en las secciones electorales donde no cuentan con los votos necesarios para cumplir con su objetivo (ganar una elección o conservar su registro como partido).

La Figura 1, muestra la importancia que tienen algunos estados en lo que a cantidad de votos se refiere, en los cuales el partido que virtualmente no cuente con los votos necesarios para sus propósitos, decida enfocar sus recursos de campaña para obtenerlos.

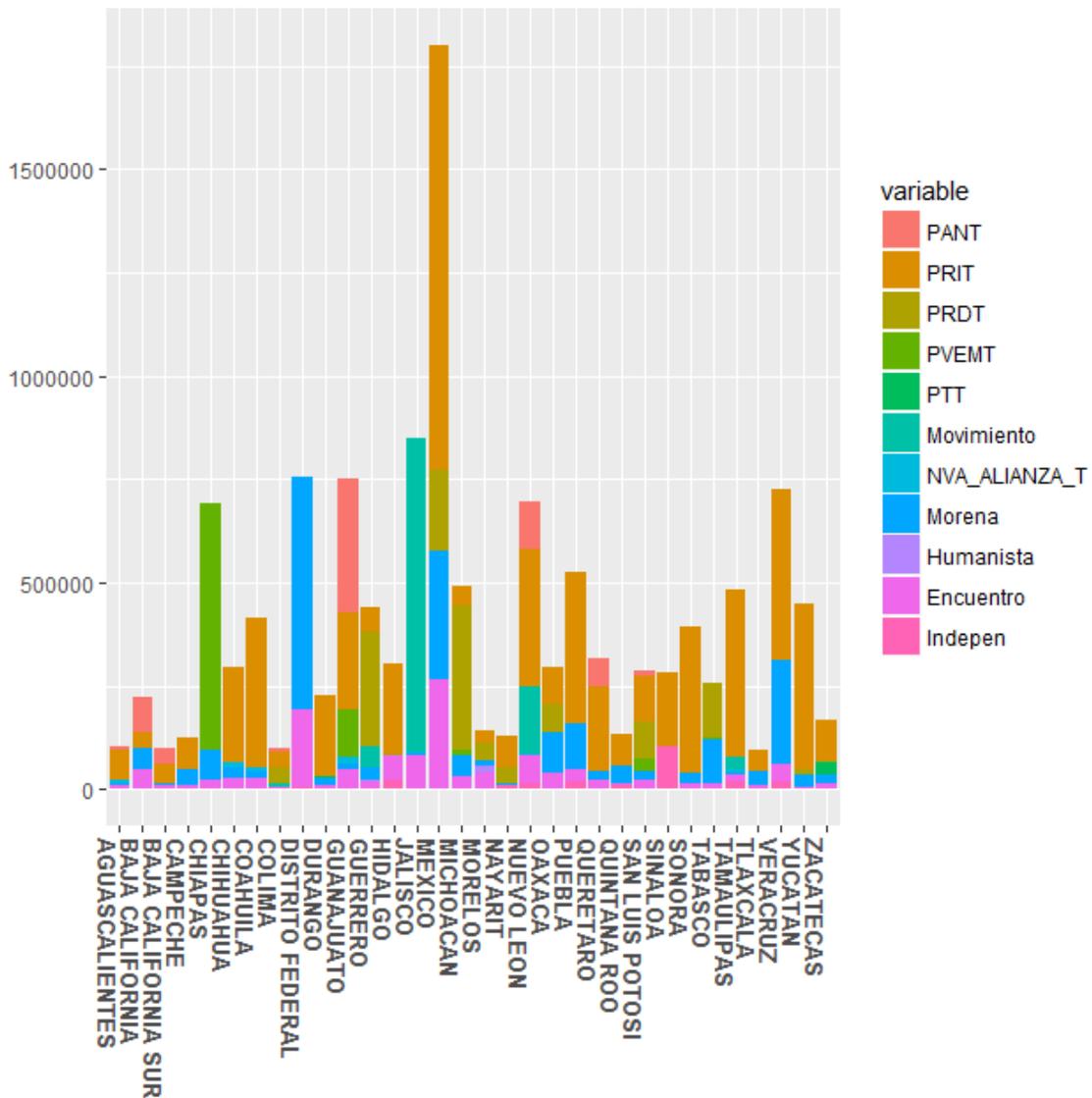


Figura 1: Distribución de votos por partido a nivel nacional

1.1 Objetivo

Generar un modelo estadístico lineal para predecir los votos que obtendrá un partido en el proceso electoral.

La Figura 2 muestra la distribución de los votos por partido en el estado de Durango donde se observa los partidos que obtuvieron una menor cantidad de votos y que son más propensos a la pérdida de su registro como partido, así como también al partido ganador en este estado.

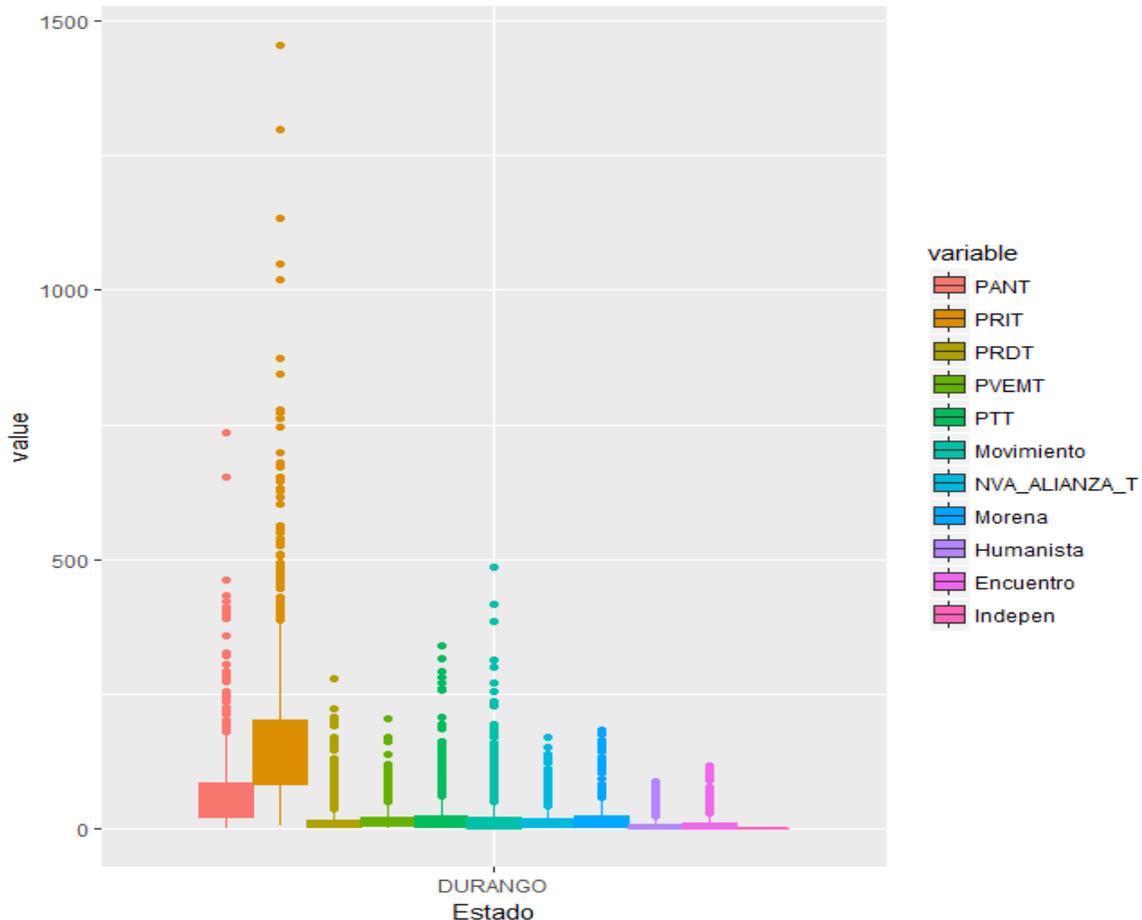


Figura 2: Votos por partido en el estado de Durango

2. Marco Teórico

Definición: Un modelo de regresión lineal univariado se define como un método estadístico que estudia la relación entre una variable predictora (de respuesta o de salida) y más variables (regresoras), para que la variable de respuesta pueda predecirse a partir de otra u otras (Michael H. Kutner {it et al}, 2004).

Supuestos del modelo de regresión lineal:

- **Independencia:** entre los residuos mediante el estadístico de Durbin-Watson que toma valor 2 cuando los residuos son completamente independientes (entre 1.5 y 2.5 se considera que existe independencia, gráficamente es posible observar este hecho mediante la agrupación inusual de los datos).
- **Homocedasticidad:** o igualdad de varianzas de los residuos. Esta condición se estudia utilizando las variables: pronósticos tipificados y residuos tipificados mediante el estadístico de Levene, así como también mediante un gráfico de

dispersión. El supuesto de homocedasticidad implica que la variación de los residuos sea uniforme.

- **Normalidad:** de los residuos tipificados. Podemos contrastarla mediante la prueba de Kolmogorff-Smirnov, o con gráficos de normalidad de tipo Q-Q (cuantiles).

3. Ajuste del Modelo

En esta sección se presentara la propuesta de ajuste para el modelo de regresión lineal univariado tomando como variables dependientes la cantidad de votos a recibir del partido PRI y como variables independientes la cantidad de votos obtenidos históricamente por el partido y la lista nominal.

El modelo propuesto a continuación es un primer intento por cumplir con el objetivo de este trabajo.

$$PRI = \beta_0 + \beta_1 * T_{voto} + \beta_2 * Nominal$$

3.1 Supuestos del Modelo

La Figura 3 proporciona la información estadística suficiente para determinar que el modelo cumple con el supuesto para los residuales de normalidad (grafico superior izquierdo), pero no cumple con los supuestos de igualdad de varianza (grafico superior derecho) se observa que existen datos agrupados del lado izquierdo y por el lado derecho se ve más dispersión de los datos, por último en el grafico inferior izquierdo se observa que los datos presentan patrones claros de dependencia. El gráfico inferior derecho muestra los datos originales (puntos negros) comparados con los ajustados por el modelo (puntos en rojo), de las observaciones de los votos obtenidos en cada estado.

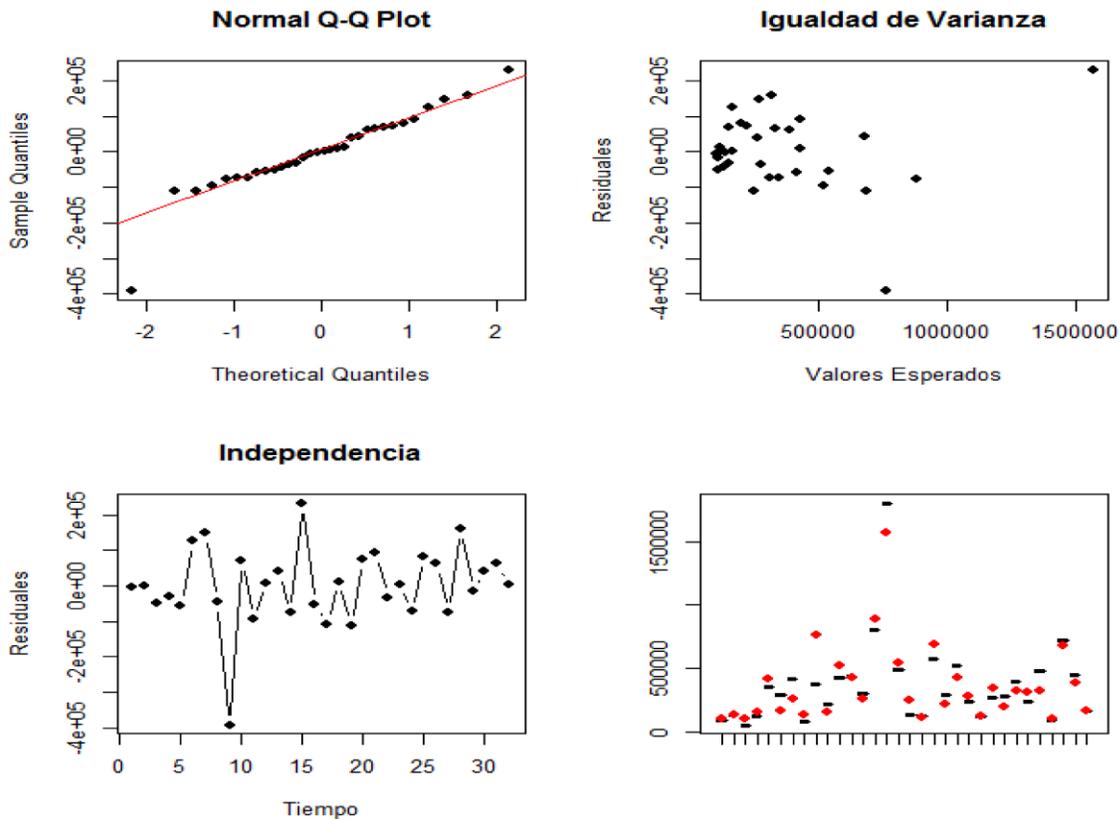


Figura 3: Supuestos del modelo.

4. Conclusiones

El ajuste del modelo nos proporciona información que puede ser de utilidad posteriormente, como por ejemplo el tratamiento de los datos para, así encontrar un modelo que no incumpla con ninguno de los supuestos para los residuales o bien buscar otro enfoque de un estudio similar donde se involucre mayor cantidad de variables que no tengan problema de multicolinealidad, que proporcione un análisis descriptivo de los datos con menor sesgo posible.

5. Referencias

Kutner, M. H. (2005). Applied Linear Statistical Models. Recuperado desde <http://books.google.fr/books?id=0xqCAAACAAJ%7B%5C&%7Ddq=intitle:Applied+linear+statistical+models+djvu%7B%5C&%7Dhl=%7B%5C&%7Dcd=1%7B%5C&%7Dsource=gbs%7B%5C%7Dapi>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 6

ESCALERA CON CAJÓN Y PASAJE CON DOS ESCALERAS

Alondra Valdez Hernández, Sócrates de la Cruz Cháidez. Dra. Alicia López Betancourt
alondra.valdez96@outlook.com, socratesdelacruz@live.com
 Facultad de Ciencias Exactas UJED
 Análisis numérico

Introducción.

Comúnmente aprendemos distintas cosas a lo largo de nuestra vida, carrera, experiencias, entre otras situaciones, pero, algunas veces solemos preguntarnos, ¿esto para qué me sirve?, ¿en verdad es necesario saberlo?, ¿qué tan importante puede ser?, y es ahí cuando debemos de investigar y obtener un mayor conocimiento. Se hablará acerca del tema: raíces de una ecuación que es muy común en el área de la matemática, veremos dos situaciones en las que podemos aplicar este tema.

Hablaremos sobre la solución de ecuaciones de una variable, donde encontraremos raíces de ecuaciones, así también como su comportamiento, dependiendo de los intervalos en los que trabajaremos, pero algo aún más relevante y que nos puede ser más útil, es el uso de métodos de iteraciones, tales como son: el método de Bisección, Newton-Raphson, Secante, Regla Falsa y Punto Fijo.

Los problemas con el que explicaremos la solución de ecuaciones de una variable es llamado “Escalera con cajón” y “Pasaje con dos escaleras”.

Continuando explicaremos los métodos:

Bisección: Este método consiste en obtener una mejor aproximación de la raíz a partir de un intervalo inicial (a,b) en el cual hay un cambio de signo en la función, es decir: $f(a)f(b) < 0$.

Los pasos del método son los siguientes:

- 1.- Localizar un intervalo que contenga al menos una raíz.
- 2.- Dividir el intervalo en dos partes iguales reteniendo la mitad en donde $f(x)$ cambia de signo, para conservar al menos una raíz.
- 3.- Repetir el proceso varias veces hasta cumplir con la tolerancia deseada.

$$m = \frac{(a+b)}{2}$$

si:

$f(m) f(b) < 0$ entonces conservar (m,b) como el semi intervalo que contiene al menos una raíz.

A cada paso se le llama “iteración” y reduce el intervalo a la mitad.

Después de cada iteración el intervalo se reduce a la mitad, después de n iteraciones, el intervalo original se había reducido 2^n veces, por lo tanto, si el intervalo original es de tamaño “a” y el criterio de convergencia aplicado al valor absoluto de la diferencia de dos X_m consecutivas es “ ϵ ”, entonces se requerían “n” iteraciones donde “n” se calcula con la igualdad de la expresión:

$$\frac{\alpha}{2^n} \leq \epsilon$$

$$n = \frac{\ln \alpha - \ln \epsilon}{\ln 2} \Leftarrow \text{iteraciones que se requieren.}$$

de donde:

Newton-Raphson: localiza raíces, es muy eficiente y siempre converge para una función polinomial.

Se requiere que las funciones sean diferenciables, y por tanto, continuas, para poder aplicar este método.

Se debe partir de un valor inicial para la raíz: x^i , este puede ser cualquier valor, el método convergirá a la raíz más cercana.

Si se extiende una tangente desde el punto $(x_i, f(x_i))$, el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

Secante: La fórmula de Newton-Raphson se deduce a partir de la fórmula de la pendiente de una recta.

Pendiente de una recta:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$m(x_{i+1} - x_i) = -f(x_i)$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{f(x_i)}{m}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{m}$$

Regla Falsa: El método de la falsa posición pretende conjugar la seguridad del método de la bisección con la rapidez del método de la secante. Este método, como en el método de la bisección, parte de dos puntos que rodean a la raíz $f(x) = 0$, es decir, dos puntos x_0 y x_1 tales que $f(x_0)f(x_1) < 0$. La siguiente aproximación, x_2 , se calcula como la intersección con el eje X de la recta que une ambos puntos del método de la secante. La asignación del nuevo intervalo de búsqueda se realiza como en el método de la bisección: entre ambos intervalos, $[x_0, x_2]$ y $[x_2, x_1]$, se toma aquel que cumpla $f(x)f(x_2) < 0$.

Punto Fijo: Un punto fijo de una función g, es un número p tal que $g(p)=p$. El problema de encontrar las soluciones de una ecuación $f(x)=0$ y el de encontrar los puntos fijos de una función $h(x)$ son equivalentes en el siguiente sentido: dado el problema de encontrar las soluciones de una ecuación $f(x)=0$, podemos definir una función g con un punto fijo p de muchas formas; por ejemplo, $f(x)=x - g(x)$. En forma inversa, si la función g tiene un punto fijo en p, entonces la función definida por $f(x)=x - g(x)$ posee un cero en p.

El método de punto fijo inicia con una aproximación inicial x_0 y $x_{i+1} = g(x_i)$ genera una sucesión de aproximaciones la cual converge a la solución de la ecuación $f(x)=0$. A la

función g se le conoce como función iteradora. Se puede demostrar que dicha sucesión (x_n) converge siempre y cuando $|g'(x)| < 1$.

Explicaremos cada uno de los dos problemas: escalera con cajón y pasaje con dos escaleras.

Escalera con cajón.

Tenemos una escalera que descansa sobre el piso horizontal y en la pared vertical, formando así, un triángulo rectángulo, observando que en la esquina piso pared se encuentra un cajón cúbico de 1m. de largo. La escalera apenas toca la esquina del cajón.

Lo que nos interesa saber es la medida de la altura que se encuentra por arriba del cajón en la cual la escalera toca a la pared.

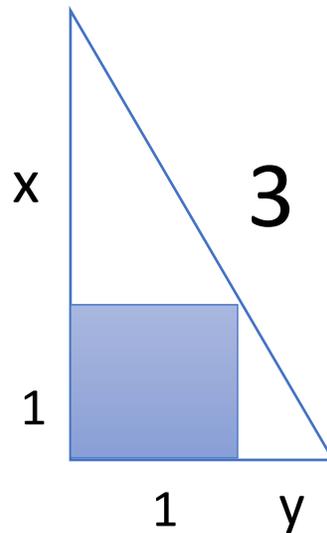


Figura 1: Escalera apoyada en un cajón

Sean x la altura buscada, y la distancia entre el cajón y la escalera como se muestra en la figura 1. Por triangulación:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{y}, \quad y = \frac{1}{x}$$

El cuadrado de la longitud de la escalera es:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$(x + 1)^2 + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 = 9$$

Multiplicando por x^2 y simplificando, resulta la ecuación cuártica:

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$$

La raíz debe ser mayor que 1.

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$$



Figura 1.1 Escalera con cajón: $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$

Utilizando el método de bisección obtenemos la siguiente gráfica y sus iteraciones:

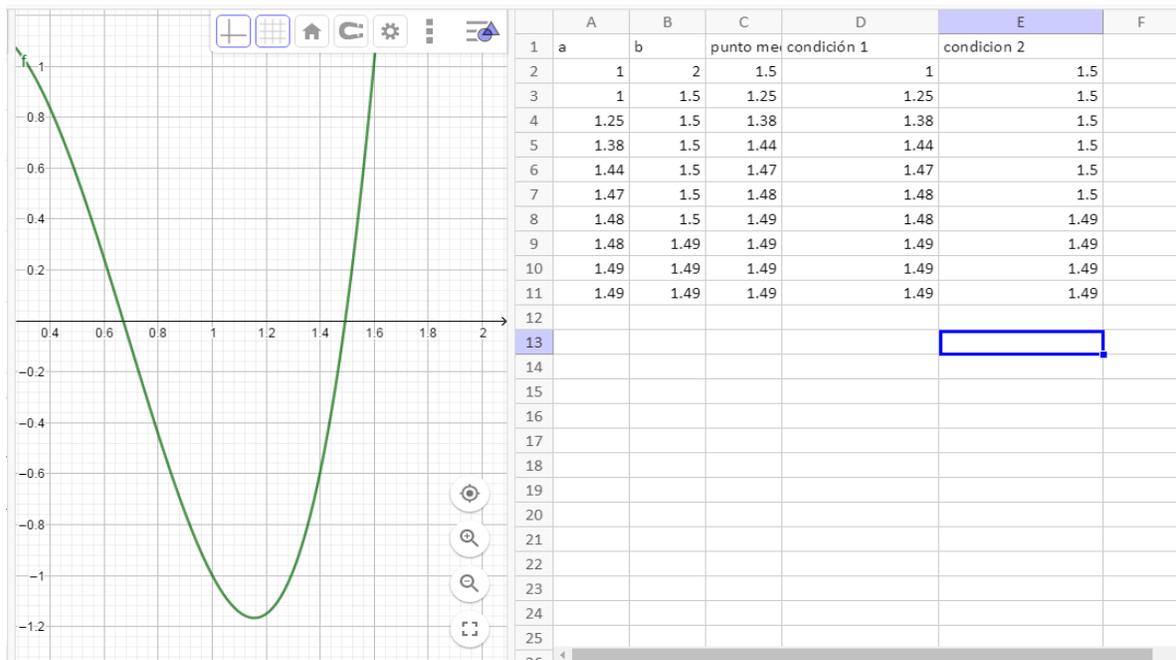


Figura 1.2: Grafica e iteraciones de la ecuación: $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$

Conclusión 1:

Visto el trabajo podemos observar que el método de bisección es muy práctico y sencillo de utilizar, notando que después de ciertas iteraciones nos da ya la mejor aproximación, sin necesidad de seguir realizando el mismo proceso.

Pasaje con dos escaleras:

Tenemos un pasaje que consta de un corredor entre dos paredes verticales a los lados. Se apoyan en sentidos opuestos dos escaleras.

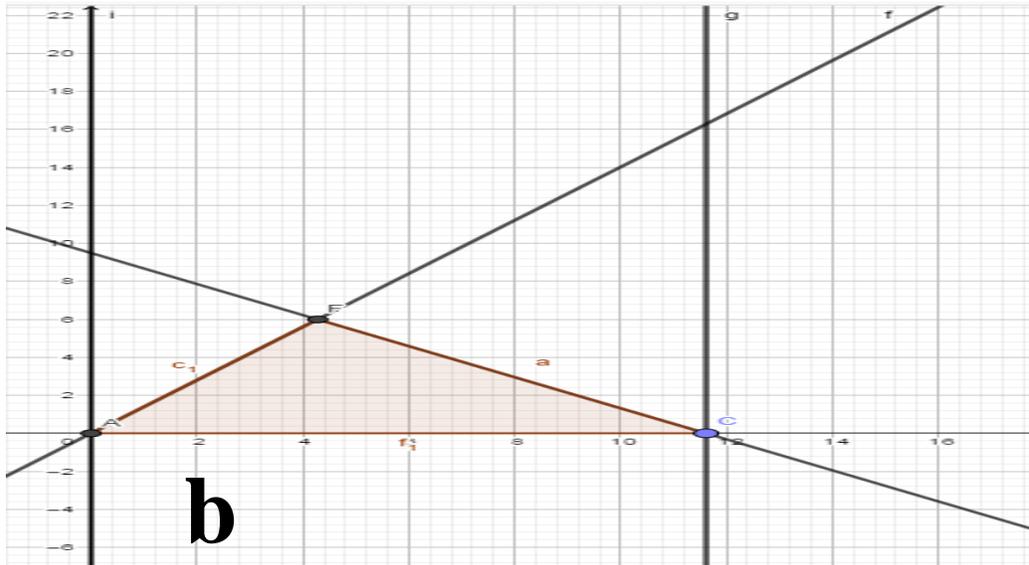


Figura 1.3 Pasaje con dos escaleras.

Las dos escaleras se cruzan una altura de 6'. Y queremos saber, ¿Cuál es la anchura del pasillo?

Vamos a suponer que la intersección de las escaleras en el punto de cruce a 6' del piso, forma una serie de triángulos semejantes con las escaleras manteniendo una relación $a : b$ (lado derecho de la figura 1.3). Entonces, con el teorema de Pitágoras.

$$h^2 a^2 = 400a^2 - 36$$

$$h^2 b^2 = 225b^2 - 36$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{400a^2 - 36}{225b^2 - 36}$$

Con la sustitución de $b = 1 - a$, la expresión anterior se reduce al polinomio de cuarto grado:

$$175a^4 - 350a^3 + 175a^2 + 72a - 36 = 0$$

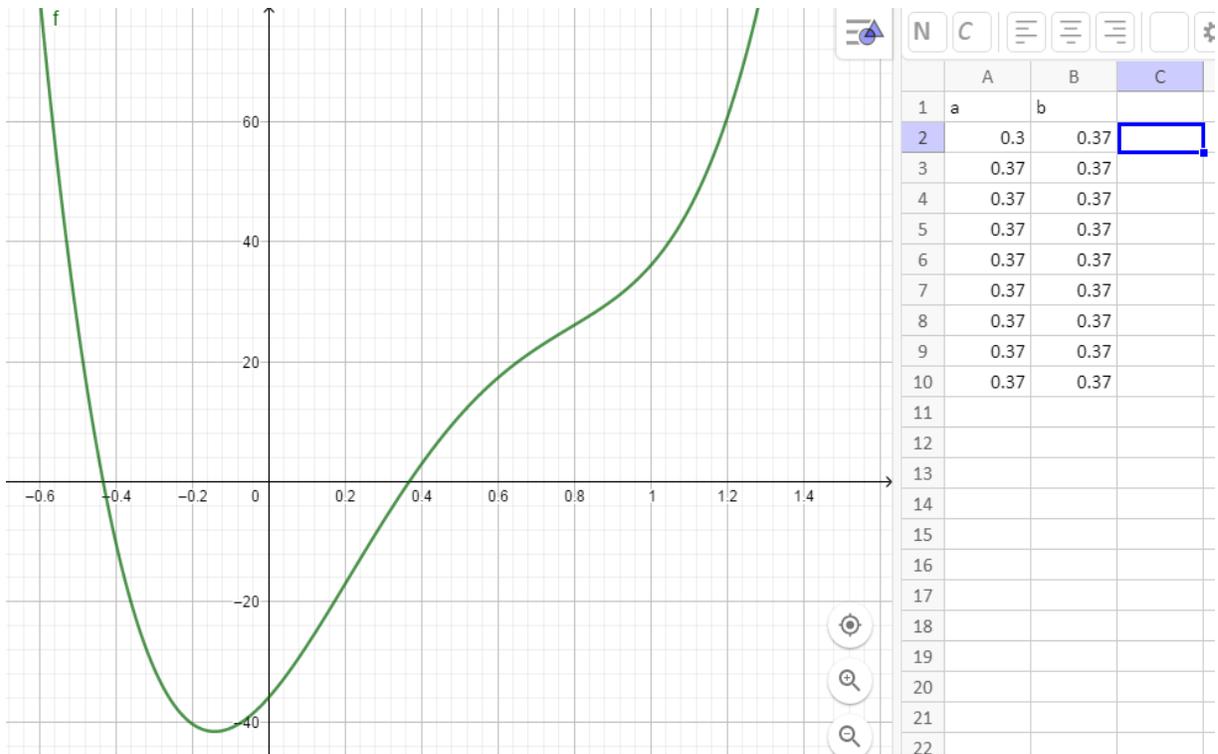


Figura 1.4: Grafica e iteraciones de la ecuación:

$$175a^4 - 350a^3 + 175a^2 + 72a - 36 = 0$$

La figura 1.4 nos muestra que la única raíz positiva se aproxima a 0.4.

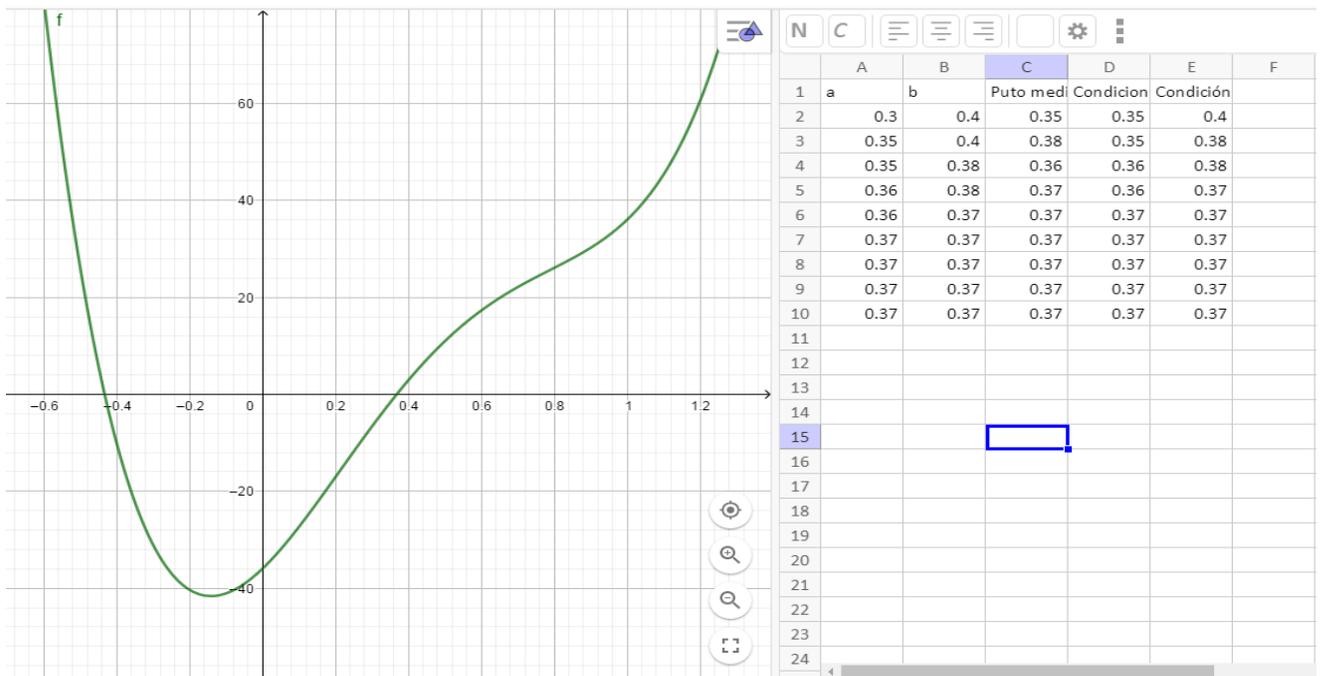
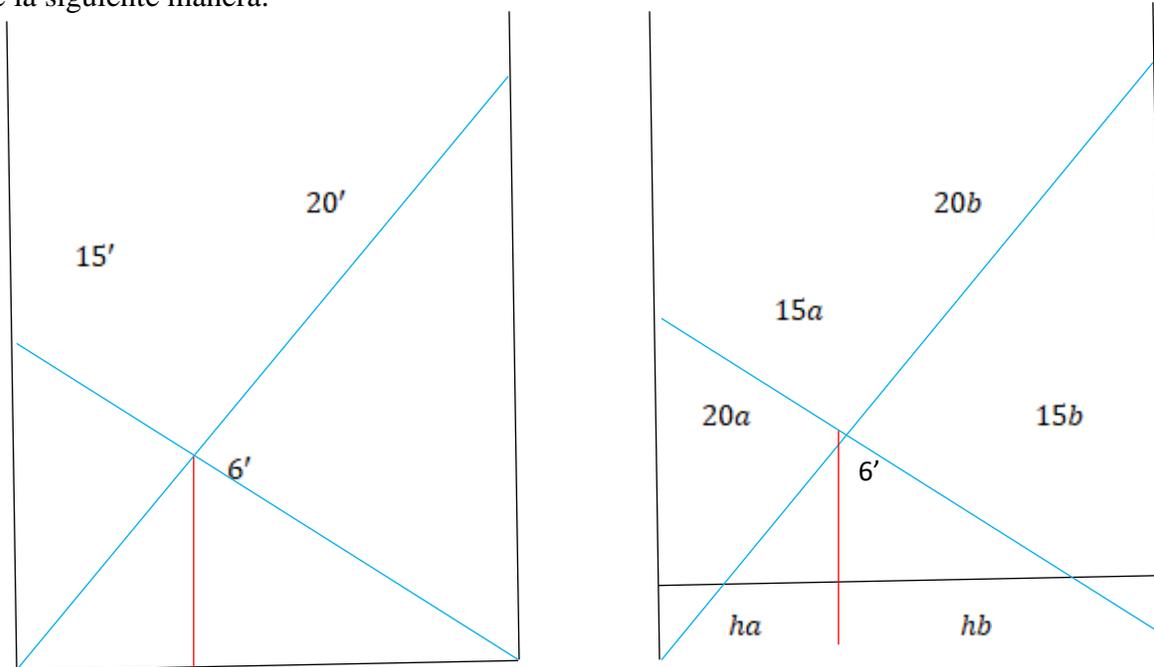


Figura 1.5: Grafica e iteraciones con el método de Bisección de la ecuación:

$$175a^4 - 350a^3 + 175a^2 + 72a - 36 = 0$$

La figura 1.4 nos muestra que la única raíz positiva se aproxima a 0.4, pero ya utilizando el método de Newton-Raphson obtenemos una mejor aproximación que es 0.37.

Continuando con la solución del problema, ahora buscaremos encontrar el ancho del pasaje de la siguiente manera:



$$a = 0.37$$

$$b = 1 - 0.37 \text{ entonces } b = 0.63$$

$$\text{Sea } h = \frac{\sqrt{400a^2 - 36}}{a} = \frac{\sqrt{400(0.37)^2 - 36}}{0.37} = 11.706 \text{ pies}$$

Conclusión 2:

Se puede observar que utilizando el método de Newton-Raphson, encontramos la mejor aproximación en la primera iteración, en cambio, utilizando Bisección se llega hasta la cuarta iteración.

Al ver que en nuestro problema aparecen figuras triangulares, recurrimos a hacer uso del teorema de Pitágoras.

Dándonos cuenta que las matemáticas se encuentran en nuestra vida diaria, lo importantes que son y lo interesante que es poder aplicarlas.

Conclusión final:

Finalmente, tenemos cinco métodos como: bisección, Newton-Raphson, secante, regla falsa y punto fijo, que nos funcionan para resolver situaciones como la de escalera con cajón y pasaje con dos escaleras, solo hay que decidir cuál es de nuestra conveniencia usar y/o cual nos presenta un mejor resultado.

Bibliografía:

Gómez García. D(2009). Raíces de Polinomios. Cálculo Numérico y Aplicaciones Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas. CIMA

Ma. Del Carmen Gómez Fuentes. (1998). Métodos numéricos. 2002, de UAM Sitio web: <http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/Raices/Biseccion/Biseccion.php>

Wladimiro Diaz Viallanueva. (1998). Método de la falsa posición. 2006, de UV Sitio web: <https://www.uv.es/~diaz/mn/node23.html>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 7

GRUPO DE ARISTAS DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL

José Crispín Alvarado Calderón. Dra. Alejandra Soria Pérez.

jose.alvarado@cimat.mx

Facultad de Ciencias Exactas UJED.

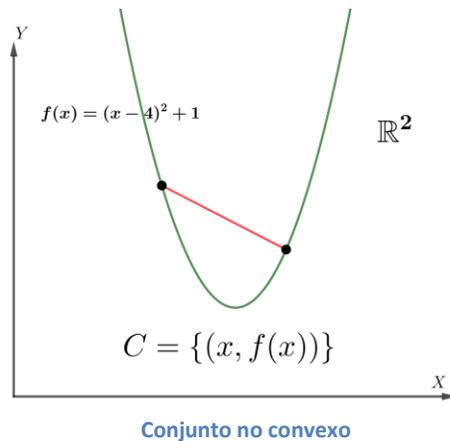
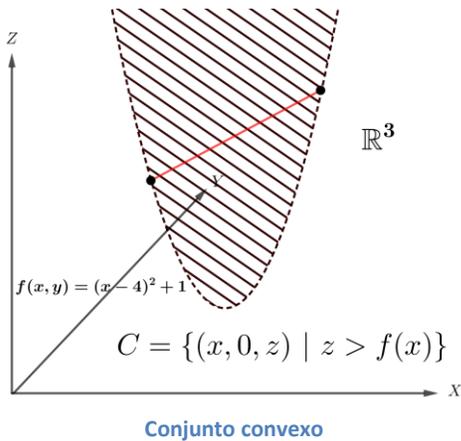
Topología Algebraica

La colección de todos los espacios topológicos es demasiado extensa para trabajar con cada uno de ellos. A través de la teoría abstracta de espacios topológicos y funciones continuas se pueden demostrar muchos resultados importantes. Sin embargo, al trabajar de una manera tan general nos encontramos con dos tipos de dificultades. Por un lado, al tratar de demostrar algún resultado geométrico particular, como el teorema de clasificación de superficies, la estructura topológica por sí misma de la superficie no nos da mucho por dónde empezar. Por otro lado, aunque podamos definir invariantes algebraicos, como el grupo fundamental, para espacios topológicos en general, no es tan factible usarlos a menos que podamos calcularlos para una gran colección de espacios. Ambos problemas pueden ser tratados con efectividad trabajando con espacios que podamos descomponer en piezas que podamos reconocer, y después unirlos de una “buena” forma. Estos son llamados *espacios triangulables*.

Dado un conjunto de puntos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ el **hiperplano** generado por esos puntos consiste en todas las combinaciones lineales $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in \mathbb{R}^n$ donde cada λ_i es un número real y la suma de los λ_i es 1. Otra forma de verlo es considerando a \mathbb{R}^n como espacio vectorial sobre \mathbb{R} y tomamos a $V = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$, digamos de dimensión m , entonces el subespacio vectorial H de V es un *hiperplano* si su dimensión es $m - 1$.

Decimos que un conjunto de puntos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ están en *posición general* si cualquier subconjunto genera un hiperplano estrictamente menor hablando en el sentido de dimensión.

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para todo

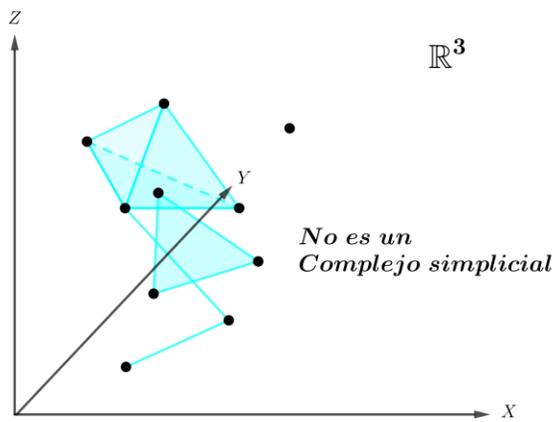
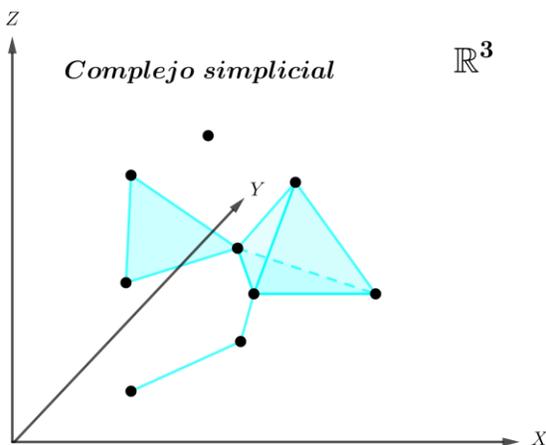
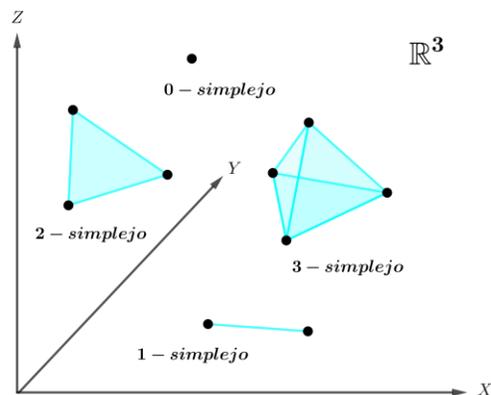


$a, b \in C$ el segmento $[ab] \subset C$.

Definición. Dado un conjunto de $k + 1$ puntos en \mathbb{R}^n , en posición general, el **simplejo de dimensión k** o **k -simplejo** es el menor (por inclusión) conjunto convexo que lo contiene.

Los simplejos tienen “caras” en una forma natural. Si A y B son simplejos y si los vértices de B forman un subconjunto de los vértices de A , entonces decimos que B es una *cara* de A y lo escribimos $B < A$.

Definición. Una colección finita de simplejos en \mathbb{R}^n es llamado **complejo simplicial** si siempre que un simplejo está en la colección entonces también están sus caras, y siempre que dos simplejos de la colección se intersectan lo hacen en una cara común.



La unión de los simplejos que forman un complejo particular es un subconjunto de \mathbb{R}^n , y por lo tanto podemos darle estructura de espacio topológico vía la topología subespacio.

Un complejo K , dotado de ésta forma como espacio topológico es llamado **poliedro** y lo denotamos por $|K|$.

Definición. Una **triangulación** de un espacio topológico X consiste de un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h: |K| \rightarrow X$.

Ejemplo. Tomamos $X = S^2$, la esfera, y K la colección de simplejos que forman la superficie de un tetraedro donde el tetraedro está adentro de la esfera, entonces h puede ser tomada como la proyección radial que te logra identificar cada radio de la esfera con un punto del tetraedro.



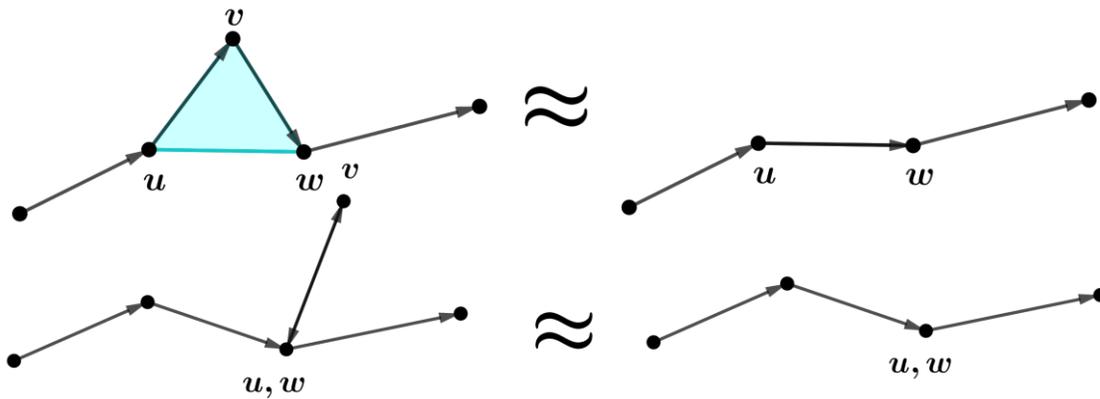
Definición. Decimos que un espacio topológico X es conexo por trayectorias si y solamente si para todos $x, y \in X$ existe una función $f: [0,1] \rightarrow X$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Sea X un espacio triangulable conexo por trayectorias, tomamos una triangulación específica $h: |K| \rightarrow X$, y reemplazamos X por $|K|$ (tenemos la libertad de hacer esto ya que el grupo fundamental es invariante topológico).

Definición. Una **trayectoria de aristas** en un complejo K es una sucesión $v_0 v_1 \dots v_k$ de vértices en la cual cada par consecutivo $v_i v_{i+1}$ (admitiendo $v_i = v_{i+1}$) genera un simplejo de K . Si $v_0 = v_k = v$ lo llamamos **lazo de aristas basado en v** .

La idea es tomar *lazos de aristas* de K , para construir un grupo formado por las aristas de K , el cual puede ser calculado y resulta ser isomorfo a grupo fundamental de $|K|$. Tal grupo es llamado *grupo de aristas* del complejo K . Para formar el grupo de aristas necesitamos una versión simplicial de homotopía.

Definición. Diremos que dos trayectorias de aristas están **relacionadas** si podemos obtener una de la otra en un número finito de operaciones del siguiente tipo: Si tres vértices uvw generan un simplejo de K estos pueden ser reemplazados, en cualquier trayectoria en la cual existen consecutivamente, por el par uw . Bajo las mismas condiciones, el par uw puede ser reemplazado por uvw .



Una trayectoria de aristas es equivalente a sí misma al no hacer ninguna operación. Si tenemos dos trayectorias de aristas que están relacionadas, como podemos “regresar” las operaciones realizadas, la relación es reflexiva. Finalmente si tenemos tres trayectorias e_1, e_2 y e_3 tales que podemos llevar e_1 a e_2 y e_2 a e_3 es evidente que podemos llegar de e_1 a e_3 . De aquí la siguiente proposición.

Proposición. La relación entre trayectorias de aristas definida anteriormente es una relación de equivalencia.

Denotaremos la clase de equivalencia de la trayectoria de aristas $v_0v_1 \dots v_k$ por $\{v_0v_1 \dots v_k\}$.

Proposición. El conjunto de clases de equivalencia de lazos de aristas basados en un vértice particular v forman un grupo bajo la multiplicación

$$\{vv_1 \dots v_{k-1}v\} \cdot \{vw_1 \dots w_{k-1}v\} = \{vv_1 \dots v_{k-1}vw_1 \dots w_{k-1}v\}$$

El elemento identidad es la clase de equivalencia $\{v\}$, y el inverso de $\{vv_1 \dots v_{k-1}v\}$ es la clase $\{vv_{k-1} \dots v_1v\}$. Este es el **grupo de aristas de K basado en el vértice v** y lo denotamos por $E(K, v)$.

Teorema. $E(K, v)$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(|K|, v)$.

La idea para la demostración de este teorema es construir una función $\phi: E(K, v) \rightarrow \pi_1(|K|, v)$ “interpretando” cada lazo de aristas en K como un lazo en $|K|$.

BIBLIOGRAFIA

M. A. Armstrong. (1983). Basic Topology. England: Springer.

Czes Kosniowski. (1985). A First Course In Algebraic Topology. England: Cambridge University Press.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 8

LA SECCIÓN AUREA EN EL DECÁGONO REGULAR

Carlos Michelle Díaz Leyva, Claudia Daniela Corral Hernández. Dra. Alicia López
Betancourt
cdiazleyva@gmail.com, danny@live.com.mx
Facultad de Ciencias Exactas
Métodos numéricos

El número áureo, el número de oro, el número Phi o la razón de oro son algunos de los nombres que recibe este número irracional el cual fue un hallazgo de los griegos de la época clásica y su historia documentada comienza en uno de los libros más célebres de la historia: los Elementos de Geometría de Euclides, escrito alrededor del 300 a.C. El número áureo está compuesto por un número infinito de dígitos que además no siguen pauta alguna por lo que nos ayudamos de la notación aritmética para conocerlo:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.61803398$$

El número áureo lo podemos encontrar en varias ramas tales como la música, el arte, la medicina, pero en particular lo podemos encontrar en la matemática, de hecho en varias ramas de las matemáticas, esta vez nos enfocaremos en una rama en particular la cual es Geometría. Existe una relación entre la sección aurea y algunos polígonos regulares como el decágono y el pentágono, las primeras descripciones de construcciones de polígonos regulares inscritos en una circunferencia, entre las que se cuentan las del pentágono y decágono estos descubrimientos se atribuyen a la escuela Pitagórica (unos 500 años a.C.)

Pero, ¿cómo podemos encontrar la razón de oro en un polígono inscrito en una circunferencia de radio r ? la respuesta parte de la siguiente ecuación que nos permite calcular el radio de la circunferencia conociendo el número de lados del polígono y su longitud.

$$r = \frac{L}{2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

Donde

L : es la longitud del lado

α : es el ángulo central del polígono.

r : es el radio de la circunferencia

Esta función se obtiene a partir de trazar y analizar un triángulo en un polígono regular como en la Figura 1.

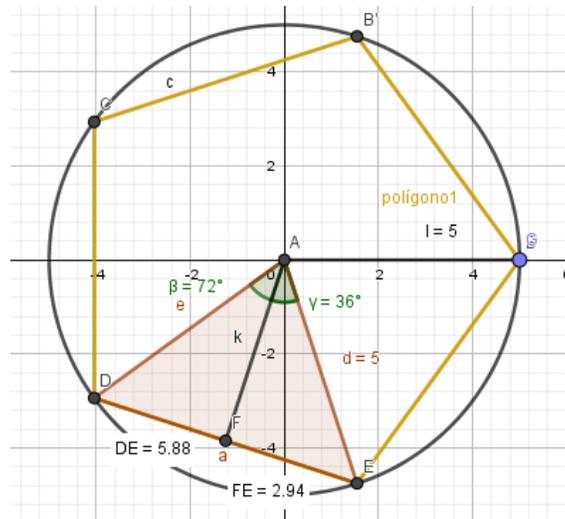


Figura 1

Al colocar el punto medio en el lado \overline{DE} y al trazar su bisectriz podemos observar que se forman dos triángulos rectángulos dado que el triángulo es isósceles. La bisectriz tiene como propiedad dividir el ángulo en dos partes iguales, es decir, en $\frac{\alpha}{2}$ y al momento de poner el punto medio en el lado \overline{DE} la longitud \overline{DF} y \overline{FE} es de $\frac{L}{2}$ ya que la longitud del lado es L .

Al aplicar la definición de la función seno de un ángulo en un triángulo rectángulo podemos llegar a la siguiente ecuación:

$$r = \frac{\frac{L}{2}}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Al simplificar la ecuación nos queda la siguiente expresión:

$$r = \frac{L}{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Pero α es el ángulo central del polígono, entonces, $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ donde n es el número de lados del polígono, al sustituirlo y simplificar obtenemos la siguiente expresión:

$$r = \frac{L}{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{360^\circ}{2 \cdot n}\right)}$$

Al despejar L tenemos la siguiente expresión:

$$L = 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{360^\circ}{2 \cdot n}\right)$$

Tomaremos como un caso particular al decágono el cual es polígono que nos interesa, por lo tanto, el número de lados que vamos a considerar es $n = 10$, al sustituirlo en la ecuación tenemos que:

$$(1) L = 2r \cdot \text{sen}(18^\circ)$$

Usemos formulas muy conocidas como:

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ, \quad \cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$$

Entonces

$$\sin 72^\circ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ = 2(2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ)(1 - 2 \sin^2 18^\circ)$$

Luego

$$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ,$$

$$\cos 18^\circ = 4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ)$$

$$1 = 4 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ)$$

Haciendo $x = \sin 18^\circ$, resulta una ecuación cubica

$$8x^3 - 4x + 1 = 0$$

Ahora tomaremos $x = \frac{z}{k}$, resulta un polinomio en z , con raíces posiblemente enteras

$$8 \left(\frac{z}{k}\right)^3 - 4 \frac{z}{k} + 1 = 0$$

Para $k = 2$

$$z^3 - 2z + 1 = 0$$

Al llegar a un polinomio de tercer grado se tendrán que utilizar algunos métodos iterativos, en este caso, se utilizarán los métodos de Newton-Raphson y regla Falsa. El software que se utilizará estos métodos iterativos será GeoGebra.

Método de Newton-Raphson

El nombre original del método Newton-Raphson es de las tangentes. Una tangente es una recta que intersecta a una curva en un solo punto; en consecuencia, es perpendicular a su radio. Se plantea que en un valor x_0 que represente una aproximación a la raíz de la ecuación, se trace una tangente en el punto $f(x_0)$. Esta recta tangente deberá cortar al eje horizontal. El punto donde lo corte será la nueva aproximación x_1 , de tal forma que en el punto $f(x_1)$ se trace una nueva tangente. Este proceso se repetirá hasta que el corte de la tangente en el eje horizontal coincida con la raíz de la ecuación, o bien, cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas cumpla con una tolerancia preestablecida.

En la Figura 2 se puede observar una hoja de cálculo de GeoGebra en donde se realizan las iteraciones para encontrar la raíz.

	punto inicial	-1.5			
INTERAS...	INTERASIONES	INTERAS...	INTERAS...	INTERAS...	INTERAS...
1	-1.5	0.625	4.75	-9	-1.60532...
2	-1.6053215078	0.07363...	5.73117...	-9.63192...	-1.61789...
3	-1.6178985623	0.00079...	5.85278...	-9.70739...	-1.61803...
4	-1.6180339735	0.00000...	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...
5	-1.6180339887	0	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...
6	-1.6180339887	0	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...
7	-1.6180339887	0	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...
8	-1.6180339887	0	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...
9	-1.6180339887	0	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...
10	-1.6180339887	0	5.85410...	-9.70820...	-1.61803...

Figura 2. Método Newton-Raphson

En este método podemos observar en la columna iteraciones que estamos encontrando un valor aproximado al conjugado del número Phi.

Método de Regla Falsa

Consiste en considerar un intervalo (x_i, x_s) en el que se garantice que la función tiene raíz, es decir:

$$f(x_i) \cdot f(x_s) < 0$$

Se traza una recta que une los puntos $(x_i, f(x_i))$, $(x_s, f(x_s))$ y se obtiene el punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas: $(x_r, 0)$; se toma x_r como aproximación de la raíz buscada.

Se evalúa $f(x_r)$ para determinar en cuál de los dos intervalos está la raíz:

- $f(x_i) \cdot f(x_r) < 0 \rightarrow$ La raíz está en el intervalo (x_i, x_r) .
- $f(x_i) \cdot f(x_r) > 0 \rightarrow$ La raíz está en el intervalo (x_r, x_s) .
- $f(x_i) \cdot f(x_r) = 0 \rightarrow$ La raíz es x_r .

En la Figura 3 se puede observar una hoja de cálculo de GeoGebra en donde se realizan las iteraciones para encontrar la raíz.

A	B	f(A)	f(B)	f(A)*f(B)	Xr	f(Xr)
-1	-2	2	-3	-6	-1.4	1.056
-1	-1.4	2	1.056	2.112	-1.84746	-1.61064
-1.84746	-1.4	-1.61064	1.056	-1.70084	-1.57719	0.23105
-1.84746	-1.57719	-1.61064	0.23105	-0.37214	-1.6111	0.04036
-1.84746	-1.6111	-1.61064	0.04036	-0.065	-1.61688	0.00676
-1.84746	-1.61688	-1.61064	0.00676	-0.01089	-1.61784	0.00112
-1.84746	-1.61784	-1.61064	0.00112	-0.00181	-1.618	0.00019
-1.84746	-1.618	-1.61064	0.00019	-0.0003	-1.61803	0.00003
-1.84746	-1.61803	-1.61064	0.00003	-0.00005	-1.61803	0.00001
-1.84746	-1.61803	-1.61064	0.00001	-0.00001	-1.61803	0
-1.84746	-1.61803	-1.61064	0	0	-1.61803	0
-1.84746	-1.61803	-1.61064	0	0	-1.61803	0
-1.84746	-1.61803	-1.61064	0	0	-1.61803	0

Figura 3. Método de Regla Falsa

En este método podemos observar en la columna x_r que estamos encontrando también al igual que el otro método iterativo un valor aproximado al conjugado del número Phi.

Esta ecuación (1) la vamos a utilizar para encontrar la constante denominada como la sección aurea en nuestro polígono.

Resolución:

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $x = \sin 18^\circ$ es positivo y distinto de $\frac{1}{2}$ $x = \frac{z}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) = \frac{1}{2\varphi}$

Entonces tenemos una nueva función que depende del radio de la circunferencia pero ahora con un número muy peculiar, el cual, es el número Phi

$$L_{10} = 2r \cdot \text{sen}(18^\circ) = 2r \frac{1}{2\varphi} = \frac{r}{\varphi}$$

Con

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

La constante φ se denomina sección aurea, que desde los antiguos griegos, muchos la han considerado como la sección mejor proporcionada, la más estética. Se ha usado extensamente en el arte y aparece con frecuencia en la naturaleza y ocasionalmente en aplicaciones científicas.

Bibliografía

Dávila, M. (2005). *Las proporciones divinas*. Cirugía Plástica, 15(2), 118-124.

Tosto, P. (1983). *La composición áurea en las artes plásticas* (No. 7.013). Hachette,

Nanney J. Louis, Cable John L. (1980). *Trigonometry A Skills Approach*

<http://www.buenastareas.com/ensayos/La-Seccion-Aurea-y-La-Construccion/7134143.html>

<http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/Raices/Biseccion/Biseccion.php>

<http://wordpress.colegio-arcangel.com/investigandoconciencias/el-numero-aureo/>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 9

VARILLA DESLIZANTE CON COLLARÍN

Noé Montes López, Jesús Alfredo Lerma Domínguez, Erik Assael Beltrán Hernández. Dra.
Alicia López Betancourt.

elone_la30@hotmail.com, jesuslerma.jld@gmail.com, erick_behe@hotmail.com.

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED
Análisis Numérico. Ponencia

Introducción.

Las matemáticas tienen una gran aplicación, en particular el área de la física en la cual detallaremos el problema de una varilla deslizante con collarín, la cual es aplicada a todo tipo de industria maquinaria ya que es muy importante su utilidad para la ayuda de estas.

Para poder resolver el problema del movimiento del collarín en la varilla lleva a resolver una ecuación de grado 3, aunque hay métodos directos para resolver este tipo de ecuaciones, en el presente trabajo se exploran métodos iterativos como: Bisección, Newton-Raphson y Bierge-Vieta que es una variante de Newton-Raphson.

Los métodos a usar se explicarán brevemente y de la manera más sencilla:

Método de Bisección

Este método, que se utiliza para resolver ecuaciones de una variable, está basado en el “Teorema de los Valores Intermedios” (TVM), en el cual se establece que toda función continua f , en un intervalo cerrado $[a, b]$, toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$, de tal forma que la ecuación $f(x)=0$ tiene una sola raíz que verifica $f(a)*f(b)<0$.

(Burden, Douglas (1985))

Método de Newton-Raphson

El método de Newton (conocido también como el método de Newton-Raphson o el método de Newton-Fourier) es un algoritmo para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real, por medio de iteraciones, que no es otra cosa que comenzar con un valor cercano a cero, y después ir hallando las rectas tangentes a la función que se nos plantea, hasta que encontremos uno que se aproxime lo suficiente a la raíz. (Burden y Faires, 2002)

Método de Bierge-Vieta

El método Birge-Vieta aplica Newton-Raphson para encontrar una raíz del polinomio $P(x)$. Dado un punto x_k , evalúa $P(x_k)$ y $P'(x_k)$ mediante división sintética. Cuando encuentra una raíz π_i , elimina el factor $(x-\pi_i)$ mediante división sintética y continúa trabajando sobre

el polinomio resultante. El proceso se repite hasta encontrar todas las raíces del polinomio. (Valenzuela, 2008)

Aparte de estos tres métodos nos apoyaremos con una aplicación de la física llamada punto fijo que trata del estado donde dos fuerzas encontradas se compensan y se destruyen mutuamente.

Gracias a estos métodos podemos facilitar los cálculos en dicho trabajo realizado por ciertas máquinas, viéndolo en un punto de aplicación en Física, se puede calcular la velocidad y la fuerza que se aplica en el collarín en la misma varilla esto puede hacer de mucha ayuda ya que cierta maquinaria actúa de distinta forma.

Incluiremos ayuda de Geogebra para analizarlo de una manera visual y que se comprenda el cómo funciona cierta varilla en estas maquinarias, también para el uso de ciertos cálculos utilizaremos en la parte de Geogebra (Hojas de Cálculo) y los programas de los métodos Bisección, Newton-Raphson y Bierge-Vieta

Planteamiento del problema

Un cilindro liso de radio r tiene una extensión radial vertical (La extensión radial vertical, aplicada a este problema, se comportaría en maquinaria, de la manera que cada que se cambia de velocidad, la varilla sale del cilindro y se va ajustando a el freno de la llanta). Una varilla delgada de longitud $2r$ y peso W se sujeta a un collarín B y reposa sobre el cilindro. Sabiendo que el collarín puede deslizarse libremente a lo largo de la guía vertical. Determinar el valor de θ correspondiente a la posición del equilibrio. (Gómez García, 2009) (Ver Figura 1)

$$\Delta BCO \quad BC = r \tan \theta$$

$$\Delta DCB \quad DC = BC \tan \theta = (r \tan \theta) \tan \theta = r \tan^2 \theta$$

$$\Delta GCD \quad CG = DC \tan \theta = (r \tan^2 \theta) \tan \theta = r \tan^3 \theta$$

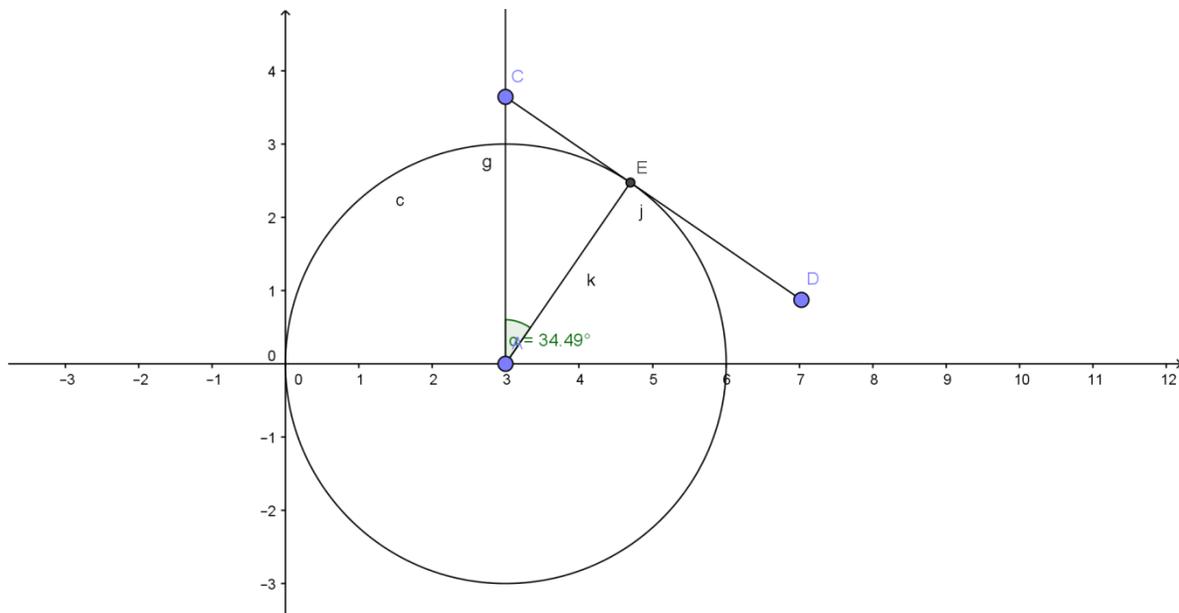


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas sobre la varilla que desliza en el collarín
Entonces:

$$BC + CG = BG$$

$$\tan \theta + r \tan^3 \theta = r$$

$$\tan^3 \theta + \tan \theta - 1 = 0$$

Con el cambio de variable

$$x = \tan \theta \quad f(x) = x^3 + x - 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 1$$

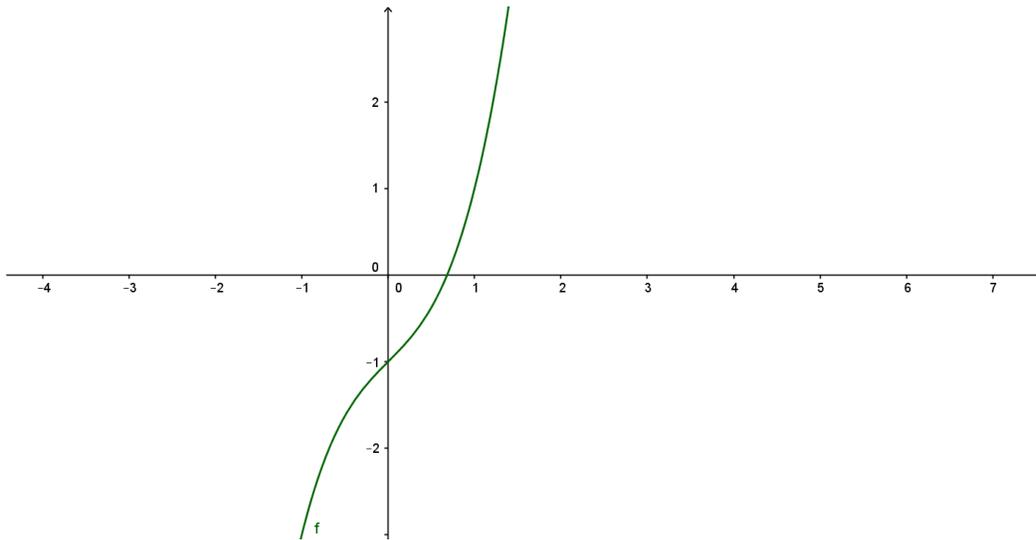


Figura 2. Representación gráfica de $f(x) = x^3 + x - 1$

Para poder resolver nuestro problema tenemos que determinar las raíces de la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ con los métodos iterativos antes mencionados.

Para el método de iteración, se usaron 13 iteraciones con una tolerancia de 0.001 y se procedió a hacer el método con el problema de la varilla deslizante con collarín.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	c	f(a)*f(c)	f(c)*f(b)	a'	b'	tol
2	0	1	0.5	0.375	-0.375	0.5	1	0.001
3	0.5	1	0.75	-0.064453125	0.171875	0.5	0.75	0.001
4	0.5	0.75	0.625	0.0490722656	-0.0224914551	0.625	0.75	0.001
5	0.625	0.75	0.6875	-0.0016293526	0.0021400452	0.625	0.6875	0.001
6	0.625	0.6875	0.65625	0.0079990029	-0.0007610992	0.65625	0.6875	0.001
7	0.65625	0.6875	0.671875	0.0015177679	-0.0003091609	0.671875	0.6875	0.001
8	0.671875	0.6875	0.6796875	0.0001567708	-0.0000786142	0.6796875	0.6875	0.001
9	0.6796875	0.6875	0.68359375	-0.0000191775	0.0000378191	0.6796875	0.68359375	0.001
10	0.6796875	0.68359...	0.681640625	0.0000103925	-0.0000049996	0.681640625	0.68359375	0.001
11	0.68164...	0.68359...	0.6826171875	-0.0000011419	0.0000021072	0.681640625	0.6826171875	0.001
12	0.68164...	0.68261...	0.6821289063	0.0000007845	-0.0000003307	0.6821289063	0.6826171875	0.001
→ 13	0	0	0	1	1	0	0	0.001

Figura 3. Iteraciones para encontrar las raíces de $f(x) = x^3 + x - 1$ con el Bisección

En el método de Newton-Raphson se calcularon 10 iteraciones con una tolerancia de 0.0001 e igualmente se aplicó el método al problema.

	A	B	C	D	E	F
1						tol
2	1	1	4	0.75		0.0001
3	0.75	0.1719	2.6875	0.686		0.0001
4	0.686	0.0089	2.412	0.6823		0.0001
5	0.6823	0	2.3968	0.6823		0.0001
6	0	0	0	0		0.0001
7	0	0	0	0		0.0001
8	0	0	0	0		0.0001
9	0	0	0	0		0.0001
10	0	0	0	0		0.0001
11						

Figura 3. Iteraciones para encontrar las raíces de $f(x) = x^3 + x - 1$ con el Método de Newton-Raphson

Igualmente en el método de Bierge-Vieta se puso una tolerancia de 0.0001 y se hicieron 16 iteraciones para el problema de la varilla deslizante con collarin.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x		1	1	0	1	-1
2	1				1	1	2
3				1	1	2	1
4				1	1	2	
5				1	2	4	
6	x						
7	0.75		0.75	1	0	1	-1
8					0.75	0.5625	1.171875
9				1	0.75	1.5625	0.171875
10					0.75	1.125	
11					1.5	2.6875	
12	x		0.68604651	1	-2	-5	6
13	0.68604651				0.68604651	-0.90143321	-4.04865767
14				1	-1.31395349	-5.90143321	1.95134233
15					0.68604651	-0.43077339	
16				1	-0.62790698	-6.3322066	
17							

Figura 3. Iteraciones para encontrar las raíces de $f(x) = x^3 + x - 1$ con el Método de Bierge-Vieta

De los métodos se puede observar que en general el valor de x es 0.6823, entonces:

$$\theta = \arctan(0.6823) = 34.41^\circ$$

Por tanto, el ángulo de equilibrio es $\Theta = 34.31^\circ$

Conclusión:

En cierta forma es un poco difícil de visualizar el comportamiento de ciertas maquinarias con este tipo de varilla con collarín, las iteraciones viéndolas de ciertos métodos numéricos distintos no es mucha la diferencia solo son ciertas decimas que cambian pero su comportamiento es muy similar en el mismo problema. Hemos observado que tiene cierta aplicación bastante extensa en ciertos campos pero su mayor aplicación es en la física, si pudiéramos calcular con que velocidad se recorre el collarín o con que fuerza es aplicado cierto movimiento, nos arrojarían ciertas preguntas que nos llevarían a otros problemas por definir y muy interesantes a la hora de visualizar todo, creemos que es mucha ayuda para la sociedad el saber el uso y comportamiento de esta herramienta en cualquier maquinaria de trabajo.

Bibliografía

Gómez García, D. (2009). Raíces de polinomios cálculo Numérico y Aplicaciones. Centro de investigación en Matemáticas Aplicadas. CIMA.

Burden, I., Douglas Faires, J. (2002). Análisis Numérico. Math Learning.

Valenzuela, M. (2008). Métodos Numéricos. Solución de ecuaciones no lineales. Recuperado de: http://www.mty.itesm.mx/dtie/deptos/cb/cb00854-1/Apuntes/no_lineales.pdf

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 10

EL UNIVERSO AL ALCANCE DE UN DOUGHNUT

David Augusto Levi Hernández Alcántara, Mariam Magallanes Escobedo

yadera12@hotmail.com, jamesdouglassmorrison4@gmail.com

Universidad Juárez del Estado de Juárez

Cosmología

En el presente trabajo se explora la visión matemática y topológica del modelo cosmológico del universo (en el que vivimos y formamos parte) exponiendo las diferentes teorías (fuertes) que están en constante discusión en la actualidad dentro de la comunidad científica.

Haciendo ver la diferencia entre geometría y topología, pues la primera observa los fenómenos de cerca y la segunda lo hace desde lejos pues incluye espacios más grandes que los que abarca la geometría, a su vez cuando definimos una función que respete las invariantes de una figura que puede ser plegada, dilatada, contraída o deformada de tal manera que no aparezcan nuevos puntos (es decir, que haya correspondencia biunívoca

entre los puntos de la figura original y los de la transformada) tal que esa deformación corresponde a *puntos próximos con puntos próximos* (estamos hablando de la continuidad) requiriendo que la transformación junto con su inversa sean continuas; será entonces cuando podemos hablar de la igualdad (topológica) de un cuadrado a una circunferencia sabiendo que es totalmente cierto dependiendo de la función que hayas definido y a su vez que se cumplirá siempre y cuando se respeten los requerimientos de continuidad. Ahora, por otra parte pero no alejándonos de lo ya mencionado, un balón de soccer es igual a un balón de fútbol americano visto topológicamente e igual que en el caso pasado, todo dependerá de la función con que se defina y con qué parámetros o especificaciones tenga esta última.

Aproximadamente en el tiempo cerca del siglo VII a.C. estuvo influenciado por Tales de Mileto, quien fue un filósofo, matemático, geómetra, físico, cosmogónico y legislador griego que presentó diferentes sistemas cosmológicos alternativos, de los cuales, sólo el ptolemaico (propuesto en la misma época) consiguió perdurar y establecerse a lo largo de la historia. Ahí fue cuando se arraigó la teoría que proponía que la Tierra era el centro del universo, y el Sol, la Luna y los demás planetas giraban a su alrededor.

Después, sin que ningún otra propuesta lo desafiara, éste sistema reinó sin que ninguno de sus críticos lo pusiera en duda. No fue hasta el siglo XV donde se dió un cambio de pensamiento donde el trabajo conjunto de diversas mentes junto con la mezcla de personalidades y diversas ideas con el objetivo de llegar a un nuevo sistema planetario en base a las observaciones astronómicas y la naturaleza culminaron en el gran trabajo de Copérnico con un sistema planetario similar al de Ptolomeo y su *sintaxis Mathematica* (*Μαθηματικὴ Σύνταξις*) en donde otorgaba como papel central al Sol y no a la Tierra (y en el cual también se empezó a hablar del concepto de infinitud). Este fue el modelo que terminó por desbancar al milenarismo sistema sostenido por el sabio lustre de la vieja ciencia alejandrina.

De este salto a la actualidad, aún no se sabe a ciencia cierta que el universo es infinito o finito, pero su expansión va muy rápido, la pregunta es ¿podría tener el universo forma de Doughnut? <<Tomando en cuenta que topológicamente un doughnut pertenece al espacio de un producto cartesiano de dos circunferencias ($S^1 \times S^1$) o equivalentemente se dice que es un objeto tridimensional obtenido mediante el producto cartesiano de un disco y una circunferencia ($D^2 \times S^1$) y equivalentemente en coordenadas cartesianas cuando R es el trayecto entre el centro del conducto y el centro del doughnut, r radio del conducto, entonces tenemos la siguiente ecuación $(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$ >>

La respuesta podría ser sí, siempre que sea un Doughnut (también conocido como toro o dona) muy grande, más allá de lo que el ojo humano y la tecnología en conjunto llegan a observar. Esta pregunta puede tomar dos posturas, si las galaxias tuviesen forma de Doughnut entonces la respuesta sería no, pues porque de ser así el Doughnut tendría que tener un borde en algún punto, y en algún momento dejaría de haber galaxias, lo cual no es cierto. Y en los cúmulos de galaxias no hay un corte notable o pared.

Ahora, planteando la pregunta de otra forma en la que podríamos interpretarla, tal que si el que tuviese forma de Doughnut es el espacio ¿podríamos verlo en un espacio de dos dimensiones (un plano) pero con la condicional de que su “universo” sea dimensional?

Observemos que esto no quita que tenga una forma. Ahora, supongamos que de esa dimensión corto un cuadrado <<Figura-1>>



Figura-1

Y como sabemos que es una geometría plana podemos decir que puedo pegar los dos bordes del rectángulo (es decir, el borde de arriba con el de abajo) <<Figura-2>>

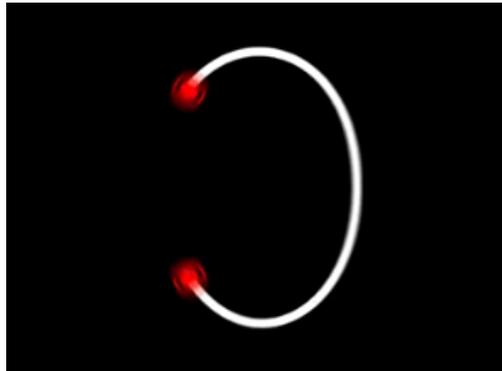


Figura-2

Y después los bordes laterales, lo cual me generaría un Doughnut.

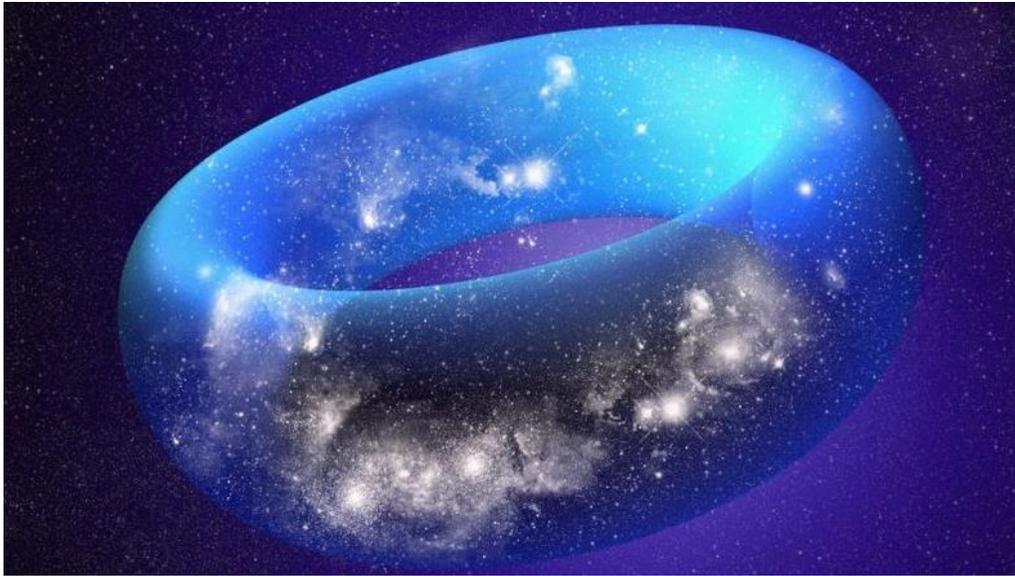
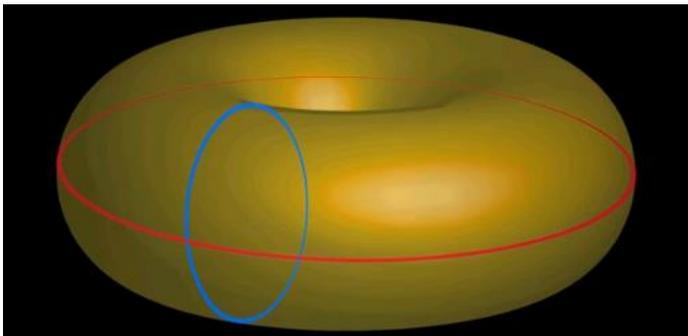


Figura-3

Si se viajase en ese espacio propuesto (figura-3) en línea recta, siempre se llegaría al punto de partida, sea cual sea la posición donde se comience éste universo sería “ilimitado”, para eso el universo no tiene que ser infinito, podríamos decir que éste es finito y a la vez ilimitado, al convertirse en un espacio totalmente reflexivo.

Pero ahora volviendo al universo de verdad y olvidándonos de los supuestos que habíamos mencionado hasta el momento, podemos hablar de que un caso que también podría pasar es que nuestro espacio tridimensional tuviera una forma, y cuando hablamos de que tuviera una sólo forma, comenzamos a proyectarnos sobre una curva donde su curvatura es un Doughnut (con forma tridimensional) <<que por cierto, esto tiene un nombre y se le llama “Geometría Toroidal”>> Ahora, es importante hacer aquí un paréntesis pues se tiene la idea de que si vivimos en una geometría toroidal, nosotros tendríamos que vivir en una superficie de 4ta dimensión (lo cual no es necesario), y nos generaría una contradicción o paradoja; pero el espacio también puede curvarse así mismo, y vendría generando a lo que se llama “*Curvatura Intrínseca*”, por lo que no puede ser que vivamos en una cuarta dimensión gracias a esta propiedad que tiene nuestro universo.

Ahora tomemos en cuenta dos círculos importantes dentro de la geometría toroidal, los cuales se pueden apreciar en la siguiente imagen:



Por otra parte, si nos proyectamos a que nuestro universo tiene realmente geometría toroidal, entonces habría distancias diferentes hacia donde intentaríamos para estudiar el universo y podríamos observar una frontera pues cambia la percepción de la luz que nosotros tenemos, pero no es así. Ya que en este punto se descarta la geometría toroidal y por ende tenemos que empezar a pensar

en otro tipo de geometrías, en donde entran: la geometría “Euclidiana”, “hiperbólica” y la “esférica”. <<Figura-4>>

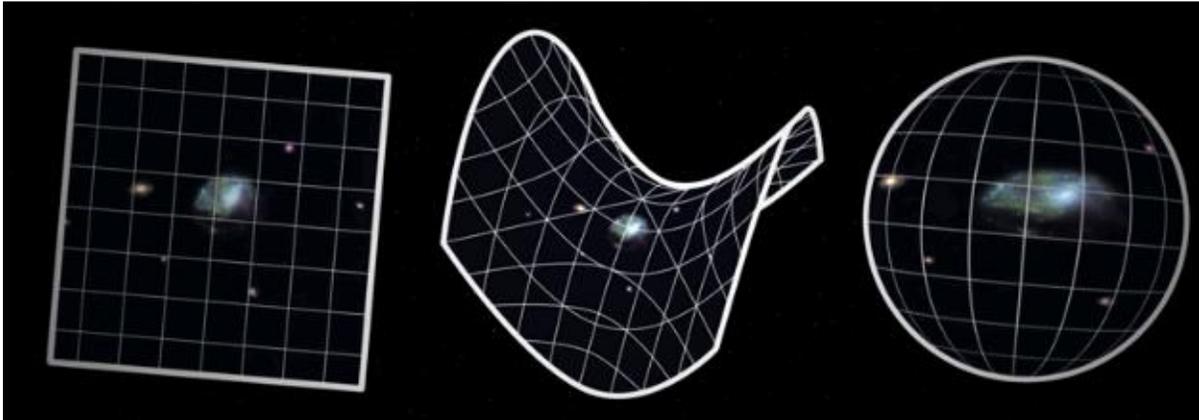
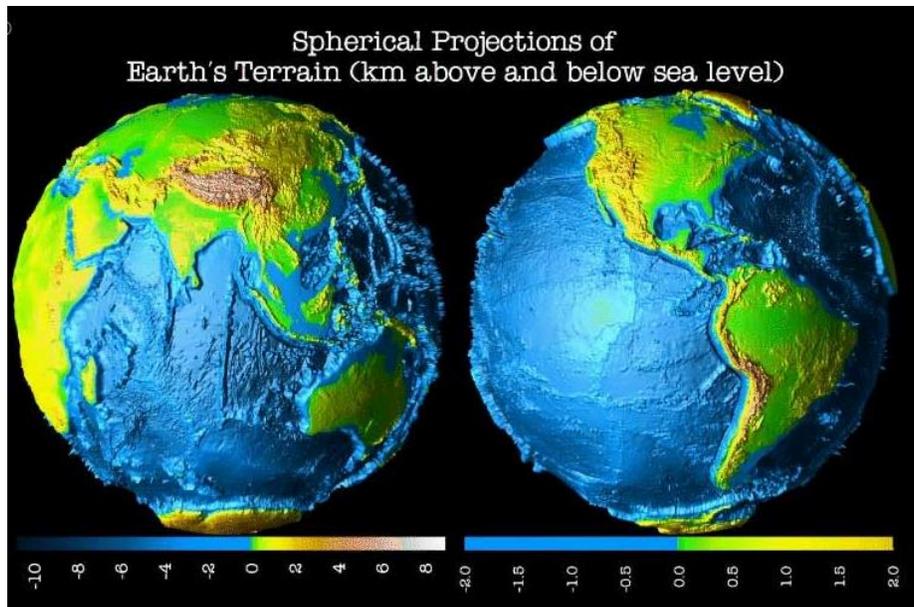


Figura-4 (euclidiana, hiperbólica y esférica respectivamente)

Pero si nuestro universo tendría alguna de las dos primeras (es decir, euclidiana o hiperbólica) nuestro universo sería infinito de tal manera que nunca dejaríamos de encontrar y descubrir nuevas galaxias (pues estaríamos hablando de cantidades transfinitas o números más grandes que cualquier número natural). Sin embargo, si resulta que nuestro universo tiene curvatura esférica sucedería que viviríamos en un universo circun-navegable que no tiene infinitas galaxias, ni planetas, pero se repetiría todas las posiciones.

Por otra parte, cuando nos centramos en los dos primeros, pensamos ya en conjunto que estamos hablando de espacios infinitos, por lo que ¿como se obtuvo esta conclusión? La respuesta tiene que ver con las técnicas y métodos que se apliquen para medir la percepción de la luz, para esto, usan la radiación de fondo de microondas <<en inglés, cosmic microwave background (CMB) y es una forma de radiación electromagnética descubierta en 1965 que llena el universo por completa. También se denomina radiación cósmica de microondas, radiación cósmica de fondo o radiación del fondo cósmico>>. Pero para obtener este resultado estamos de acuerdo con que la radiación (de luz) que se obtuvo tuvo que hacer un viaje muy largo para poder llegar hasta nuestros instrumentos, por lo que se genera un fenómeno denominado como: “*curvatura esférica o hiperbólica*” dependiendo del caso en el que estemos hablando. Y al fin, de este resultado se puede concluir que se tiene un margen de error muy pequeño, pero recordemos que estamos hablando del universo y de espacio infinitos, por lo que este margen de error llega a generar bastante incertidumbre en la comunidad científica en la percepción de la curvatura en la radiación cósmica de microondas.

Pero por otra parte si nos proyectamos en nuestro planeta Tierra y alzamos la vista a la lejanía nuestra percepción sería que la Tierra es plana, cuando como lo mencionamos desde el inicio de este trabajo el modelo propuesto por Ptolomeo, no lo es, y es una roca bastante grande y redonda (en la siguiente imagen se puede apreciar a la tierra sin océanos).



Y es por este motivo es que el doughnut aún no se descarta por la comunidad científica, pues podríamos estar en un caso similar, solo que a escalas mayores.

Conclusión:

Como vemos a lo largo de este trabajo, solo podemos concluir que, por lo que sabemos actualmente del universo es que podría tener cualquier forma. Y es más, podrían proponerse nuevos modelos donde se plantean formas más atractivas de tal manera que proponen un universo “con asas (Parte que sobresale del cuerpo de una vasija, de una cesta, de una bandeja, etc., generalmente de forma curva o de anillo, y sirve para asir el objeto a que pertenece)”. Un plano con media rosquilla que conecte un lado con el otro y que, de hecho, permite transportarse de un lado da la cara a la otra.

Bibliografía:

- Maria Pilar Piñones Contreras. (2012). La ciencia de las cenizas: el heliocentrismo geométrico al universo infinito de Giordano Bruno. Facultad de Ciencias: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Quantum Fracture. (15 de Junio del 2017). ¿Tiene el universo forma de donut?. 13 de Mayo del 2018, de YoutubeEDU Sitio web: <https://www.youtube.com/watch?v=YJHvMB50x58&t=0s&list=WL&index=61>
- Victoria Pérez. (6/29/17). Un donut, una silla de montar y otras sorprendentesteorías que intentan explicar la forma del Universo. 13 de Mayo del 2018, de Gizmodo Sitio web: <https://es.gizmodo.com/un-donut-una-silla-de-montar-y-otras-sorprendentes-teo-1796416676>
- Marta Macho Stadler. (Febrero 2012). Topología general. Managua: Facultad de Ciencia y Tecnología Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 11

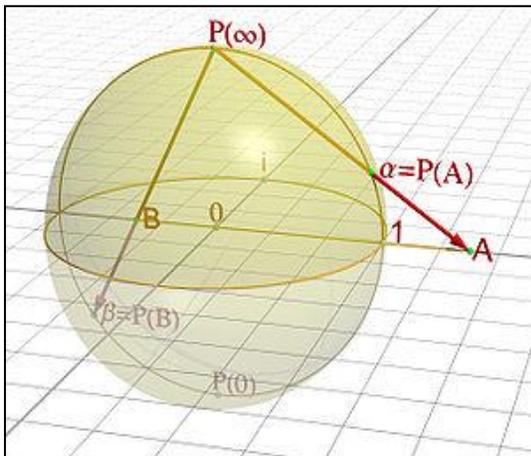
PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Ana Cristina Cabral Álvarez, Laura Margarita Hernández Espinosa, Candy Soto
Betancourt. MC. Adriana Escobedo Bustamante.

ana171296@gmail.com, sobc980202mdgtn05@gmail.com,

laura.m.hernandez.e@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango.
Geometría



Definición:

Una carta geográfica es una representación en un plano de toda o solo una parte de la superficie terrestre.

Las curvas que se encuentran sobre la superficie de la tierra (como líneas costeras, ríos o líneas fronterizas) se representan en el plano por curvas correspondientes.

Permite la representación de objetos tridimensionales en una superficie de dos dimensiones.

Cualquiera que sea el sistema de proyección elegido, la representación plana presenta deformaciones que pueden ser lineales, angulares y superficiales.

Dicha proyección hace corresponder a cada punto α de la esfera, distinto de $P=P(\infty)$, el punto A que es intersección de la recta $P\alpha$ con el plano.

Recíprocamente a cada punto A del plano le corresponde el único punto α , distinto de P , que es la intersección de la esfera con la recta PA .

La proyección estereográfica se emplea en la mecánica de Rocas, ya desde los años setenta del siglo pasado, para el estudio de la estabilidad de los taludes. Asimismo, la Geología Estructural la emplea para la representación de planos y la Mineralogía como forma gráfica de dibujar la estructura cristalina de los cuerpos minerales. También es empleada en estudios de la anisotropía de la transmisividad de flujos en acuíferos, en Geofísica, en el reconocimiento de diaclasas de macizos rocosos, etc.

Algunos matemáticos ya han trabajado sobre estas proyecciones estereográficas con algunas aplicaciones, pero uno de los más sobresalientes es Ludwig Schläfli (1814-1895). Él ha sido consciente de que, si bien nuestro espacio físico es de tres dimensiones, no hay nada que impida imaginar un espacio de 4 dimensiones e incluso demostrar teoremas de geometría relativos a objetos matemáticos de esta dimensionalidad.

Propiedades:

1. Conserva las relaciones angulares, de forma que el ángulo entre tangentes en el punto de intersección de dos círculos máximos que se cortan, es el mismo ángulo que el formado por los dos planos representados mediante sus círculos máximos.
2. No conserva el área. Esto quiere decir que las proyecciones de dos círculos idénticos inscritos en diferentes partes de la esfera de proyección, aparecen en el estereograma como círculos de tamaños diferentes. La proyección estereográfica de un círculo, puede variar en área dependiendo del lugar donde se proyecta. Un círculo de área conocida, aparece más grande si se proyecta cerca de la primitiva.
3. Las circunferencias sobre la superficie de la esfera que pasan por el centro de la proyección se proyectan sobre rectas en el plano de proyección y viceversa.
4. Las circunferencias sobre la superficie de la esfera que no pasan por el centro de la proyección se proyectan sobre circunferencias en el plano de proyección y viceversa.

La Geometría sagrada y los sólidos platónicos

Hace 36 siglos los egipcios y los chinos estudiaron la geometría, las formas y las figuras como expresiones matemáticas de cómo la materia se presenta en el universo. Los escritos más antiguos datan el siglo XV a.C. Los antiguos egipcios tenían grandes temas de estudios la Aritmética, y otros de conocimientos superiores, la astronomía, la música y la geometría. La geometría era considerada como sagrada y como la ciencia modelo.

Los antiguos Griegos como Platón, Pitágoras, Euclides, y algunos más recientemente otros ampliaron ese conocimiento.

Hay 7 formas principales dentro de la geometría sagrada los 5 sólidos platónicos, la esfera, y espiral.

Los sólidos platónicos:

El cubo, el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro, y el icosaedro, son formas completamente simétricas, que tiene todos los lados y ángulos iguales, son de las mismas medidas y todos caben dentro de la matriz universal, que es la esfera.

El tetraedro:

Es triángulo con base, representa la conciencia del fuego, tiene 6 aristas 4 caras triangulares y 4 vértices, y es símbolo de la sabiduría por representar al fuego sagrado, el primer elemento.

El cubo:

Con 12 Aristas, 6 caras cuadradas y 8 vértices, representa el secreto del mundo natural, es la conciencia de la tierra, es la experiencia de lo que ha nacido de la naturaleza.

El octaedro:

Con 12 aristas, 8 caras triangulares y 6 vértices, es el aire, es como dos pirámides invertidas unidas en sus bases, simboliza la perfección de la materia por el espíritu.

El icosaedro:

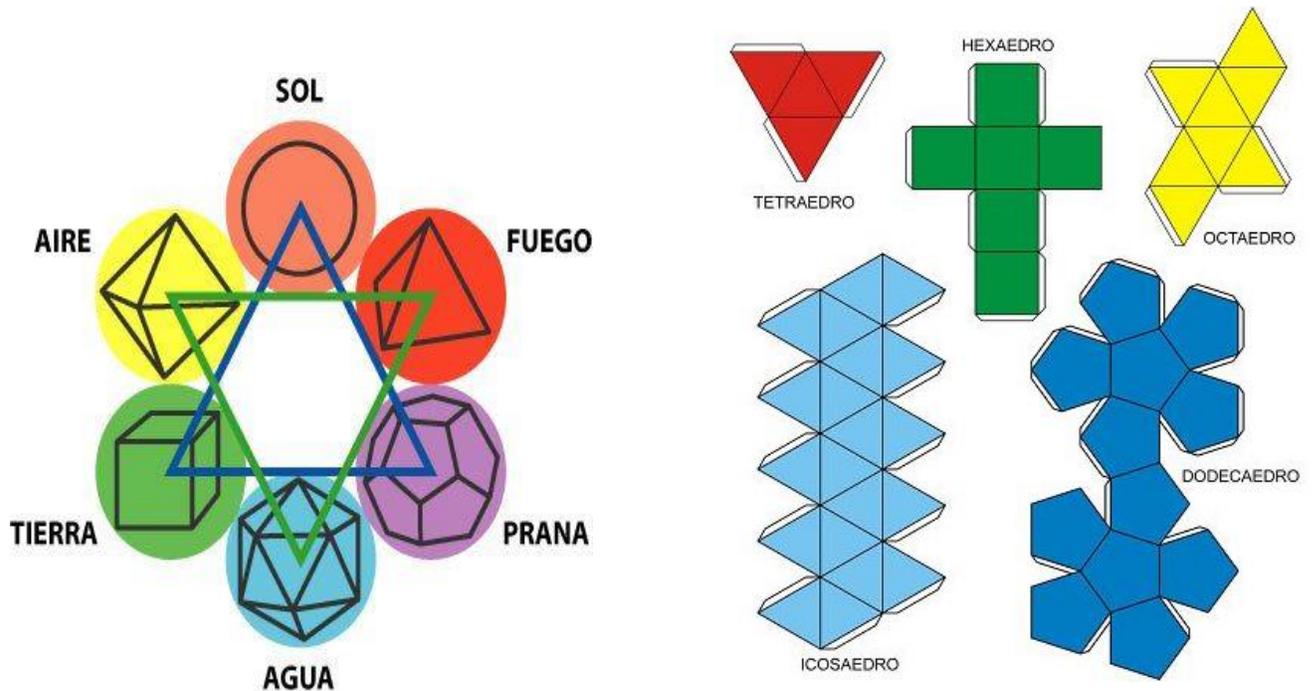
Con 30 aristas 20 Caras triangulares y 12 vértices es la conciencia del agua, representa la semilla de la vida, la forma del universo, es lo masculino.

El dodecaedro:

Con 30 aristas 12 caras pentagonales y 20 vértices, el quinto elemento, éter, es considerado el poder femenino de la creación y la forma madre.

Es así, que la creación juega transformándose de una forma a otra intercambiándose y también pasando por los otros sólidos platónicos y todos ellos caben en la esfera, que es la unidad.

Ahora, esto se relación con las proyecciones estereográficas, porque, como podemos observar, los sólidos platónicos, por poder contenerse en una esfera, también pueden ser representados en el plano.



Referencias Bibliográficas:

http://www.competentis.es/gie74/files/data/85-2008_09_estereo_jornadasupm.pdf

<https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/21681/1/29.pdf>

<https://www.gaussianos.com/tag/proyeccion-estereografica/>

<https://acomplejadosffjc.wikispaces.com/Proyecci%C3%B3n+Estereogr%C3%A1fica>

<https://www.youtube.com/watch?v=T2yajbLN0W8>

<https://www.youtube.com/watch?v=iVNt1NuU0hE>

Variable Compleja; George Poyla Gordon Latta; Noriega Limusa

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 12

LAS MATEMÁTICAS Y EL ADN

Héctor Alan Olvera Martínez. Dr. Ricardo Isaac Bello Aguirre.

alanolvera1234@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango.

Topología

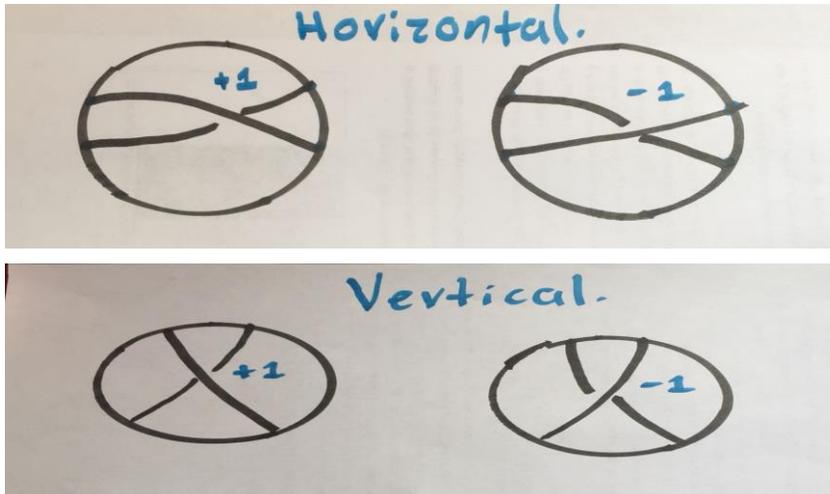
Cuando escuchamos hablar sobre las matemáticas, ¿qué es lo primero que se viene a la mente? Mucha gente podría responder cosas como: ecuaciones, teoremas, números, etc. Y aunque no está mal, ¿qué tal hablar sobre nudos? sí, sobre nudos, como los que se hacen cuando sacamos nuestros auriculares del bolsillo, o esa época decembrina donde tenemos que sacar las series navideñas y se encuentran tan enredadas que parece casi imposible desenredar. Se tratará de exponer a grosso modo qué tienen que ver las matemáticas con los nudos y algunas aplicaciones.

Para entender un poco más acerca de esto empezaremos definiendo que es un enredo racional el cual, su definición fue propuesta por el matemático John Conway en los años setenta, veremos cuáles son sus características y así podremos ver más adelante que tienen que ver con otra área de las ciencias que a priori parece no tener nada que ver con las matemáticas como sería la biología.

¿Qué es un enredo racional? Imagina que tienes dos cuerdas, y cada una está pegada en sus extremos dentro de una esfera sin estar fijas, así que se pueden deslizar fácilmente dentro de ella.



Como podemos observar, las dos cuerdas están acomodadas de una manera semejante pero una verticalmente y otra horizontalmente de tal forma que ninguna se cruza, a una de estas le denominaremos el enredo cero y a la otra el enredo infinito. A partir de aquí existen dos maneras (vertical y horizontal) de hacer un enredo a las cuerdas. Empezaremos por la posición horizontal: imagina que tomas los extremos del lado izquierdo de las cuerdas y los giramos en sentido anti-horario, a ese nudo le corresponderá un más uno (+1), y si lo giramos 180 grados en sentido horario, a ese nudo le asignaremos un menos uno (-1), a este tipo de posiciones las llamaremos giros horizontales. De igual manera para el sentido vertical, si tomamos los extremos superiores de las cuerdas y las giramos 180 grados en sentido anti-horario, a ese enredo lo ubicaremos con un más uno (+1), y también, si giramos 180 grados en sentido horario, le asignaremos un menos uno (-1), a estos los llamaremos giros verticales.



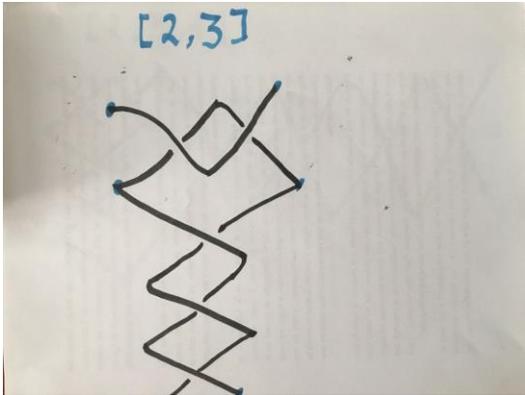
Usando esto, podemos conseguir giros que tengan su propio nombre, es decir: si hacemos nudos con un solo giro le corresponderá el número uno, y con dos giros le corresponderá el dos, y así sucesivamente, aplica para los casos horizontales y verticales. La cosa se pone más interesante si empezamos a alternar los giros, es decir: giro horizontal, giro vertical, giro horizontal, giro vertical y así sucesivamente. A cada uno de estos lo llamaremos un enredo racional; porque a cada enredo le corresponde uno y solo un número racional (teorema del enredo racional). El número del nudo resulta de una fracción continua, aquí va la regla: empieza con una cantidad cualquiera de nudos horizontales y empieza a alternar (H,V,H,V...) si terminas con un nudo vertical (H,V,H,V). Entonces la fracción continua se verá de la siguiente manera:

$$0 + \frac{1}{\text{último} + \frac{1}{\text{penúltimo} + \frac{1}{\text{antepenúltimo} + \dots + \frac{1}{\text{primero}}}}}$$

En cambio, si el último nudo que hiciste es horizontal (H, V, H, V, H). Entonces la fracción continua queda de la siguiente manera:

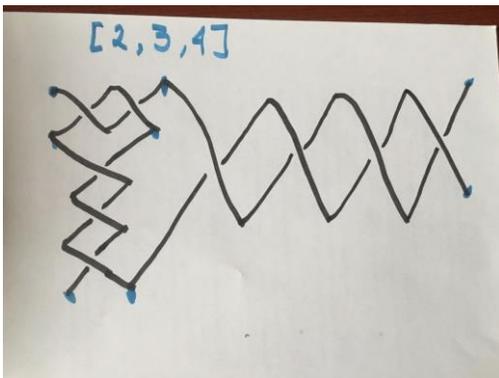
$$\text{último} + \frac{1}{\text{penúltimo} + \frac{1}{\text{antepenúltimo} + \dots + \frac{1}{\text{primero}}}}$$

Por ejemplo: usaremos un nudo que tenga 2 giros horizontales seguidos de 3 giros verticales (2,3). Como terminó en vertical entonces quedará de la siguiente manera:



$$0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

Lo cual nos da un total de $\frac{2}{7}$. Ahora le agregamos 4 giros horizontales (2,3,4), como termina en horizontal la fracción quedará de la siguiente manera:



$$4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}$$

Esta fracción nos da un total de $\frac{30}{7}$. Ahora bien, esta fracción también se puede ver como muchas otras combinaciones de suma de fracciones como las que hemos estado haciendo, siempre que el resultado de la suma que hemos estado haciendo sea igual a otra, eso significa que los nudos que forman esas fracciones, son topológicamente equivalentes.

Ahora bien, ¿qué tiene que ver todo esto con las matemáticas? pues bien, si analizamos bien la forma que tiene lo que tiene todo nuestro núcleo genético el cual es conocido como ADN veremos que sus formas son semejantes a las de unas ligas las cuales pueden estar enredadas o desenredadas.

Ahora que ya sabemos la forma del ADN, toca ver que es; es un ácido nucleico que contiene las instrucciones genéticas usadas en el desarrollo, funcionamiento de todos los organismos vivos, incluyendo algunos virus. El ADN se divide con la mitosis y la meiosis dando así origen a nuevos organismos celulares, pero hay veces en los que las cadenas de ADN vienen enredadas y no se puede dividir para crear nuevos organismos, cuando esto pasa vienen enzimas llamadas topoisomerasa, que son capaces de actuar sobre la topología

del ADN, ya sea enredándolo para permitir que se almacene de manera más compacta o desenredándolo para que controle la síntesis de proteínas y para facilitar la replicación del mismo. Es el equivalente a que dos nudos estén enredados y los cortemos con unas tijeras para así liberarlos, en ese caso, las tijeras son la topoisomerasa. Aunque si bien la topoisomerasa nos ayuda a desenredar al ADN para la replicación de células, hay algunas células que nos conviene que mejor se queden enredadas, como serían las células del cáncer. En algunos centros de investigación, por ejemplo, en El Paso, Texas, hay incluso colaboración con investigadores de la UNAM para investigar las relaciones entre nudos topológicos y el ADN. Las matemáticas están presentes en todos lados, es fácil reconocerlas en la física, química, inclusive en las artes, pero vale la pena observarla e identificarla en la naturaleza y, por ende, en la biología y la medicina.

Bibliografía:

<https://www.youtube.com/watch?v=JXGyXtNsu14>.

Isabel K. Darcy. (2006). Modeling protein–DNA complexes with tangles. 2008, de ScienceDirect Sitio web: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122107005718>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 13

LOS TRES FAMOSOS TEOREMAS DE SYLOW

Eybette Mercado Favela

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 14

RUTA OBLIGADA DE LONGITUD MÍNIMA

Elisa Salcedo Talamantes, Martha Patricia Galindo Solís, Brayam Antonio Moreno González. Dra. Alicia López Betancourt

elisa_st_1995@hotmail.com, paty_dance89@hotmail.com, brayam-02@hotmail.com

Facultad de Ciencias Exactas

Análisis Numérico

Introducción

A menudo nos encontramos con problemas del mundo real que requieren de soluciones matemáticas, pero estas soluciones no siempre se dan de manera analítica o exacta, entonces para dar mejor solución a estos problemas haremos uso de una gran herramienta que nos ofrece la matemática los métodos iterativos, aunque estos ya se utilizaban desde la antigüedad, por ejemplo en año 100 A.C Herón hizo uso de estos métodos para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo.



En este trabajo se abordará el tema de resolución de raíces de polinomio, en donde se aplicarán los métodos de: Newton Raphson, Bisección, Secante y Regla falsa para dar solución al problema de *Ruta obligada de longitud mínima* y posteriormente poder concluir la eficiencia de cada uno.

Si una ecuación algebraica o trascendente es relativamente complicada, no resulta posible por lo general hallar raíces exactas. Es más, en algunos casos las ecuaciones tienen coeficientes conocidos sólo de forma aproximada, por tanto, carece de sentido tratar de hallar las raíces exactas de la ecuación. Por consiguiente, adquiere particular importancia los procedimientos de cálculo aproximado de raíces de una ecuación así como la estimación de su grado de exactitud.

Los métodos numéricos diseñan técnicas para aproximar, de una manera eficiente, las soluciones de problemas expresados matemáticamente. La eficiencia del método depende tanto de la precisión que se requiera como de la facilidad con la que pueda implementarse. En una situación práctica, el problema matemático se deriva de un fenómeno físico sobre el cual se han hecho algunas suposiciones para simplificarlo y para poderlo representar matemáticamente.

Comenzaremos a analizar uno de los problemas más básicos del análisis numérico: el problema de búsqueda de raíces. El problema consiste en encontrar los valores de la variable x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$, para una función f dada.

Un método iterativo es un método que progresivamente va calculando aproximaciones a la solución de un problema. En Matemáticas, en un método iterativo se repite un mismo proceso de mejora sobre una solución aproximada: se espera que lo obtenido sea una solución más aproximada que la inicial. El proceso se repite sobre esta nueva solución hasta que el resultado más reciente satisfaga ciertos requisitos. A diferencia de los métodos directos, en los cuales se debe terminar el proceso para tener la respuesta, en los métodos iterativos se puede suspender el proceso al término de una iteración y se obtiene una aproximación a la solución. Enseguida daremos una breve explicación de cómo funcionan los métodos de bisección, Newton-Raphson, regla falsa, secante y punto fijo.

Método de Bisección

El método requiere dividir repetidamente a la mitad los sub-intervalos de $[a, b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contiene a p . Para empezar, tomemos $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y p_1 el punto medio de $[a, b]$; o sea $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Si $f(p_1) = 0$, entonces $p = p_1$; si no, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces $p \in (p_1, b_1)$, y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$. Si $f(p_1)$ y $f(b_1)$ son del mismo signo, entonces $p \in (a_1, p_1)$, y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$. Ahora re-aplicamos el proceso al intervalo $[a_2, b_2]$. Y así hasta que se encuentra $f(p) = 0$ o el i -ésimo intervalo $[a_i, b_i]$ es más pequeño que una tolerancia TOL prefijada, o hasta que se cumpla alguna otra condición de paro.

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson (o simplemente Newton) es uno de los métodos numéricos más conocidos y poderosos para la resolución del problema de búsqueda de raíces de $f(x) = 0$.

El método de Newton-Raphson implica el generar la sucesión $\{p_n\}$ definida por



$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Geoméricamente, el método de Newton es equivalente a sustituir un arco pequeño de la curva $y = f(x)$ por una tangente trazada por un punto de la curva. Supongamos, por definición, que $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$ y $f(b) > 0$.

Método de Regla Falsa

Es una versión mejorada del Método de Bisección. Este método une los puntos extremos del intervalo con una línea recta, y la intersección de la misma con el eje "X" proporciona una mejor estimación de la raíz.

Al reemplazar la curva de la función, por una recta, da una posición falsa de la raíz. También se conoce como Interpolación Lineal. El Algoritmo es idéntico al del Método de Bisección. Sólo cambia la manera de hallar X_r .

Método de Secante

Un procedimiento más rápido para hallar una raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ que caiga en un intervalo especificado $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. En lugar de dividir por la mitad el intervalo $[a, b]$ (método de bisección), es mejor dividirlo en la relación $-f(a) : f(b)$. Esto ofrece un valor aproximado de la raíz

$$p_1 = a + h_1 = b - \tilde{h}_1$$

Siendo

$$h_1 = -\frac{f(a)}{-f(a)+f(b)}(b-a) \quad \tilde{h}_1 = -\frac{f(b)}{-f(a)+f(b)}(b-a)$$

Aplicando este procedimiento al intervalo $[a, p_1]$ o $[p_1, b]$ en cuyos extremos la función $f(x)$ tenga signos opuestos, se tiene una segunda aproximación p_2 de la raíz, etc. Este método es conocido con el nombre de método de las partes proporcionales o método de la secante.

Método de Punto Fijo

Método para determinar la solución de una ecuación que se expresa, para alguna función g , de la forma

$$g(x) = x.$$

A una solución de esta ecuación se le llama un punto fijo de la función g . Si para cualquier función g dada se puede encontrar un punto fijo, entonces cada problema de búsqueda de las raíces de $f(x) = 0$ tiene soluciones que corresponden precisamente a los puntos fijos de $g(x) = x$ con $g(x) = x - f(x)$. La primera tarea, entonces, es decidir cuándo una función tendrá un punto fijo y como se pueden determinar (es decir, aproximar con suficiente grado de precisión) dichos puntos fijos.

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos. Es la proposición más conocida entre las que tienen nombre propio en la matemática.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Razones Trigonométricas

$$\sin\theta = \frac{CO}{H} \quad \cos\theta = \frac{CA}{H} \quad \tan\theta = \frac{CO}{CA} \quad \csc\theta = \frac{H}{CO} \quad \sec\theta = \frac{H}{CA} \quad \sin\theta = \frac{H}{CA} \quad \sin\theta = \frac{CA}{CO}$$

Problema Propuesto

Un cruce de dos carreteras perpendiculares entre sí, se va a modificar para tener un paso obligado junto a un monumento histórico en el punto P (Figura 1) (Gómez García, 2009, Pág. 257)

1. ¿Cuál es la longitud mínima de la ruta de la recta AB que pase por P?
2. ¿En dónde pueden emplazarse los puntos de entronque A y B?

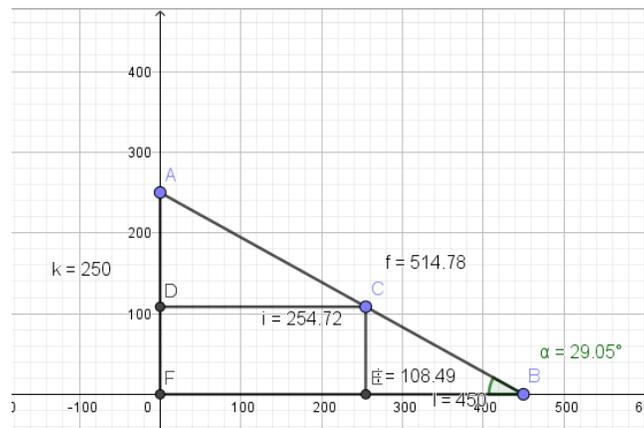


Figura 1. Cruce de dos carreteras perpendiculares.

Solución al problema

1. ¿Cuál es la longitud mínima de la ruta de la recta AB que pase por P?
Como se observa en la Figura 1 se forman dos triángulos rectángulos, utilizando las razones trigonométricas para triángulos rectángulos (Figura 2) tenemos que:

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$



Figura 2. Triángulo rectángulo.

Sea θ el ángulo A, entonces

$$L = AB = AP + BP = 108\csc\theta + 256\sec\theta$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -108\csc\theta\cot\theta + 256\sec\theta\tan\theta = -108\frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 256\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-108\cos^3\theta + 256\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

Para minimizar L la derivada se iguala a cero

$$\frac{dL}{d\theta} = -108\cos^3\theta + 256\sin^3\theta = 0 \quad \tan^3\theta = \frac{108}{256} = \frac{27}{64} \quad \tan\theta = \frac{3}{4}$$

Con el ángulo θ : cateto opuesto = 3, cateto adyacente=4, hipotenusa=5, entonces

$$L_{min} = 108\csc\theta + 256\sec\theta = 108\frac{5}{3} + 256\frac{5}{4} = 500$$

2. ¿En dónde pueden emplazarse los puntos de entronque A y B?

Para dar respuesta a ésta pregunta haremos uso del siguiente resultado

Criterios de semejanza

Teorema 1. Dos triángulos son semejantes si tienen 2 ángulos homólogos (Figura 4).

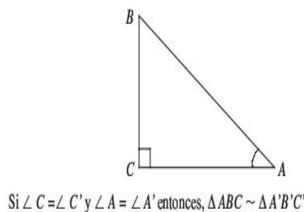


Figura 4. Teorema 1.

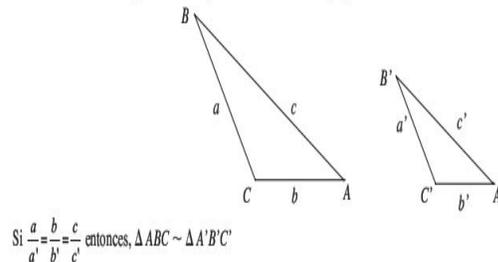


Figura 5. Teorema 2.

Teorema 2. Dos triángulos son semejantes si sus 3 lados son proporcionales (Figura5).

Teorema 3. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales (Figura 6).

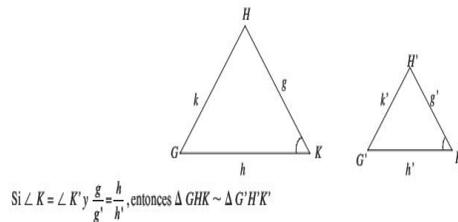


Figura 6. Teorema 3.

$$\frac{y}{256} = \frac{108}{x} \quad y = \frac{276498}{x}$$

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Figura 7.)

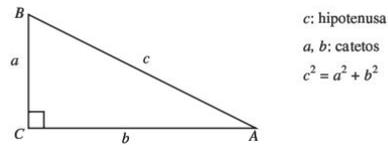


Figura 7. Triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras)

Haciendo uso de este resultado tenemos que:

$$(x + 256)^2 + (y + 108)^2 = 500^2$$

$$(x + 256)^2 + \left(\frac{276498}{x} + 108\right)^2 = 500^2$$

Se produce un polinomio de cuarto grado (Figura 8.)

$$x^4 + 512x^3 - 172800x^2 + 5971960x + 764411904 = 0$$

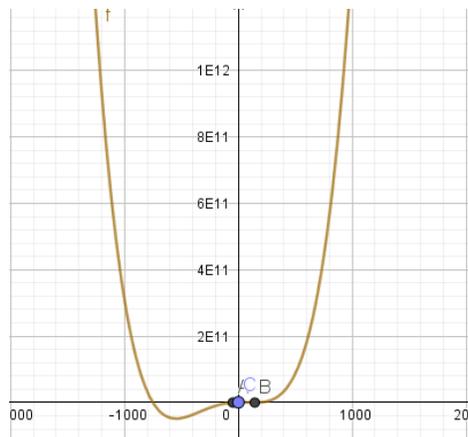


Figura 8. Gráfica del polinomio de cuarto grado.

Ahora utilizaremos los métodos de bisección, Newton-Raphson y secante para poder resolver la ecuación de cuarto grado, aplicando una tolerancia igual a 0 y 30 iteraciones cada una, igualmente, si se cumple la condición de tolerancia el programa se detendrá

Método de Bisección

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	b	c	f(a) ⁿ /f'(a)	r	s				
2	0	200	100	187746217665612400	100	200				
3	100	200	15000	1284882540335650800000	15000	200				
4	15000	200	7600	1857697768786662500000	7600	200				
5	7600	200	3900	9201138386997443000000	3900	200				
6	9900	200	2050	5534295175599173000000	2050	200				
7	2090	200	1125	4527181479509042000000	1125	200				
8	1125	200	662.5	9731233063476916000000	662.5	200				
9	662.5	200	431.25	1266901334823959100000	431.25	200				
10	431.25	200	315.63	5368319630570180400000	315.63	200				
11	315.63	200	257.81	459458725994427600000	257.81	200				
12	257.81	200	228.91	79744537296959420000	228.91	200				
13	228.91	200	214.45	2479772593223560000	214.45	200				
14	214.45	200	207.23	12398024719075691000	207.23	200				
15	207.23	200	203.61	8415757438212827000	203.61	200				
16	203.61	200	201.81	6847060004308999000	201.81	200				
17	201.81	200	200.9	615425939694642000	200.9	200				
18	200.9	200	200.45	5829136453143750000	200.45	200				
19	200.45	200	200.23	567166494418930000	200.23	200				
20	200.23	200	200.11	5594239726889616600	200.11	200				
21	200.11	200	200.06	5555813713029145500	200.06	200				
22	200.06	200	200.03	5536661183773100000	200.03	200				
23	200.03	200	200.01	5527154243091151000	200.01	200				
24	200.01	200	200.01	5522385598054310400	200.01	200				
25	200.01	200	200	5519982481153221800	200	200				
26	200	200	200	5518791224018397400	200	200				
27	200	200	200	5518195670768836400	200	200				

Métodos Iterativos

Introduzca la ecuación
 $0x^5 + 1x^4 + 512x^3 + -172800x^2 + -971960x + -411904 = 0$

Elija el método a usar Iteraciones Error Intervalo Valor Inicial
 Biseccion 20 0 100 200 0

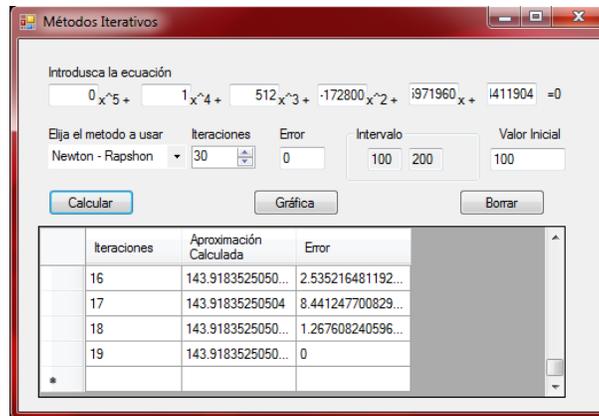
Calcular Gráfica Borrar

Iteraciones	Aproximación Calculada	Error
17	199.9992370605...	0.000762939453...
18	199.9996185302...	0.000381469726...
19	199.9998092651...	0.000190734863...
20	199.9999046325...	9.536743164062...

Método de Newton Raphson

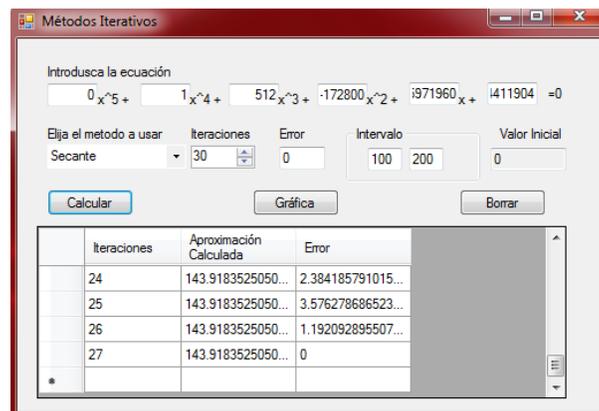
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		punto inicial	100						
2									
3	ITERAS	ITERASIONES	ITERASIONES	ITERASIONES	ITERASIONES	ITERASIONES	ERROR ABS	error relativo	
4	1	100	245608704	-9228032	81600	134.81	134.03	17183.01	
5	2	134.81	13764045.24	-2904229.47	286605.19	143.71	142.93	18324.48	
6	3	143.71	14411.9	-99625.63	343714.04	144	143.22	18361.5	
7	4	144	0.01	-91.14	345598.28	144	143.22	18361.54	
8	5	144	0	0	345600	144	143.22	18361.54	
9	6	144	0	-0.01	345600	144	143.22	18361.54	
10	7	144	0	-0.01	345600	144	143.22	18361.54	
11	8	144	0	-0.02	345600	144	143.22	18361.54	
12	9	144	0	-0.05	345600	144	143.22	18361.54	
13	10	144	0	-0.05	345600	144	143.22	18361.54	





Método de Secante

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	b	f(a)	f(b)	c					
2	140	145	2695424	173889	145.34					
3	145.34	140	315159.59	2695424	146.05					
4	146.05	145.34	737381.4	315159.59	144.82					
5	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
6	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
7	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
8	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
9	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
10	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
11	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
12	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
13	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
14	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					
15	0.13	0.33	-0.12	-0.11	0.1					



Conclusiones

Los resultados fueron los siguientes, se obtiene que de nuestro polinomio de cuarto grado la raíz positiva

$$x = 144 \quad y = \frac{276498}{x} = \frac{276498}{144} = 192$$

Entonces la respuesta es:

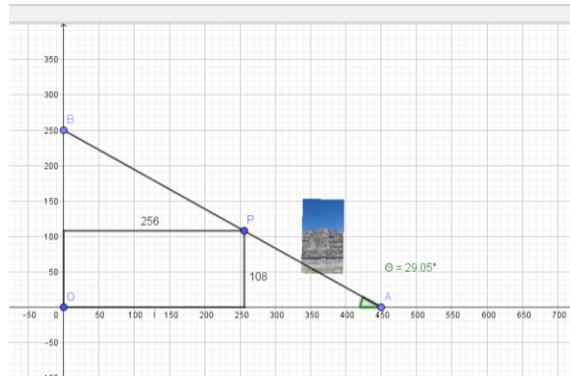
El punto A se localiza 400 a la derecha del cruce O

El punto B se localiza a 300 arriba del cruce O

Entonces las respuestas a las dos preguntas planteadas al principio son los siguientes resultados.

La primera pregunta planteada era, ¿Cuál es la longitud mínima de la recta AB que pasa por P?, decimos que el punto A se localiza 400 unidades a la derecha del cruce O.

La segunda pregunta planteada fue, ¿En dónde deben emplazarse los puntos de entronque A y B?, los resultados obtenidos fueron que el punto B se localiza a 300 unidades arriba del cruce O



Observando los programas de los métodos iterativos obtenemos que el más eficiente para nuestra ecuación es a del método de Newton – Raphson, ya que es más preciso que acertó a una tolerancia de cero y con menos iteraciones.

Bibliografía

Gómez García, D.(2009). *Raíces de polinomios cálculo numérico y aplicaciones*. Centro de investigación en matemáticas aplicadas. CIMA.

Aguilar-Márquez, A., Bravo-Vázquez,F.,Gallegos-Ruiz,H.,Cerón-Villegas,M. y Reyes-Figueroa,R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson Educación, México, 2009.

Métodos iterativos para resolver sistemas lineales (Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM), 17 de Julio 2009. Recuperado de:

<http://www.mty.itesm.mx/dmti/materias/ma2008/lecturas/ma2008-09a.pdf>

Curso de métodos numéricos segunda parte (solución aproximada de ecuaciones de una variable), s.f. Recuperado de:

<http://www.ehu.eus/~mepmufov/html/Parte2.pdf>

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 15

PRESENTACIÓN DE UN GRUPO

Gerardo Ismael Salazar Herrera. Dra. Alejandra Soria Pérez
salazar.gerardo117@gmail.com, alegodel@gmail.com
 Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas.

Topología algebraica

Un grupo G es libre si contiene un subconjunto propio S de tal manera que todo elemento de G puede escribirse en forma única como un producto finito de elementos de S y sus inversos. La intención del presente documento es dar una noción de grupo libre donde los conceptos empleados son conocidos y revisados en clase, sobre todo en álgebra moderna. Este tema es importante para explicar, por ejemplo, el teorema demostrado en 1930 por H. Seifert y E. Van Kampen. Dicho teorema proporciona un método bastante general para calcular grupos fundamentales de un espacio topológico X suponiendo como conocidos los grupos fundamentales de $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ donde cada U_j son subespacios abiertos y arco conexos de X . Además $U_1 \cap U_2$ es no vacío, arco conexo y X es unión de U_1 y U_2 . Para establecer con precisión el tema, necesitamos explicar cómo expresar un grupo en términos de generadores y relaciones.

Consideremos un conjunto S no vacío, y pensemos los elementos de S como símbolos no conmutativos. Mediante estos símbolos formamos *palabras*; estas son expresiones de la forma:

$$W = x_1^{\epsilon(1)} x_2^{\epsilon(2)} \dots x_k^{\epsilon(k)}$$

Donde cada $x_i \in S, \epsilon(i) = \pm 1$ y se permiten repeticiones. La *palabra vacía* es aquella que no tiene ningún símbolo. Decimos que una palabra es *reducida* si no contiene ningún símbolo x^1 seguido de x^{-1} o viceversa.

Usando la *yuxtaposición* de palabras reducidas como ley de composición y reduciendo la palabra resultante en caso de ser posible, resulta que el conjunto G de palabras reducidas en los símbolos de S forman un grupo. La palabra vacía actúa como elemento neutro, esto porque una palabra W yuxtapuesta con la palabra vacía es ella misma, y la inversa de una palabra

$$W = x_1^{\epsilon(1)} x_2^{\epsilon(2)} \dots x_k^{\epsilon(k)}$$

está dada por:

$$W^{-1} = x_k^{-\epsilon(k)} x_{k-1}^{-\epsilon(k-1)} \dots x_1^{-\epsilon(1)}$$

Así no importa de cual lado se haga la yuxtaposición, siempre se puede reducir a la palabra vacía, además cada palabra tiene su palabra inversa. A este grupo se le llama *Grupo libre generado por S* . Notemos que si S' es otro conjunto en correspondencia biyectiva con los elementos de S , los grupos generados por cada conjunto son isomorfos. Si S es un conjunto finito con n elementos, al grupo libre generado por S le llamaremos el *Grupo libre de n generadores*.

Observemos que el grupo libre con un generador $\{x\}$ consta de los siguientes elementos:

$$1, x^1, x^{-1}, x^1 x^1, x^{-1} x^{-1}, x^1 x^1 x^1, x^{-1} x^{-1} x^{-1}, \dots$$

Este grupo es isomorfo al grupo de los enteros Z . También podemos observar que el grupo libre de n generadores, para $n > 1$ es un grupo infinito no abeliano.

Ahora vamos a considerar las siguientes operaciones entre palabras:

1. intercalar xx^{-1} o $x^{-1}x$ en una palabra, donde $x \in S$

2. suprimir xx^{-1} o $x^{-1}x$ en una palabra, donde $x \in S$

Con estas operaciones podemos decir que dos palabras W, W' son equivalentes si y sólo si W' puede obtenerse a partir de W por un número finito de operaciones. Estas dos operaciones forman una relación de equivalencia, las cuales nos permite interpretar los grupos libres considerando sus clases de equivalencia. El conjunto de clases de equivalencia de palabras de S con la yuxtaposición, constituyen el grupo libre generado por S .

Supongamos ahora que R es un conjunto de palabras en S . Y consideremos las siguientes nuevas operaciones:

3. intercalar r o r^{-1} en una palabra, donde $r \in R$ 4. suprimir r o r^{-1} de una palabra, donde $r \in R$

Decimos ahora que dos palabras son equivalentes si y sólo si W' puede obtenerse a partir de W por un número finito de operaciones a partir de 1,2,3,4. Esto igualmente se trata de una relación de equivalencia y el conjunto de clases de equivalencia forman un grupo, con la yuxtaposición como ley de composición. Se dice que este grupo es el *Grupo con la presentación* $\langle S; R \rangle$, donde S es el conjunto de generadores y el conjunto R , las relaciones.

Finalmente veamos algunos ejemplos. Primero, el grupo con la presentación $\langle S; \emptyset \rangle$, es decir, sin ninguna relación, no es más que el grupo generado por S . Segundo $\langle \{x\}; \{x^n\} \rangle$, donde n es un entero positivo fijo. Este grupo consta de las palabras:

$$1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$$

El cual es isomorfo al grupo cíclico Z_n . Para el tercer ejemplo consideremos

$\langle \{x, y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle$. Resulta que $xy = yx$, esto porque:

$$xy = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}xy = yxy^{-1}x^{-1}xy = yxy^{-1}y = yx$$

Mediante operaciones 2 y 3. Notemos entonces que $x^a y^b = y^b x^a$ para todo par de enteros a y b , por lo tanto cualquier palabra $g = x^{a(1)}y^{b(1)}x^{a(2)} \dots x^{a(k)}y^{b(k)}$ puede reescribirse en la forma $g = x^a y^b$, donde $a = \sum_{i=1}^k a(i)$ y $b = \sum_{i=1}^k b(i)$. Así pues, el grupo

$\langle \{x, y\}; xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ es isomorfo a $Z \times Z$.

El grupo $\langle \{a, b\}; \{baba^{-1}\} \rangle$ es isomorfo al grupo $\langle \{a, c\}; \{a^2c^2\} \rangle$ para verlo definimos

$$f: \langle \{a, b\}; \{baba^{-1}\} \rangle \rightarrow \langle \{a, c\}; \{a^2c^2\} \rangle$$

Mediante $f(a) = a, f(b) = ca$ y en general mediante

$$f(x_1^{\epsilon(1)} x_2^{\epsilon(2)} \dots x_n^{\epsilon(n)}) = f(x_1)^{\epsilon(1)} f(x_2)^{\epsilon(2)} \dots f(x_n)^{\epsilon(n)}$$

Puesto que

$$f(baba^{-1}) = caaca^{-1} = ca^2c = ca^2c(cc^{-1}) = c(a^2c^2)c^{-1} = cc^{-1} = 1$$

Obtenemos una aplicación bien definida que es un homomorfismo. Si definimos

$$g: \langle \{a, c\}; \{a^2c^2\} \rangle \rightarrow \langle \{a, b\}; \{baba^{-1}\} \rangle$$

Mediante $g(a) = a, g(c) = ba^{-1}$, resulta también que g es una aplicación bien definida que es un homomorfismo.

Además $fg = 1$ y $gf = 1$ ya que

$$fg = f(g(a^2c^2)) = f(a^2b^2a^{-2}) = a^2(c^2a^2)a^{-2} = a^2a^{-2} = 1$$

$$gf = g(f(baba^{-1})) = g(ca^2c) = ba^{-1}a^2ba^{-1} = baba^{-1} = 1$$

Con lo que f y g son isomorfismos de grupo.

Referencias

Kosniowski, C.. (1986). Topología Algebraica. Barcelona-España: Reverté.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 16

EXTENSIÓN DEL CAMPO DE LOS COMPLEJOS

Ana Margarita García Terán

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 17

EL PROBLEMA DE LA BARRA PARCIALMENTE DENTRO DE UN TUBO

Abraham Duvany Mora Sarabia, Raúl Vargas Antuna. Dra. Alicia López Betancourt

duvalin_2486@hotmail.com, raul.vargas@cimat.mx

Facultad de Ciencias Exactas de la UJED

Análisis Numérico

Introducción

En este trabajo utilizaremos las ecuaciones de Newton del equilibrio estático aplicadas al problema de una barra parcialmente dentro de un tubo.

La utilidad de este tipo de problemas es en ramas muy avanzadas por ejemplo ver la manera de tener la menor cantidad de fricción posible en barras de uranio en una planta nuclear (García-Berrocal, Blázquez, Vallejo, Montalvo y Balbás, 2010)

En algunas ocasiones las ecuaciones que resultan de la modelación matemática de este tipo de problemas resultan ser demasiado complicadas y sin una solución algebraica general porque resultan ser ecuaciones de 6to grado o más, por esto utilizaremos los métodos iterativos y se comparará la eficiencia entre ellos. Los métodos que se utilizarán son: Newton-Raphson, Punto Fijo, Secante y Bisección, que se describen a continuación.

El método de **Newton-Raphson** consiste en aproximar una raíz utilizando dos puntos cercanos a la raíz que queremos encontrar. Las iteraciones se realizan con la siguiente fórmula.

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ una función derivable definida en el intervalo real $[a,b]$. Empezamos con un valor inicial x_0 y definimos para cada número natural n .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde f' denota la derivada de f .

El método de iteración de **punto fijo** requiere volver a escribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$. Llamemos x^* a la raíz de f . Supongamos que existe y es conocida la función g tal que:

$$f(x) = x - g(x), \quad \forall x \text{ del dominio.}$$

Entonces:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* - g(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = g(x^*).$$

Tenemos, pues, a x^* como punto fijo de g .

El método de la **secante** parte de dos puntos (y no sólo uno como el método de Newton) y estima la tangente (es decir, la pendiente de la recta) por una aproximación de acuerdo con la expresión:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación del método de Newton, obtenemos la expresión del método de la secante que nos proporciona el siguiente punto de iteración:

$$x_2 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

En la siguiente iteración, emplearemos los puntos x_1 y x_2 para estimar un nuevo punto más próximo a la raíz de acuerdo con la ecuación

El método de **Bisección** consiste en lo siguiente:

Debe existir seguridad sobre la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

A continuación se verifica que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Se calcula el punto medio m del intervalo $[a,b]$ y se evalúa $f(m)$ si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada.

En caso de que no lo sea, verificamos si $f(m)$ tiene signo opuesto con $f(a)$ o con $f(b)$.

Se redefine el intervalo $[a, b]$ como $[a, m]$ ó $[m, b]$ según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo.

Con este nuevo intervalo se continúa sucesivamente encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada.

Enseguida se explica el concepto de **equilibrio estático** es frecuentemente utilizado en física para describir el estado estacionario de un sistema, en el estado de equilibrio estático el sistema está en reposo o su centro de masas se mueve a velocidad constante.

Mas habitualmente se dice que un objeto está en equilibrio estático cuándo la suma de las fuerzas que actúan sobre él (fuerza neta o resultante) es igual a cero.

Problema

El problema consiste en resolver una situación en la que un ángulo determina la fricción que habrá de una pequeña barra de acero de 20'' de longitud y un tubo vertical de 3'' de diámetro, de tal manera que introduciremos parcialmente la barra en el tubo y se sostiene en equilibrio formando el Angulo antes mencionado con la horizontal, apoyándose claramente en una pared interna del tubo y el borde diametralmente opuesto al mismo (Gómez García, 2009) (Ver Figura 1).

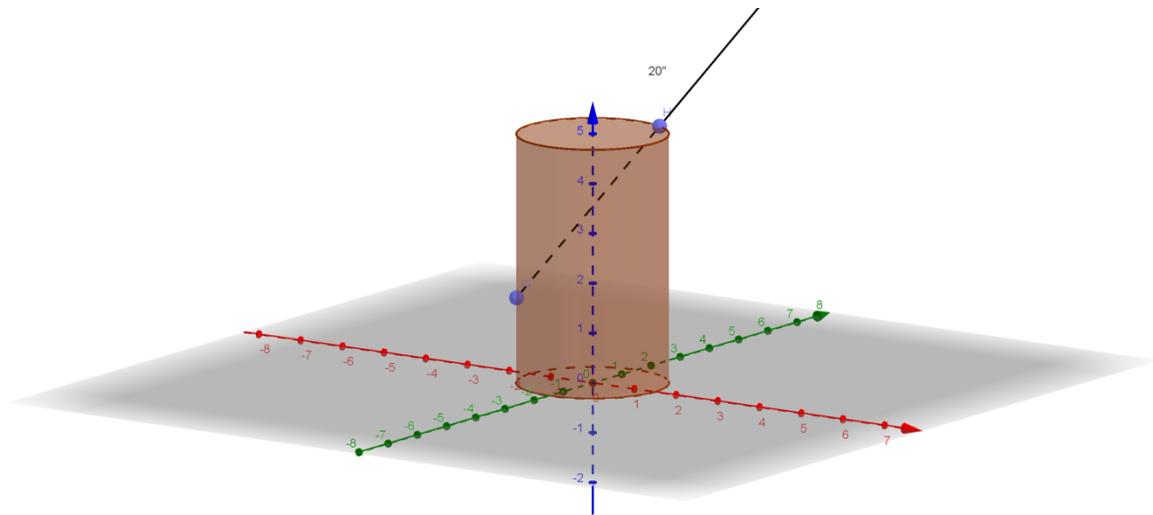


Figura 1. Barra Parcialmente Dentro de un Tubo

Tenemos 3 incógnitas a resolver con respecto al Angulo:

- El valor máximo del Angulo para que la barra no caiga dentro del tubo.
- El valor mínimo del Angulo para que la barra no caiga fuera del tubo.
- El ángulo de equilibrio en ausencia de fricción.

Explicación del problema.

Utilizaremos las ecuaciones de equilibrio estático

$$\Sigma F_x = N_A + 0.2N_B \cos\theta - N_B \sin\theta = 0$$

$$N_A = N_B(\sin\theta - 0.2\cos\theta)$$

$$\Sigma F_y = 0.2N_A + 0.2N_B \sin\theta - N_B \cos\theta - W = 0$$

$$N_B = \frac{W}{0.4\sin\theta + 0.96\cos\theta}$$

$$\Sigma M_A = N_B \frac{3}{\cos\theta} - W10\cos\theta = 0$$

Combinando estas expresiones

$$\left(\frac{3W}{\cos\theta(0.4\text{sen}\theta+0.96\cos\theta)}\right) - 10W\cos\theta = 0$$

$$3 - 10\cos^2\theta(0.4\text{sen}\theta + 0.96\cos\theta) = 0$$

$$3 - 9.6\cos^3\theta = 4\cos^2\theta\sqrt{(1 - \cos^2\theta)}$$

$$9 - 57.6\cos^3\theta + 92.16\cos^3\theta = 16\cos^2\theta\sqrt{(1 - \cos^2\theta)}$$

$$108.16\cos^6\theta - 16\cos^4\theta - 57.6\cos^3\theta + 9 = 0$$

Con $x = \cos\theta$ resulta el polinomio de sexto grado:

$$108.16x^6 - 16x^4 - 57.6x^3 + 9 = 0$$

Se aplicó el método de iteración de Newton-Raphson con una tolerancia del 0.1% con un máximo de 10 iteraciones, tomando los valores iniciales de 0.6 y 0.8. A la ecuación:

$$f(x) = 108.16x^6 - 16x^4 - 57.6x^3 + 9$$

$$f'(x) = 648.96x^5 - 16x^4 - 57.6x^3 + 9$$

Las soluciones son:

					tol
0.6	-0.4689	-25.5689	0.5817		0.01
0.5817	0.022	-27.8497	0.5825		0.01
0	0	0	0		0.01

$$\theta = \arccos(0.5825) = 54.48^\circ$$

					tol
0.8	1.3087	69.2912	0.7811		0.01
0.7811	0.1592	52.7735	0.7781		0.01
0	0	0	0		0.01

$$\theta = \arccos(0.7781) = 38.92^\circ$$

Ahora veremos cómo se comportarían las iteraciones con los otros métodos para comparar.

Secante

i	x[i]	x[i-1]	f(x[i])	f(x[i-1])	E[i]	Obs
0	0.6	0				
1	4	3.4	435249.96	-0.46889	3.4	Continua
2	0.6	-3.4	-0.46898	435249.96	3.4	Continua
3	0.60001	0	-0.46907	-0.46898	0	Continua
4	0.58166	-0.01835	0.02201	-0.46907	0.01835	Continua
5	0.58248	0.00082	-0.00085	0.02201	0.00082	Continua
6	0.58245	-0.00003	0	-0.00085	0.00003	Continua
7	0.58245	0	0	0	0	Fin
8	0.58245	0	0	0	0	Fin

i	x[i]	x[i-1]	f(x[i])	f(x[i-1])	E[i]	Obs
0	0.8	0				
1	4	3.2	435249.96	1.3087	3.2	Continua
2	0.79999	-3.20001	1.30803	435249.96	3.20001	Continua
3	0.79998	-0.00001	1.30736	1.30803	0.00001	Continua
4	0.78111	-0.01887	0.15903	1.30736	0.01887	Continua
5	0.7785	-0.00261	0.0239	0.15903	0.00261	Continua
6	0.77803	-0.00046	0.00058	0.0239	0.00046	Continua
7	0.77802	-0.00001	0	0.00058	0.00001	Fin
8	0.77802	0	0	0	0	Fin

Bisección

a	b	c	f(a)*f(c)	f(b)*f(c)	a'	b'
0.5	0.7	0.6	-1.1675	0.8785	0.5	0.6
0.5	0.6	0.55	2.3571	-0.4439	0.55	0.6
0.55	0.6	0.575	0.1986	-0.0984	0.575	0.6
0.575	0.6	0.5875	-0.0291	0.0651	0.575	0.5875
0.575	0.5875	0.5813	0.007	-0.0046	0.5813	0.5875
0.5813	0.5875	0.5844	-0.0018	0.0074	0.5813	0.5844
0.5813	0.5844	0.5828	-0.0003	0.0005	0.5813	0.5828
0.5813	0.5828	0.582	0.0004	-0.0001	0.582	0.5828
0.582	0.5828	0.5824	0	0	0.5824	0.5828
0.5824	0.5828	0.5826	0	0	0.5824	0.5826

a	b	c	f(a)*f(c)	f(b)* f(c)	a'	b'	
0.6	0.8	0.7	0.8785	-2.4518	0.7	0.8	0
0.7	0.8	0.75	2.084	-1.4557	0.75	0.8	0
0.75	0.8	0.775	0.1649	-0.194	0.775	0.8	0
0.775	0.8	0.7875	-0.0761	0.6717	0.775	0.7875	0
0.775	0.7875	0.7813	-0.0247	0.0854	0.775	0.7813	0
0.775	0.7813	0.7781	-0.0008	0.0009	0.775	0.7781	0
0.775	0.7781	0.7766	0.0108	-0.0004	0.7766	0.7781	0
0.7766	0.7781	0.7773	0.0025	-0.0002	0.7773	0.7781	0
0.7773	0.7781	0.7777	0.0005	-0.0001	0.7777	0.7781	0
0.7777	0.7781	0.7779	0.0001	0	0.7779	0.7781	0

Punto fijo

1	0.8	0.7937
2	0.7937	0.7893
3	0.7893	0.7862
4	0.7862	0.7839
5	0.7839	0.7823
6	0.7823	0.7811
7	0.7811	0.7803
8	0.7803	0.7797
9	0.7797	0.7792
10	0.7792	0.7789

En este método ni siquiera pudimos obtener la primera raíz.

Viendo los 4 métodos podemos observar que el más eficiente es Newton-Raphson ya que es

- El valor máximo del Angulo es 54.38° para que la barra no caiga dentro del tubo.
- El valor mínimo del Angulo es 38.92° para que la barra no caiga fuera del tubo.
- El Angulo 48° es el Angulo de equilibrio en ausencia de fricción.

Referencias

Gómez García, D.(2009). *Raíces de polinomios cálculo numérico y aplicaciones*. Centro de investigación en matemáticas aplicadas. CIMA.

Burden, R. y Faires, D. (2002). *Análisis Numérico*. Séptima Edición. Ed. Math Learning.

García-Berrocal, A., Blázquez, J., Vallejo, I., Montalvo, C. y Balbás, M. (2010). El rozamiento de las barras de control de una central nuclear como índice del mantenimiento predictivo. *Memorias del XVII congreso nacional de ingeniería mecánica*. Recuperado de: http://oa.upm.es/8174/1/INVE_MEM_2010_81809.pdf

Gómez García, D. (2009). *Raíces de polinomios cálculo numérico y aplicaciones*. Centro de investigación en matemáticas aplicadas. CIMA.

Ponencia de Divulgación 18

VIAJE AL CENTRO DE LAS NORMAS

David Augusto Levi Hernández Alcántara, Sebastián Morales Amaya
yadera12@hotmail.com, sebastianmorales_97@hotmail.com
Universidad Juárez del Estado de Durango
Álgebra lineal

Para empezar, nosotros siempre hemos hablado de “el concepto de norma” en espacios vectoriales, pero vamos a darle una connotación más particular, su propia relevancia y el poder extender este concepto para que así no se quede cautiva sólo con el concepto de producto interno y poder comprender topológicamente que una bola no se distingue de un cubo, pues estaremos demostrando que son espacios topológicamente equivalentes.

Otros temas más avanzados (que no se tocarán en el presente trabajo), pero no por ello menos interesantes, son las normas de matrices donde se pueden empezar a definir elementos como series de potencias de matrices y temas interesantes como empezar a discutir entre proximidad o lejanía de matrices (los cuales pueden llegar a ser aspectos fundamentales para en el análisis de algoritmos numéricos).

Ahora, comenzando, es bien conocido el valor absoluto, el cual es un concepto o módulo de un número complejo y se le puede definir como le sigue:

Definición.- Sea V un espacio vectorial sobre F . Una función $\| \cdot \|$:

$V \rightarrow \mathbf{R}$ es una norma en V si $\| \cdot \|$ satisface las siguientes propiedades:

i) $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in F$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$ (desigualdad triangular)

De esta definición podemos llegar a una pequeña conclusión donde se tiene que un espacio vectorial sobre el que se define esta función <<que la estamos llamando norma>> es un “*espacio normado*” en donde no necesariamente se necesita hablar de un producto interno, este tipo de espacios en particular se usan principalmente en métodos numéricos y análisis computacional numérico. Por otra parte, es fácil comprobar que realmente los espacios normados son un espacio métrico, ya que de la definición:

Definición.- Un espacio métrico es un conjunto X (no vacío) donde se tiene una noción de distancia. Esto es, si $x, y \in X$, entonces $d(x, y)$ es la “distancia” entre x y y .

Una función distancia debe cumplir las siguientes condiciones:

i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Un ejemplo de esto es usando el teorema de Pitágoras, el cual nos brinda una noción sencilla en la distancia de puntos. Y en particular cuando tenemos a

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ y } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Tenemos que

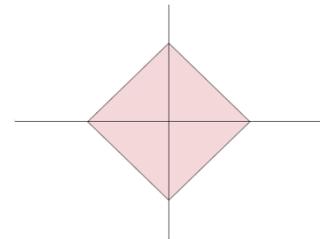
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

La cual se mencionara más adelante en este mismo trabajo <<siendo conocida como la norma euclidiana>> y coincidiendo a la vez con el módulo o longitud del vector.

Se puede definir una infinidad de normas en \mathbf{R}^n , sin embargo las más utilizadas son las llamadas l_p . Las normas l_p son normas de la siguiente manera:

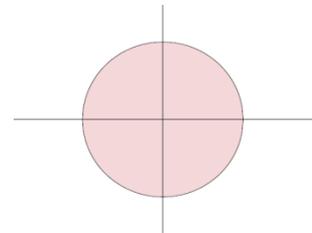
a) La norma l_1 :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$



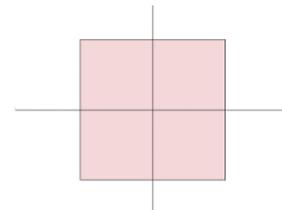
b) La norma l_2 o norma euclídea:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$



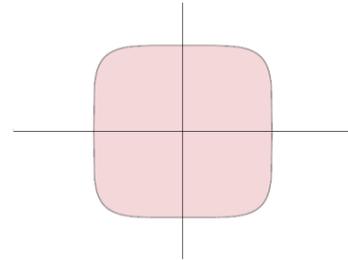
c) La norma l_∞ :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$



d) La norma l_p general ($p \geq 2$):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$



Para la demostración que son normas, específicamente para la desigualdad del triangular se utiliza la desigualdad de Minkowsky.

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ además p y q son números reales tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n (y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

También cabe mencionar que:

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_p \leq \dots \leq \|x\|_\infty$$

En este documento mencionaremos la idea intuitiva y superficial de los espacios de Hilbert, los cuales son importantes de presentar pues cuentan con una estructura geométrica más sencilla de manejar donde se obtiene una topología natural (y se conoce como “*espacio vectorial pre-hilbertiano*” con producto escalar) donde sintácticamente la “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ” indica *producto interno* y pueden extenderse a espacios más grandes como los espacios de funciones de espacios topológicos. Pero aún más importante que eso, es fascinante la relación que guardan estos tipos de espacios con las normas, ya que para dar con lo que es un espacio de Hilbert, fijémonos en su siguiente definición:

- (1) $\|x\| = 0$
- (2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (3) $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [Desigualdad triangular]
- (5) $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x\| + \|y\|$ [Desigualdad triangular inversa]
- (6) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [Identidad del paralelogramo]

Observación: Cabe destacar que estas propiedades sólo se cumplen si las normas provienen de un producto interno

Por lo que como pudimos apreciar, podemos ver claramente la relación entre las distintas desigualdades que ya han sido previamente estudiadas en los primeros cursos de la carrera, donde fuimos conociendo poco a poco de éstas comenzando por los temas más básicos de

cálculo diferencial, hasta en nuestro curso de geometría; por lo cual no estamos hablando de cosas que sean totalmente desconocidas para la mayoría de los alumnos que cursan la carrera de matemáticas aplicadas. Por otra parte hay unas observaciones que es importante mencionar para poder completar y cerrar el gran paréntesis propuesto en este trabajo con fines de expandir el conocimiento y dar a notar que muchos de los conocimientos con los que ya contamos tienen como fin el poder comprender este tipo de espacios tan interesantes, como los son los espacios de Banach, que no es más que una expansión a nuestro mundo de espacios topológicos para alzar la vista a espacios meramente de dimensión infinita que tienen que cumplir propiedades nada desconocidas, y las observaciones son las siguientes:

- *Observación:* Si dicho espacio es espacio de Hilbert, entonces el espacio con la norma asociada (completa) al producto escalar se dice que es un espacio de Banach <<espacio de funciones de dimensión infinita>>.
- *Observación:* La norma l_p usual, es espacio de Banach.

Con esto terminamos el paréntesis que deja abierta a la curiosidad de los interesados en indagar profundamente sobre esta gran rama de las matemáticas. Pero volviendo al tema en el que nos estamos centrando y dejando de lado el paréntesis que hicimos para dar a entender la expansión inmensa que puede llegar a tener este tipo de espacios junto con lo importante que puede llegar a ser los espacios normados de esta exposición es hacer ver al público que todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes. Esto se debe a que en el espacio normado $(M, \|\cdot\|)$ podemos definir una distancia $d(x, y) = \|x - y\|$ que hace de (M, d) un espacio métrico, y por lo tanto topológico con una base de abiertos dadas por las bolas abiertas centradas en cada punto de M . Por consiguiente, si V es un espacio vectorial en el que tenemos definida a una norma, automáticamente tenemos en V estructuras de espacios métricos y topológicos.

Punto importante: si en M tenemos definidas dos normas, las bolas abiertas definidas por ambas normas pueden ser diferentes. A pesar de que las bases de abiertos determinadas por dichas normas sean diferentes, y entonces: las topologías determinadas por éstos pueden ser iguales.

La propiedad de que las normas son equivalentes determina que, en efecto, las topologías inducidas por ellas son las mismas; es decir, todo abierto respecto de una de las normas lo es respecto de la otra.

Notemos que no toda norma viene de un producto interno, y veremos una de estas a continuación.

Consideremos a $\mathcal{B}(2)$ como el conjunto de todos los cuerpos compactos, convexos, simétricos respecto al origen y de interior no vacío en \mathbf{R}^2 .

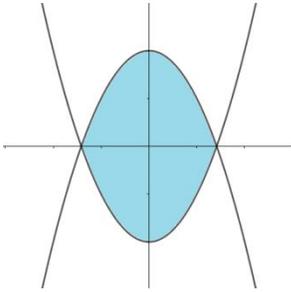
Para $V \in \mathcal{B}(2)$ definimos el funcional de Minkowski como $p_V : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$p_V(x) = \inf \left\{ \frac{1}{t} \mid tx \in V \right\}$$

Entonces el funcional de Minkowski es una norma de \mathbf{R}^2 , de esta manera, cada elemento de $\mathcal{B}(2)$ esta en correspondencia con una norma de \mathbf{R}^2 .

Véase el siguiente ejemplo:

Sea V el convexo determinado por las gráficas de $f_1(x) = x^2 - 2$ y $f_2(x) = -x^2 + 2$.



Sea $l : \lambda v$ con $\lambda \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}^2$

$$f_1(x) = -x^2 + 2, f_2(x) = x^2 - 2 \text{ con } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

y llamemos p_1 a la intersección de l con $f_1(x)$ y p_2 con $f_2(x)$.

Entonces la norma de v respecto a V es :

$$\|v\|_V = \begin{cases} \frac{\|v\|}{\|p_1\|} & \text{cuando pertenece al primer y segundo cuadrante.} \\ \frac{\|v\|}{\|p_2\|} & \text{cuando pertenece al tercer y cuarto cuadrante.} \end{cases}$$

Conclusión:

Como lo vimos a lo largo del documento, los espacios normados son realmente importantes en distintas ramas de las matemáticas, y básicos para partir a espacios topológicos más grandes. Ya que como lo mencionábamos anteriormente, cumple totalmente los requisitos para que sean llamados espacios de Hilbert, y a su vez ser espacios de Banach, donde ya hablamos de dimensiones infinitas. Agregándole a esto que a su vez poseen espacios equivalentes, para así facilitar el trabajo en muchas de las demostraciones que se verán a lo largo de la carrera.

Bibliografía:

Ana Izaballa. (10/Jan/2018). Normas de vectores y matrices. 13/May/2018, de Universidad del país Vasco Sitio web: http://www.ehu.eus/izaballa/Ana_Matr/Apuntes/lec2.pdf

H.A.Helfgott. (3 de Junio del 2015). Normas, desigualdades y dualidad. 13 de Mayo del 2018, de Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche Sitio web: <https://webusers.imj-prg.fr/~harald.helfgott/espagnol/normas.pdf>

Tom Babinec, Chris Best, Michael Bliss, Nikolai Brendler, Eric Fu, Adriane Fung, Tyler Klein, Alex Larson, Topcye Lee, John Madonna, Joel Mousseau, Nick Posavetz, Matt Rosenberg, Danielle Rogers, Andrew Sardone, Justin Shaler, Smrithi Srinivasan, Pete Troyan, Jackson Yim, Elizabeth Uible, Derek Van Farowe, Paige Warmker, Zheng Wu Nina Zhang. (December 2007). Introduction to Topology. 13 de Mayo del 2018, de Mathematics, College of Natural Sciences, Colorado State University Sitio web: <http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf>

Marta Macho Stadler. (Febrero 2012). Topología general. Managua: Facultad de Ciencia y Tecnología Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea.

[Programa general](#)

Ponencia de Divulgación 19

DESARROLLO DE MODELO ARX PARA SIMULACIÓN DE LA DEGRADACIÓN DE TURBINAS DE JET BAJO CONDICIONES DE OPERACIÓN VARIABLES

José Edgar Alcántar Muñoz. Dra. Diana Barraza Barraza
cabgary@hotmail.com, dbarrazabza@gmail.com
Universidad Juárez del Estado de Durango, Facultad de Ciencias Exactas
Estadística Industrial

Antecedentes

El mantenimiento basado en condición (MBC) se auxilia de análisis y simulación estadístico de datos obtenidos en base a la monitorización de las condiciones o estado de los diferentes elementos de una máquina o equipo (Williams, Davies, A., & Drake, P. R., 1994))

Algunas de sus principales ventajas radican en prevenir accidentes en el personal, mantener en condiciones óptimas de funcionamiento la maquinaria y herramienta y mejorar el desempeño y seguridad de la planta; mediante la predicción de fallas y la estimación de vida útil remanente (VUR). (Van, Levrat, Voisin, & Iung, (2012))

Planteamiento del problema

La literatura en mantenimiento por lo general aborda situaciones en que las condiciones de operación son constantes, sin embargo, en escenarios reales difícilmente se opera bajo condiciones constantes, Moubray, (2001). El problema a tratar en esta investigación es el desarrollo de un modelo estadístico de simulación de degradación y condiciones de operación de un equipo.

Objetivos

Desarrollar simulaciones de degradación de un equipo bajo diversos escenarios de modelos estadísticos.

- Analizar la base de datos mediante un modelo estadístico de covariables.
- Determinar los niveles de variabilidad de las covariables a usar en las simulaciones.
- Diseñar el experimento de simulación.

Justificación

En la literatura, enfocada al mantenimiento, se establecen estudios sobre experimentos basados en condiciones totalmente controlables y por defecto constantes, sin embargo, las situaciones reales de las industrias plantean escenarios más complejos, en donde las condiciones de operación de los equipos son variables. Por lo anterior, resulta trascendente la realización de la presente investigación basada en datos obtenidos de equipos expuestos a condiciones variables.

Base de datos

En el repositorio de la NASA se encuentran algunas bases de datos que se han generado a partir de simulaciones, La que se describe a continuación es una combinación de simulación y mediciones reales a través de sensores, y servirá para el desarrollo de la presente investigación.

La base de datos utilizada en la investigación tiene como nombre “Turbofan Engine Degradation Simulation Data Set”. Está conformada por múltiples series de tiempo, organizada en cuatro conjuntos de datos que contienen las variables de una serie de turbinas de jet, los cuales se dividen en dos subconjuntos de entrenamiento y de prueba; conformados de la siguiente manera, según, Saxena, Ieee, Goebel, Simon, & Eklund. (2008).

	Conjunto 1	Conjunto 2	Conjunto 3	Conjunto 4
Trayectorias de entrenamiento	100	260	100	248
Trayectorias de prueba	100	259	100	249
Condiciones	1 (nivel del mar)	Seis	1 (nivel del mar)	Seis
Modo de falla	1 (degradación de HPC)	1 (degradación de HPC)	2 (degradación de HPC y ventilador)	2 (degradación de HPC y ventilador)

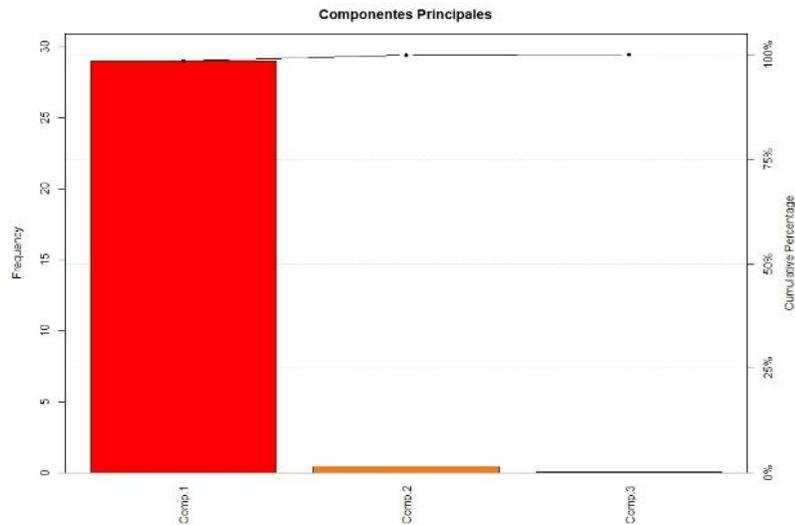
Cada serie de tiempo corresponde a una turbina diferente, las cuales inician con diferente desgaste. Contiene tres configuraciones de operación que tienen efecto sustancial en el rendimiento del motor.

El conjunto de datos seleccionados se compone de 100 series de tiempo multivariadas que representan la degradación y condiciones de operación de 100 diferentes turbinas. Los datos están organizados en 14 variables de entradas y 21 variables de salida; las cuales se dividen en condiciones de operación y sensores de medición.

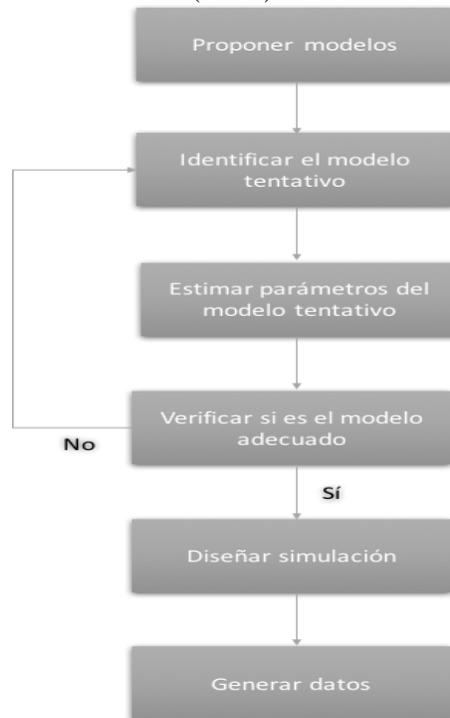
Análisis estadístico

El análisis realizado consistió, a grandes rasgos, en las siguientes etapas.

- 1. Análisis de componentes principales (ACP).** Se aplicó un ACP a la base de datos para disminuir la dimensionalidad de las variables con que se está trabajando, según Eduardo, (1999). La siguiente grafica muestra la cantidad de componentes principales significativos.



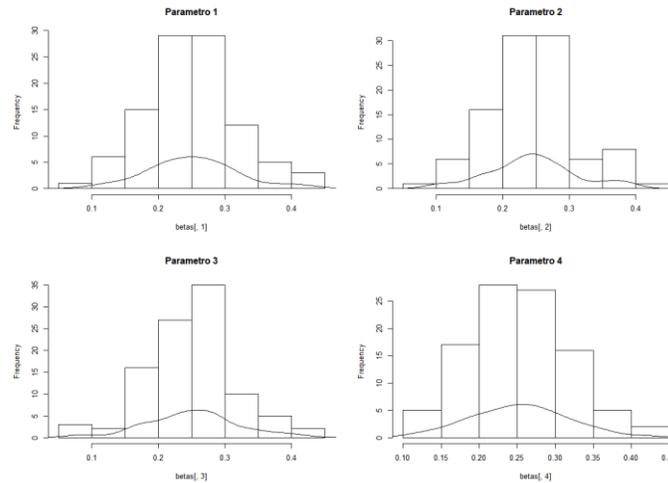
2. **Modelo ARX (metodología Box-Jenkins).** Se ajustó un modelo ARX a cada una de las 100 transformaciones obtenidas del ACP teniendo así 100 conjuntos de parámetros. El siguiente diagrama representa la metodología aplicada para la obtención del modelo más óptimo de acuerdo a la naturaleza de los datos, de acuerdo a Box, Jenkins & Reinsel (1994).



3. **Obtención de parámetros del modelo ARX.** La estimación por mínimos cuadrados fue la metodología empleada para la estimación de los parámetros del modelo, siguiendo la fórmula:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

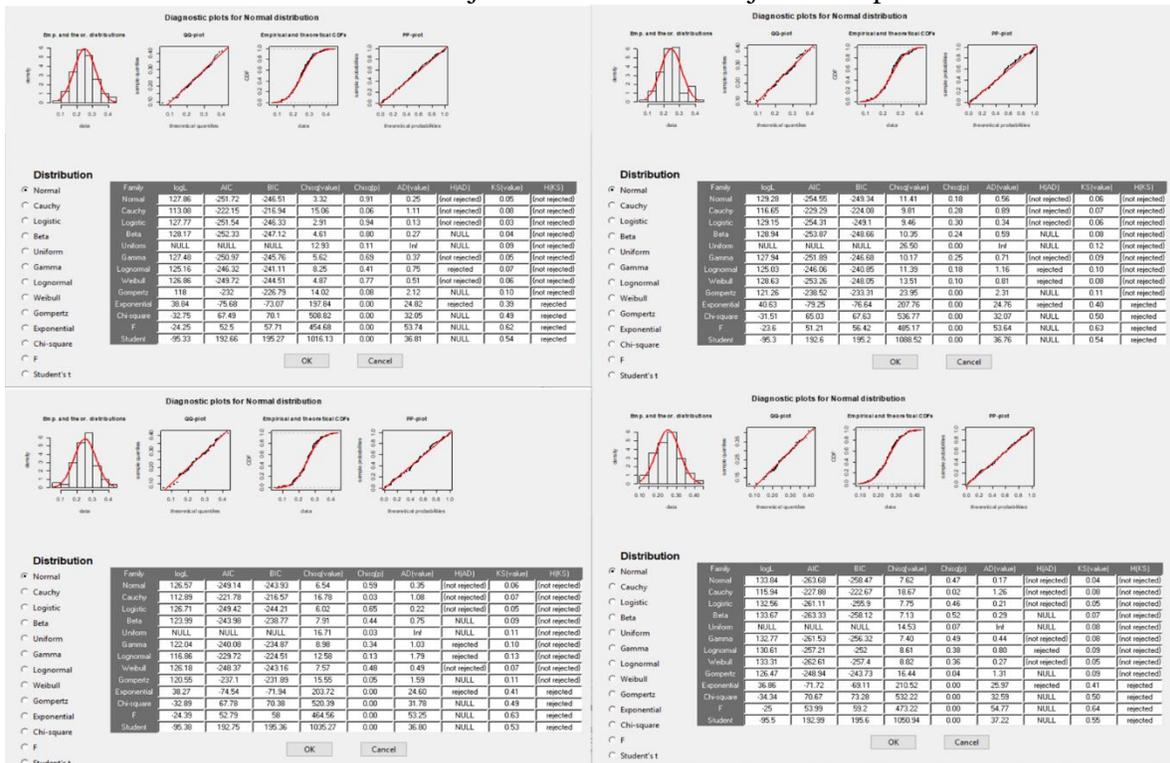
Los parámetros del modelo se analizaron en busca de la distribución que se ajustara a cada uno de ellos. Las siguientes graficas muestran la distribución de cada uno de los cuatro parámetros del modelo.



Gráficamente, los parámetros aparentan un comportamiento semejante a una distribución normal. En este punto es complicado asegurar las características descriptivas de cada uno de los parámetros.

A continuación, se analiza cada parámetro para caracterizar cada uno de ellos.

4. Ajuste de distribuciones. El ajuste de las distribuciones de los parámetros del modelo fue llevado a cabo mediante el paquete *fit.dist* en R. Las siguientes graficas muestran las distribuciones ajustadas a los 100 conjuntos de parámetros.



Los ajustes de distribuciones auxilian en la obtención de las características de los parámetros para su posterior estimación, la cual, se presenta en la siguiente sección del artículo.

- 1. Modelo ARX.** Modelo autorregresivo de variables exógenas toma la forma siguiente, Johnson & Wichern. (2014), Barraza, D. (2016).

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 y_{t-3} + \beta_4 y_{t-4} + C_1 + C_2 + \varepsilon_t$$

Donde:

y_t : respuesta

β_0 : media

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$: parámetros del modelo

C_1, C_2 : condiciones de operación

ε_t : error

En notación matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ 1 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

Cada uno de los parámetros estimados se ajusta a una distribución normal con diferentes parámetros para cada uno de ellos.

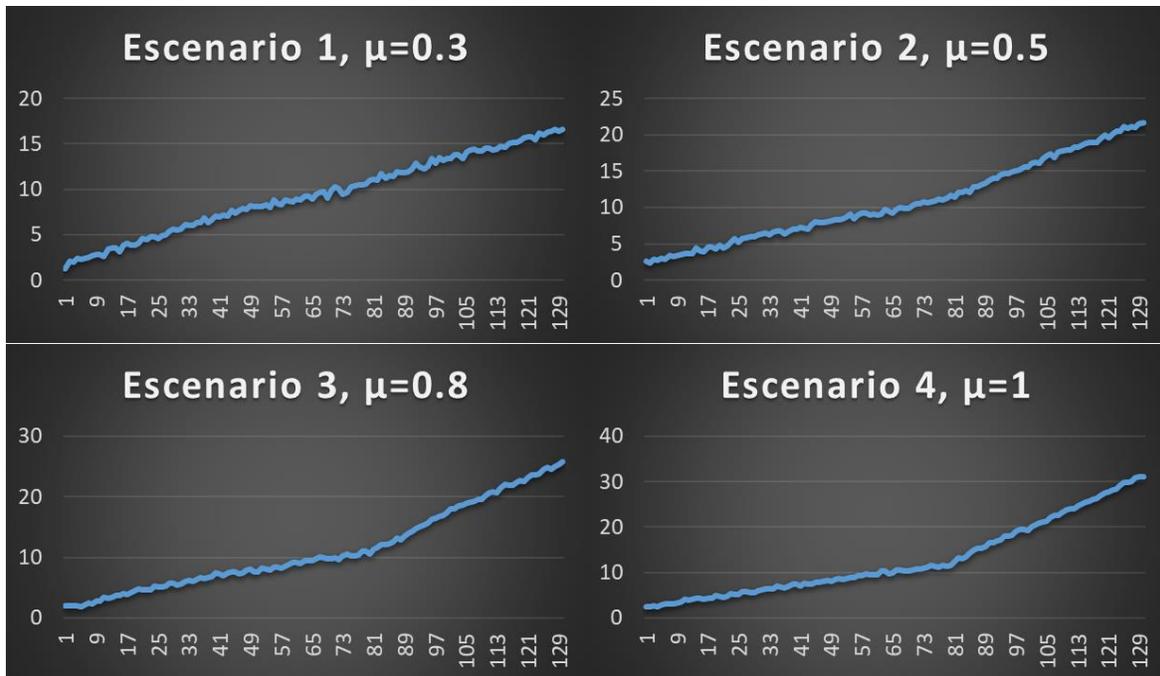
Los valores de los parámetros estimados se muestran en la siguiente tabla, obtenidos a través de la media de cada conjunto de parámetros.

Parámetro	Prueba Shapiro-Wilk	Media	Desviación estándar
β_1	p-value=0.4869	0.25170619	0.06663821
β_2	p-value=0.2057	0.24477027	0.06625545
β_3	p-value=0.4118	0.25038213	0.06827338
β_4	p-value=0.9132	0.25326310	0.06290961

- 2. Simulaciones.** Se presentan simulaciones de degradación en diferentes escenarios, obtenidas con el modelo desarrollado.

Cuatro escenarios se grafican mediante el modelo propuesto, modificando la media del modelo para analizar su comportamiento gráfico.

El primer escenario con una media de 0.3 el comportamiento se asemeja a un modelo lineal. Conforme el valor de la media se aumenta, el comportamiento de la simulación se asemeja a un modelo exponencial con un cambio pronunciado alrededor del valor 81.



3. Conclusiones. El modelo obtenido permite llevar a cabo simulaciones de degradación de equipo en un número considerable de escenarios, con lo cual se pretende tener un precedente para llevar a cabo simulaciones de desgaste de equipo que es costoso llevarlo a una metodología *run-to-failure*, y por consecuencia los costos de mantenimiento en las industrias manufactureras también se verían disminuidos.

Bibliografía

- Eduardo, P. (1999). Análisis de Componentes Principales. *Proyecto E-Math Financiado Por La Secretaría de Estado de Educación Y Universidades (MECD)*, 141–151. <https://doi.org/10.1016/j.infsof.2008.09.005>
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2014). *Applied multivariate statistical analysis* (Vol. 4). Prentice-Hall New Jersey.
- Saxena, A., Ieee, M., Goebel, K., Simon, D., & Eklund, N. (2008). Damage Propagation Modeling for Aircraft Engine Prognostics. *Response*.
- Van, P. D. O., Levrat, E., Voisin, A., & Iung, B. (2012). Remaining useful life (RUL) based maintenance decision making for deteriorating systems. <https://doi.org/10.3182/20121122-2-ES-4026.00029>
- Williams, J. H., Davies, A., & Drake, P. R. (1994). *Condition-based Maintenance and Machine Diagnostics*. Springer Netherlands. Retrieved from <https://books.google.com.mx/books?id=BQt1btdo-tAC>
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting & Control. Book*. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2004.02.001>
- Moubray, J. (2001). *Reliability-centered maintenance*. Industrial Press. Retrieved from https://books.google.com.mx/books/about/Reliability_centered_Maintenance.html?id=bNCVF0B7vpIC&redir_esc=y

Barraza, D. (2016). Adaptive ARX Model to Estimate an Asset Remaining Useful Life Based on Detection of Sustained Changes in Condition Variable

[Programa general](#)

CONCURSO PARA EL DISEÑO DEL LOGOTIPO

LOGOTIPOS PARTICIPANTES



Autor: Alonso Eloy Ávila Dévora

Taza de café mordida

Es bien sabido que una de las muchas ramas de las matemáticas es la *topología*. En esta se estudian conjuntos con topologías a los que denominamos espacios, y sus propiedades básicas, como conexidad, compacidad y la continuidad de funciones entre uno y otro espacio.

Con base en esto, y en otras cuantas descripciones, se ha definido lo que es un homeomorfismo, que es una función biyectiva, continua y con inversa continua. El homeomorfismo conserva las propiedades ya mencionadas de los espacios, dando a entender que dos espacios homeomorfos, son prácticamente lo mismo

Uno de los ejemplos más representativos y conocido de homeomorfismo es el que transforma un toro o dona, en una taza de café. Así, el dibujo cobra sentido al ver que, al haber mordido una taza, realmente se mordió una dona.

Es fácil notar que el vapor del café forma sutilmente la letra m de matemáticas.

Además del concepto matemático usado, este logo simboliza la bebida que más se consume al momento de escuchar una serie de charlas en los encuentros estudiantiles: el café.

La propuesta de la “Taza de café mordida” recibió el Premio por más personas alcanzadas en Facebook.



Autor: Elsa Jezabel García Venegas

Está compuesta por triángulos ordenados de manera aleatoria simulando una perspectiva 3D. Se hace un juego de colores entre blanco y gris de cada lado del triángulo para simular luces y sombras, dándole un tinte mostaza que hace contraste con el color blanco y gris creando una armonía de colores. Se utilizaron máscaras de recorte, vectorizando figuras geométricas triangulares con una opacidad del 100%.



Autor: Elsa Jezabel García Venegas

Está compuesto por cuadrados y triángulos jugando con diferentes colores grises, naranjas y rojo, donde se utilizaron máscaras de recorte con opacidad de 5% vectorizando figuras geométricas triangulares, deformados y puestos en diferentes ángulos. Se genera una máscara de recorte se sobrepone una figura en la otra para generar el efecto dado.



Autor: José Enrique Mata Vázquez

El Copo de Nieve de Koch

El Fractal de Koch y en general el tema de fractales, son objetos geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. Estos objetos tienen una gran cantidad de propiedades y aplicaciones matemáticas y es uno de los temas que más llaman la atención a los alumnos, ya que en los encuentros académicos anteriores se llevaron a cabo presentaciones sobre este tema. La elección de los colores me parecen representativos de la institución ya que también está presentes en el escudo de la facultad.

Por esta razón, me parece que es un elemento representativo de este encuentro y debería ser la imagen de del mismo.

La propuesta “El Copo de Nieve de Koch” resultó ganador del Primer Lugar.



Autor: José Enrique Mata Vázquez

Papillon

La papiroflexia, a la que podemos considerar como un arte, una ciencia y un entretenimiento, tiene una gran importancia en el aprendizaje de las matemáticas. Para el matemático, la belleza de la papiroflexia está en su simple geometría. En cada trozo de papel hay patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que permiten a la hoja llegar a tener variadas e interesantes formas.

Es por eso que elegí representar el encuentro con una figura de la papiroflexia y la forma que escogí fue la mariposa ya que al igual que las matemáticas son hermosas.

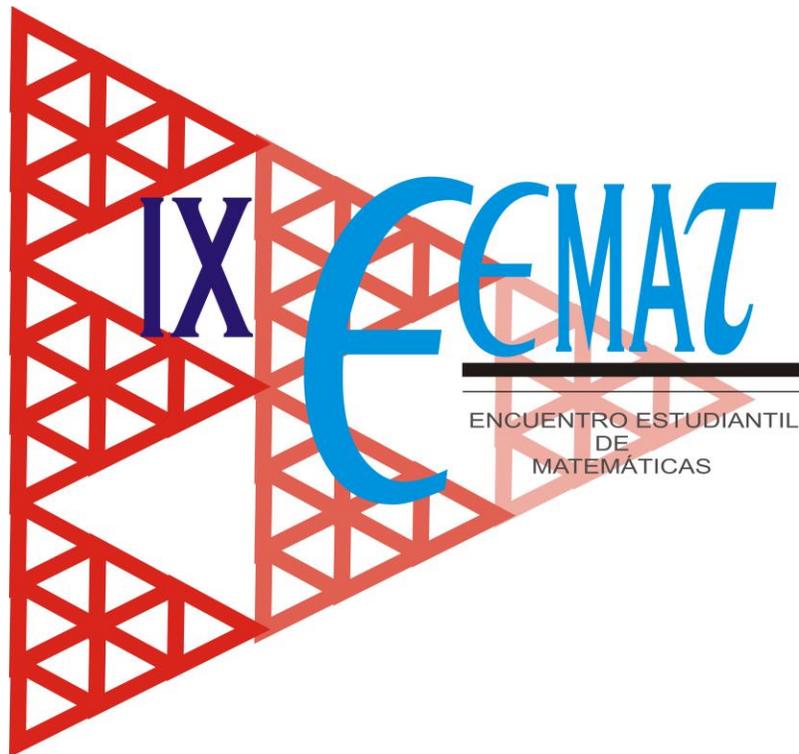


Autor: Jorge Gabriel Martín del Campo Cisneros

El logotipo representa una circunferencia en los ejes coordenados y una propuesta de abreviación de la leyenda "Encuentro Estudiantil de Matemáticas" para la abreviación "EEMAT" se utilizó para representar la letra "E" la letra griega **epsilon** (ϵ) puesto que se conoce como equivalente a la letra que representa en este logotipo, también esta letra es de uso muy común como variable arbitraria dentro del ámbito de las matemáticas. Por otro lado la letra "T" es representada con la letra griega tau (τ)

Los colores fueron seleccionados por cuestión institucional el color azul siempre ha representado a la Facultad de Ciencias Exactas y los demás colores que aparecen a en el logotipo es por cuestión de contraste.

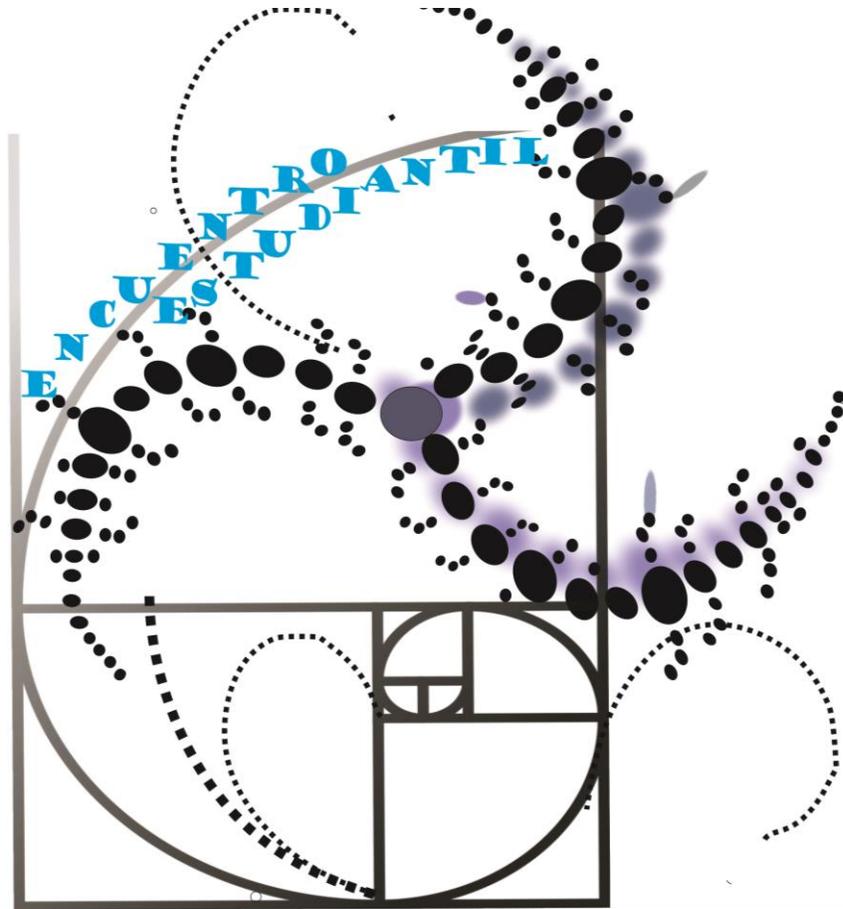
Esta propuesta resultó ganadora del Segundo Lugar.



Autor: Jorge Gabriel Martín del Campo Cisneros

El logotipo representa el "Triángulo de Sierpinski" y una propuesta de abreviación de la leyenda "Encuentro Estudiantil de Matemáticas" para la abreviación "EEMAT" se utilizó para representar la letra "E" la letra griega **epsilon** (ϵ) puesto que se conoce como equivalente a la letra que representa en este logotipo, también esta letra es de uso muy común como variable arbitraria dentro del ámbito de las matemáticas. Por otro lado la letra "T" es representada con la letra griega tau (τ)

Los colores fueron seleccionados por cuestión institucional el color azul siempre ha representado a la Facultad de Ciencias Exactas y los demás colores que aparecen a en el logotipo es por cuestión de contraste.



Autor: Dulce María Reyes Rojas

Se llevó cabo una investigación para la elaboración del logotipo que representara el noveno encuentro estudiantil, buscando elementos matemáticos simbólicos, llegando a la conclusión que una forma para representar el amplio contexto de las matemáticas era el número de oro (fi), el cual ha estado representado en formas distintas y maneras posibles.

El número de oro no es el del boleto de la lotería, ni les va a hacer millonarios, ¡noooo! Pero eso sí, ¡está en todas partes! Cuando miran una fotografía y la encuentran linda... pues ahí está el número, cerrándoles un ojo. Cuando escuchan una melodía agradable, ¡ahí está el número! Cuando ven a una persona guapa... ¡también está el número! ¡En todos lados! Y desde la antigua Grecia hasta nuestros días, ha preocupado a matemáticos, artistas, biólogos y toda clase de científicos y creadores por igual. El número de oro es un concepto matemático y estético, a quien en 1909, Mark Barr propuso representar con la letra griega ϕ , o “phi” (se pronuncia “fi”), en honor al gran escultor griego Fidias.

Además en los fractales tienen una relación con la geometría fractal

¿Pero qué es esto? ¿Pero cómo es posible? Se puede definir un objeto fractal como una figura semigeométrica cuya estructura básica se repite a diferentes escalas en una proporción conocida como dimensión áurea, o lo que es lo mismo, el número Phi Φ (1,618). Las imágenes fractales son la unión entre el orden y el caos, entre lo finito y lo infinito, entre el árbol y el bosque. La belleza de los fractales y su misteriosa eficiencia es lo más emocionante desde la teoría general de la relatividad de Einstein.

Mandelbrot en los años setenta dijo a todo el mundo: “sólo tenéis que mirar los patrones de la naturaleza de la manera correcta y podréis aplicar las matemáticas: hay un orden bajo el aparente caos, podéis crear fórmulas que describan las nubes, las flores y las plantas, es sólo que son otro tipo de matemáticas y de geometría”.

Este logo representa al encuentro estudiantil al ser una manera de contemplar distintas áreas de la matemática relacionadas en un mismo espacio.



Autor: Gerardo Ismael Salazar Herrera

Lo que quise plasmar en mi diseño fue la exacta proporción geométrica que representa la estructura del Partenón en Atenas, esta idea va dirigida hacia un concepto matemático-científico. El edificio es un ejemplo del equilibrio arquitectónico griego, sus líneas es el resultado de la curvatura de elementos teóricamente rectilíneos, es más alto en el centro, las columnas de las esquinas son más voluminosas y se inclinan hacia atrás, las superficies verticales caen hacia el interior esto es un claro ejemplo del equilibrio geométrico que lograron los grandes matemáticos, arquitectos, etc. de la época todo esto se convierte en lo que conocemos hoy como un encuentro interdisciplinario.

Cabe mencionar que todas las culturas antiguas dieron aportaciones a las matemáticas, sin embargo Grecia destaca por utilizar el razonamiento deductivo, la lógica para obtener conclusiones y fueron los primeros en utilizar axiomas, definiciones, hipótesis,

proposiciones; tomando conceptos de babilonios y egipcios conceptualizaron las matemáticas abstractas. Igualmente utilice esta obra arquitectónica con la intención de mencionar indirectamente la razón aurea, que junto con las matemáticas dan a la vida diaria el concepto de belleza utilizado en pintura, escultura, fotografía, y en la naturaleza. Que es interés de un matemático representar por números, ecuaciones, formulas, teoremas, lo que le rodea.

Contiene también dos semicírculos, por una parte con el objetivo de dar simetría estética y por otra, porque la circunferencia es una figura emblemática en la historia de las matemáticas, estudiada desde los babilónicos, egipcios, griegos que en mi opinión son los más importantes. Una de las características de estas culturas es que emplearon este concepto para el estudio de la matemática aplicada, que así mismo fue trampolín de varios conceptos abstractos que hoy en día son bases de algunas ramas de esta ciencia. Finalmente los segmentos de recta son estéticos y para resaltar el área de estudio.

Esta propuesta resultó ganadora del Tercer Lugar.

[Programa general](#)

DIRECTORIO DE PARTICIPANTES

[A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [F](#) [G](#) [H](#) [I](#) [J](#) [K](#) [L](#) [M](#) [N](#) [O](#) [P](#) [Q](#) [R](#) [S](#) [T](#) [U](#) [V](#) [W](#) [X](#) [Y](#) [Z](#)

[Programa general](#)

A

Alcántar Muñoz José Edgar
cabgary@hotmail.com

Alvarado Calderón José Crispín
jose.alvarado@cimat.mx

Alvarado Chávez Luis Enrique
wer0o.dgo_arb@hotmail.com

Andrade Alvarado Felipe de Jesús
felipeandradealvarado@gmail.com

Ávila Dévora Alonso Eloy
alon.so.12@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

B

Barraza Barraza Diana
diana.barraza@ujed.mx

Bello Aguirre Ricardo Isaac
ricardo.bello.aguirre@gmail.com

Beltrán Hernández Erick Assael
erick_behe@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

C

Caballero González Adriana Guadalupe
adrianagonzalez_2312@hotmail.com

Cabral Álvarez Ana Cristina
ana171296@gmail.com

Conde Ramírez Celene Yajahira
celeneconde15@gmail.com

Corral Hernández Claudia Daniela
danny@live.com.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)

D

De La Cruz Cháidez Sócrates
socratesdelacruz@live.com

Díaz Leyva Carlos Michelle
cdiazleyva@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

E

Escobedo Bustamante Adriana
adriana.escobedo@ujed.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)

F

[Directorio](#)

[Programa general](#)

G

Galindo Solís Martha Patricia

paty_dance89@hotmail.com

García Terán Ana Margarita

amgiti@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

H

Hernández Ibarra Salma Celeste

s.celeste.h@gmail.com

Hernández Espinosa Laura Margarita

laura.m.hernandez.e@hotmail.com

Hernández Alcántara David Augusto Levi

yadera12@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

I

[Directorio](#)

[Programa general](#)

J

[Directorio](#)

[Programa general](#)

K

[Directorio](#)

[Programa general](#)

L

Lerma Domínguez Jesús Alfredo
jesuslerma.jld@gmail.com

López Betancourt Alicia
ablopez@ujed.mx

López Reyes Jesús Ivánivan_gow@live.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

M

Magallanes Escobedo Mariam
jamesdougasmorrison4@gmail.com

Martín de Campo Cisneros Jorge Gabriel
joshi.g.m.c@gmail.com

Mata Vázquez José Enrique
enrique_mata96@outlook.com

Mercado Favela Eybette
eybette_mercado@hotmail.com

Montes López Noé
elone_la30@hotmail.com

Mora Sarabia Abraham Duvany
duvalin_2486@hotmail.com



Morales Amaya Sebastián
sebastianmorales_97@hotmail.com

Moreno González Brayam Antonio
brayam-02@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

N

Nevárez Muñoz Jesús Tairí
tainmu52@hotmail.com

Nevárez Nieto Saul
saul_2n@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

O

Olvera Martínez Héctor Alan
alanolvera1234@hotmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

P

Pacheco Juárez Yaziel
yazi28@hotmail.com

Pulido Castañeda Martín
martinpulido15@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)



Q

[Directorio](#)

[Programa general](#)

R

Luis Angel Reyes Rojas
angelreyes19931@outlook.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

S

Salazar Herrera Gerardo Ismael
salazar.gerardo117@gmail.com

Salcedo Talamantes Elisa
elisa_st_1995@hotmail.com

Soria Pérez Alejandra
alegodel@gmail.com

Soto Betancourt Candy Jazmín
sobc980202mdgttn05@gmail.com

Soto Salas Brandon
bsoto112796@gmail.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

T

Tapia Ávalos Axel

axel.infimo@gmail.com

Torres Valenzuela Jonathan Iván

prococo_love@outlook.com

[Directorio](#)

[Programa general](#)

U

[Directorio](#)

[Programa general](#)

V

Valdez Hernández Alondra

alondra.valdez96@outlook.com

Vargas Antuna Raúl

raul.vargas@cimat.mx

Vargas Betancourt Enrique

quique_vab@ujed.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)

W

[Directorio](#)

[Programa general](#)



X

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Y

[Directorio](#)

[Programa general](#)

Z

Zamora Delfín José Feliciano

chano-1@hotmail.com

Zamora Ríos Rosa Angélica

rzamora@ujed.mx

[Directorio](#)

[Programa general](#)