Espacios Compactos

Seminario de Topología

Tairí Nevarez Muñoz

Facultad Ciencias Exactas

24 de Mayo 2018

Cubierta

- Definición:

Una colección de A de subconjuntos del espacio X se dice que *cubre* X, o que es una *cubierta* de X,si la union de los elementos de A coinciden con X. Se dice que A es una *cubierta abierta* de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Espacio compacto

- Definicion:
  Un espacio X se dice que es *compacto* si de cada cubrimiento abierto A de X podemos extraer una subcoleccon finita que tambien cubra a X.

Ejemplos:

- La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos $A = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
no contiene ninguna subcoleccion finita que cubra $\mathbb{R}$.
- El subespacio $X = \{0\} \cup \ \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ es compacto, ya que dado un crubimiento A de X, existe un elemento U de A que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos elementos de A, junto con el propio U, es una subcolección finita de A que cubre X.

Ejemplos:

- El intervalo $(0,1]$ no es compacto ya que el cubrimiento abierto $A = \{(\frac{1}{n}, 1] \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ no contiene a ninguna subcolección finita cubriendo $(0,1]$.
- El intervalo $(0,1)$ tampoco es compacto pero el intervalo $[0,1]$ si lo es.

Subespacios Compactos

- Si Y es un subespacio de X una coleccion A se dice que cubre a Y si la union de sus elementos contiene a Y.

Subespacios Compactos

- Si Y es un subespacio de X una coleccion A se dice que cubre a Y si la union de sus elementos contiene a Y.
- Lema:Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y solo si cada *cubierta* de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.

Demostracion:

Supongamos que Y es compacto y que $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{j}}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X. Entonces la colección $\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$ es un cubrimieto de Y por conjuntos abiertos en Y; como Y es compacto, existirá una subcolección finita de la forma $\{A_{\alpha 1}, ..., A_{\alpha n}\}$ es una subcolección finita de A que cubre Y.
Recíprocamente, sea $A' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos de Y.Para cada α, podemos elegir un conjunto A_α abierto en X tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$.
La colección $A = \{A_\alpha\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcolección finita $\{A_{\alpha 1}, ..., A_{\alpha n}\}$cubre a Y. Entonces $\{A'_{\alpha 1}, ..., A'_{\alpha n}\}$ es una subcolección finita de A' que cubre Y.

Teorema

- *Cada subespacio cerrado de un subespacio compacto es compacto*
- Demostracion:
  Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento A de Y por conjuntos abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto de B de X uniendo a A el conjunto abierto $X - Y$, esto es, $B = A \cup \{X - Y\}$.
  Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre X. si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, no la modificamos. La colección resultante en cualquier caso es una subcolección finita de A que cubre Y.

Teorema

- *La imagen de un espacio compacto bajo una función continua es un espacio compacto*
- Desmostracion: Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto. Sea A una cubierta del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La coleccion $\{f^{-1}(A) \mid A \in A\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto un número finito de ellos, por ejemplo $f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$ cubren X. Entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cubren $f(X)$.

Teorema

- El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.

Cada subpespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado

- Al propopner que K es cerrado, entonces K^C por definicion es abierto.
- Sea $y \in K^C$ arbitrario, como el espacio es Hausdorff $\forall x \in k \exists$ basicos $U_x y V_x$ t.q. $x \in U_x$ y $y \in V_x$,de la misma manera al ser Hausdorff se cumple que $U_x \cap V_x = \oslash$.
- Como K es compacto $\exists$ una subcoleccion finita de puntos en K $(x_1, x_2, ..., x_n)$ t.q. $k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

- Como para cada U_{x_i} le corresponde un V_{x_i} consideramos a $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$.
- $y \in V$ y ademas $V \subset K^C \rightarrow K^C$ es abierto
- $\therefore K$ es cerrado

Si un espacio es compacto y Hausdorff entonces es normal

Para esto primero se probara la siguiente proposicion:

- Sea X un espacio de Hausdorff y k_1 y k_2 subespacios compactos de X.
  Si $k_1 \cap k_2 = \emptyset \rightarrow \exists$ abiertos de X, U y V ajenos t.q. $k_1 \in U$ y $k_2 \in V$.

Demostracion de la proposicion anterior

- Sea $y \in k_1$ fijo $\forall\ x \in k_2\ \exists\ U_x^y$ y V_x^y t.q. $U_x^y \cap V_x^y = \emptyset$ y $x \in U_x^y$, $y \in V_x^y$.
- $\{U_x^y : x \in k_2\}$ es una cubierta abierta de k_2. Como k_2 es compacto $\exists$ $x_1, x_2, ..., x_n \in k_2$ t.q. $\{U_{x_1}^y, ..., U_{x_n}^y\}$ es cubierta de k_2
- Consideramos a $A_y = \overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} U_{x_i} \supset k_2$ y $B_y = \overset{m}{\underset{i=1}{\cap}} V_{x_i}$.
- $\{B_y : y \in k_1\}$ es cubierta abierta de k_1.

- Como k_1 es compacto $\exists$ $y_1, ..., y_n \in k_1$ t.q. $\{B_{y_1}, ..., B_{y_n}\}$
- $A_{y_1} \cap A_{y_2} \cap, ..., \cap A_{y_n} = V$

  $B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup, ..., \cup B_{y_n} = U$
  $\therefore U \cap V = \emptyset$

Demotracion de el teorema

Sean F_1 y F_2 cerrados disjutnos culesquiera, como X es compacto F_1 Y F_2 son compactos.
Dado que X es Hausdorff por la proposicion anterior $\exists$ U y V abiertos t.q. $F_1 \subset U, F_2 \subset V \rightarrow U \cap V = \emptyset$