Grado de Homogeneidad en Abanicos

Seminario de topología

Alonso Eloy Ávila Dévora

Facultad de Ciencias Exactas UJED

31 de mayo de 2018

Definiciones

Continuo

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

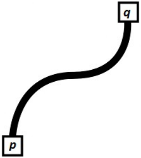
Subcontinuo

Un subcontinuo es un continuo contenido en otro continuo.

Ejemplos

Arco

Un arco es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$



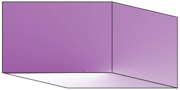
Para denotar el arco simplemente escribimos pq que son los puntos inicial y final de este, y también utilizamos

$$(pq) = pq - \{p, q\}, [pq) = pq - \{q\}, (pq] = pq - \{p\}$$

Ejemplos

n-celda

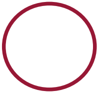
Una n-celda es un espacio homeomorfo a $[0,1]^n$

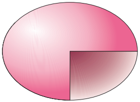


Ejemplos

n-esfera

Una n-esfera es un espacio homeomorfo a
$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$





Ejemplos

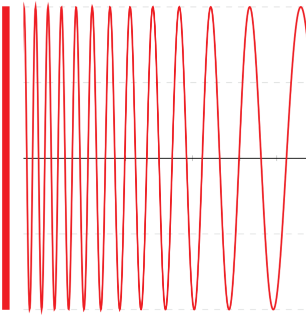
continuo sen($\frac{1}{x}$)

El continuo sen($\frac{1}{x}$) es la cerradura del conjunto
$W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1]\}$

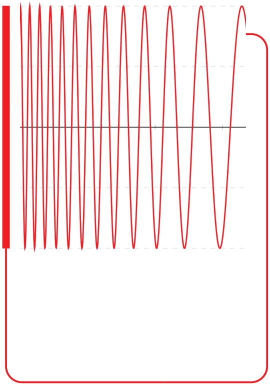
Circulo de Varsovia

El circulo de Varsovia es homeomorfo a $W \cup Y$ donde
$Y = (0, -1)(0, -2) \cup (0, -2)(1, -2) \cup (1, -2)(1, sen(\frac{1}{1}))$

Ejemplos



Ejemplos



Teoremas

Teorema

Unión finita de continuos que se intersectan, es un continuo

Teorema

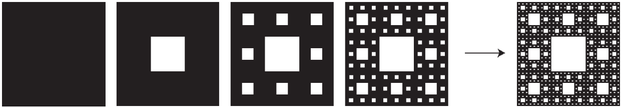
Si X es un continuo y $\{A_n\}_n$ es una familia de subcontinuos anidados, con $n \in \mathbb{N}$, es decir $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, entonces el conjunto $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un subcontinuo de X

Ejemplos

Alfombra de Sierpinski

Este se construye empezando con $C = [0,1]^2$. Dividimos a C en nueve cuadrados de lado $\frac{1}{3}$ y quitamos el interior del cuadrado central, a cada uno de los ocho cuadrados restantes le hacemos lo mismo, es decir, los dividimos en nueve cuadrados iguales de lado $\frac{1}{27}$ y le quitamos el interior al central de cada cuadrado, y continuamos con este proceso una cantidad numerable de veces. Es notable que cada iteración está contenida en el paso anterior. Ahora, si aplicamos el Teorema de Subcontinuos anidados, nos damos cuenta que la Carpeta de Sierpinski es un continuo

Ejemplos



Definiciones

Sea X un espacio, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ al grupo de homeomorfismos de X en X.

Órbita

La órbita de x en X es el conjunto

$$\mathrm{Orb}_X(x) = \{h(x) \mid h \in \mathcal{H}(X)\}$$

Entonces $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$ si y solo si existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(x) = y$

Teoremas

Teorema

Si X un continuo, las órbitas de este son una partición y cumplen con las siguientes propiedades

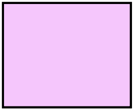
1) Para todo $x \in X$ se tiene que $\mathrm{Orb}_X(x) \neq \emptyset$.
2) $X = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Orb}_X(x)$.
3) Para cualesquiera $x, y \in X$ tal que $\mathrm{Orb}_X(x) \cap \mathrm{Orb}_X(y) \neq \emptyset$ ocurre que $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$ o para cualquier $x, y \in X$ tal que $y \notin \mathrm{Orb}_X(x)$, se tiene que $\mathrm{Orb}_X(x) \cap \mathrm{Orb}_X(y) = \emptyset$.
4) $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$ si y solo si $x \in \mathrm{Orb}_X(y)$
5) y, z están en la misma órbita de X si y solo si existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(y) = z$.

Definiciones

Grado de homogeneida

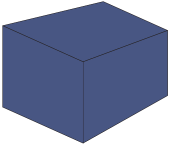
El grado de homogeneidad de un espacio X, es la cardinalidad de la familia de las órbitas de X. Dado $n \in \mathbb{N}$ un espacio es $\frac{1}{n}$-homogéneo si tiene exactamente n órbitas bajo la acción de grupo de homeomorfismo $\mathcal{H}(X)$, es decir, si su grado de homogeneidad es n

Ejemplos

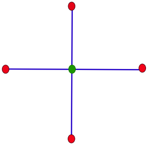


2-celda

arco



3-celda



n-odo

Definiciones

Hereditablemente unicoherente

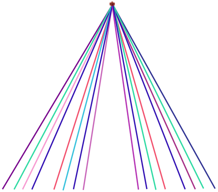
Sea X un continuo, se dice que X hereditablemente unicoherente si cada vez que tomamos dos subcontinuos de X, su intersección es conexa

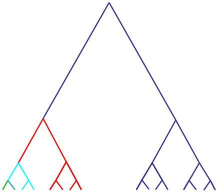
Definiciones

Dendroide

Un dendroide X es un continuo arcoconexo hereditablemente unicoherente

Ejemplos



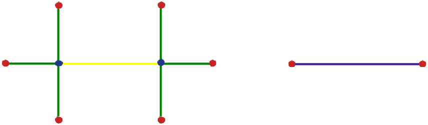


Definiciones

Podemos definir tres conjuntos notables que están en un dendroide.

Estos son: los puntos de ramificación $R(X)$, que son los puntos donde comienzan más de dos arcos que no se intersecten entre sí, excepto en ese punto.
$O(X)$ son los puntos donde comienzan solo dos arcos que no se intersectan.
$E(X)$ es el conjunto de puntos que son puntos finales de cada arco que los contiene.

Ejemplos



Teoremas

Teorema

Si X es un *dendroide*, entonces se cumple

1. Cada dos puntos de X están unidos unicamente por un arco
2. $E(X)$ no contiene *continuos no degenerados*
3. Y también $f(E(X)) = E(Y)$, $f(O(X)) = O(Y)$, $f(R(X)) = R(Y)$

Definiciones

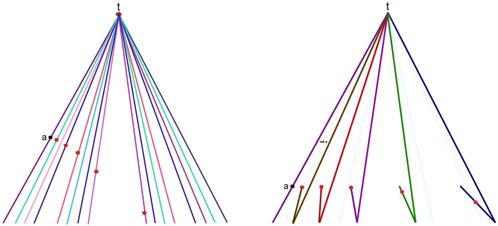
Abanico

Un abanico es un dendroide con un único punto de ramificación, el cuál es llamado vértice.

Abanico suave

Un abanico X con vértice t es suave si para cada $a \in X$ y cada sucesión $\{a_n\}_n$ que converge a a, la sucesión de arcos $\{ta_n\}_n$ converge al arco ta.

Ejemplos



Teoremas

Teorema

Si X un abanico con vértice t, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

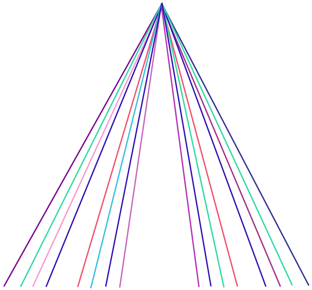
1. $E(X)$ es no vacío.
2. $O(X)$ es denso en X.

Ejemplos

Abanico de Cantor

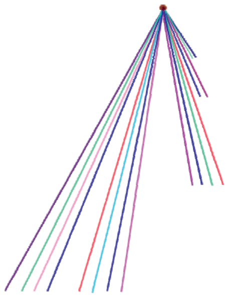
Denotaremos ahora al *Conjunto de Cantor* como C, entonces el *Abanico de Cantor* será

$$F_C = (C \times [0,1])/(C \times \{1\}).$$



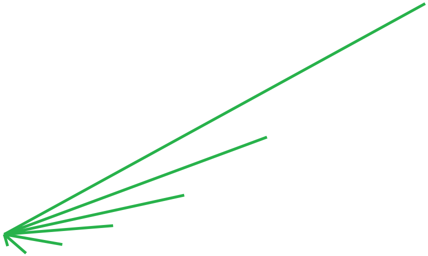
Ejemplos

Abanico de Cantor Omega



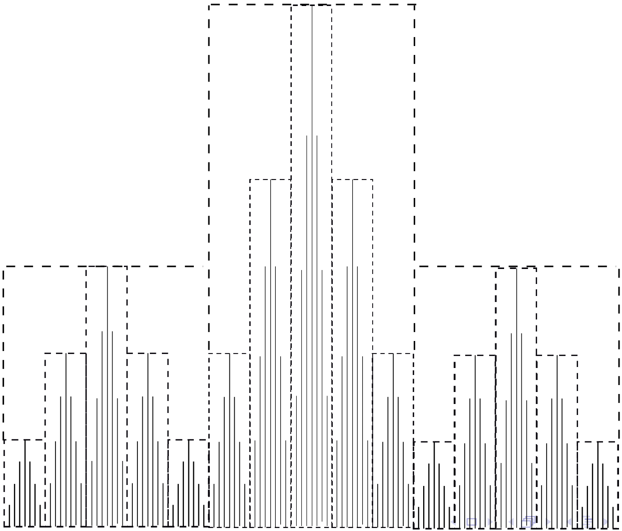
Ejemplos

Abanico Omega



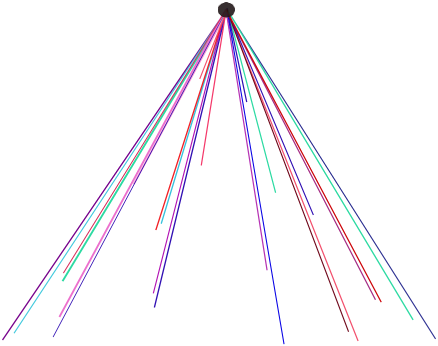
Ejemplos

Abanico de Lelek



Ejemplos

Abanico de Lelek



Abanico de Lelek

Teoremas

Teorema

Sea X un abanico suave que no es localmente conexo, tal que $E(X)$ es una orbita de X. Entonces

1. X es homeomorfo a F_C si y solo si $E(X)$ es cerrado en X.
2. X es homeomorfo a F_{C_ω} si y solo si $\mathrm{Cl}_X(E(X)) = E(X) \cup \{t\}$

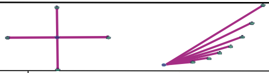
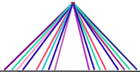
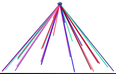
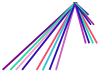
Teoremas

Teorema

Un abanico suave es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y solo si es hoemomorfo a uno de los siguientes abanicos.

1) Un *n-odo* simple, para alguna $n \in \mathbb{N} \setminus 1, 2$.
2) La dendrita F_ω.
3) El abanico de Cantor F_C.
4) El abanico de Lelek.
5) El abanico encogible de Cantor F_{C_ω}.

Teoremas

<table>
<tr><td>Localmente conexo</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">No localmente conexo</td><td>E(X) cerrado</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">E(X) no cerrado</td><td>E(X) denso</td><td></td></tr>
<tr><td>E(X) no denso</td><td></td></tr>
</table>

Teoremas

Teorema

No existen abanicos suaves $\frac{1}{4}$-homogéneos