Axiomas de separación

Seminario de Topología

Jesús Eduardo Mata Cano

Mayo 2018

Un poco de historia...

Antes de la definición que conocemos de espacio topológico, existieron muchas definiciones, algunas de las cuales suponían (lo que hoy conocemos como) algunos axiomas de separación. Por ejemplo, la definición que dio Felix Hausdorff en 1914 es equivalente a la definición que conocemos agregando una condición más, el axioma de separación de Hausdorff.

La necesidad de la introducción de estos axiomas surge por el hecho de poder distinguir espacios topológicos ya que bajo las condiciones de la definición de topología no era posible probar muchos teoremas de manera general.

La letra que se les asigna es T_i y viene del alemán *Trenunngaxiome*, que se traduce como axioma de separación.

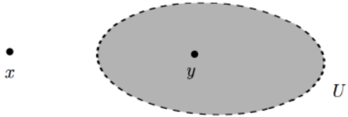
Espacios T_0

El primer axioma de separación fue introducido A. N. Kolmogoroff, y es conocido como el axioma T_0.

Definición

Un espacio topológico (X, τ) se dice un espacio T_0 si para cada par de puntos distintos x y y de X existe un subconjunto U tal que U contiene a uno de los dos puntos x ó y, pero no al otro; esto es

$$\forall x, y \in X \quad \exists U \in \tau : |U \cap \{x, y\}| = 1$$



Ejemplos espacios T_0

No todos los espacios topológicos son T_0. Cualquier espacio topológico X (con más de un punto) cuya topológia sea de la forma

$$\tau = \{X\} \cup \{A \cap Y : A \text{ es un subconjunto propio de } X\}$$

donde $Y \subseteq X$ es tal que $|X \backslash Y| > 1$, no es un espacio T_0.

- El espacio de *Sierpinski* $\mathcal{S} = (X, \tau)$, donde $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, es un espacio T_0.
- Considérese a $\mathbb{N}$ con la familia $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\}$ como topología. Este espacio es T_0
- Todo espacio métrico es T_0.
- Toda topología que contenga a una topología T_0 es T_0.
- Ser T_0 es una propiedad hereditaria y topológica.

La dificultad para que una topología cumpla con el axioma de separación T_0 está en poder garantizar que las cerraduras de conjuntos unipuntuales distintos sean distintas:

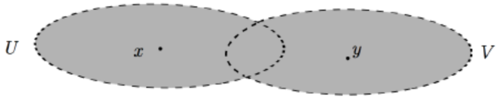
Teorema

Un espacio topológico (X, τ) es un espacio T_0 si y solo si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Espacios T_1

Definición

Diremos que un espacio topológico (X, τ) es un espacio T_1 si para cualesquiera dos puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.



Ejemplos y caracterización de espacios T_1

- De la definición todo espacio T_1 es T_0. Pero el recíproco no es cierto. Considérese a $\mathbb{N}$ con la familia $\tau = \{\varnothing, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\}$ como topología. Este espacio es T_0, pero no es T_1.
- Todo espacio topológico equipado con la topología cofinita es un espacio T_1.
- Ser T_1 es una propiedad hereditaria y topológica.

La relevancia de los espacios T_1 es que en todos ellos los conjuntos unipuntuales son siempre subconjuntos cerrados; de hecho, esto caracteriza a los espacios T_1.

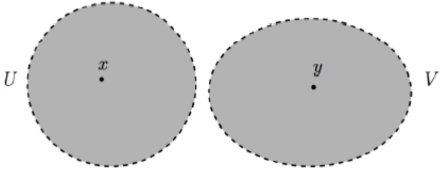
Teorema

Un espacio topológico (X, τ) es un espacio T_1 si y solo si para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X.

Espacios de Hausdorff o T_2

Definición

Un espacio topológico (X, τ) es un espacio *Hausdorff* o T_2 si X satisface la siguiente condición: para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$.



Ejemplos y caracterización de espacios de Hausdorff

- Todo espacio T_2 es un espacio T_1. Pero no al revés. Si X es un conjunto infinito que posee la topología cofinita, entonces cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X siempre se intersectan.
- Todo espacio espacio métrico es un espacio de Hausdorff.
- Toda topología más fina que una topología T_2 es una topología T_2.
- Ser T_2 es una propiedad hereditaria y topológica.

Teorema

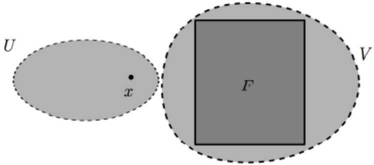
Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un solo punto.

En 1921 L. Vietoris introdujo los espacios regulares o espacios T_3.

Definición

Un espacio topológico X es un espacio regular o T_3 si satisface las siguientes condiciones:

1. X es un espacio T_1;
2. para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \backslash F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.



Ejemplos

- Debido a que todo espacio T_3 es T_1, entonces todos los conjuntos unipuntuales son cerrados. De ahí que todo espacio T_3 es un espacio T_2. Pero el recíproco no es cierto. Considérese a $\mathbb{R}$ con la topología τ que tiene como subbase a la familia $\mathcal{S} = \{\mathbb{Q}\} \cup \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Este es un espacio T_2 pero no T_3.
- Cualquier espacio métrico es un espacio T_3.
- Ser T_3 es una propiedad hereditaria.
- Ser T_3 es una propiedad topológica.

Caracterización de espacios T_3

Teorema

Sea (X, τ) un espacio T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *El espacio X es T_3.*
2. *Para cualquier punto $x \in X$ y cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subseteq U$.*
3. *Cada punto x de X tiene una base local de vecindades formada por subconjuntos cerrados.*

Espacios normales o T_4

Un axioma de separación más fuerte que el axioma de separación T_3 es el axioma T_4 o axioma de normalidad. Este último fue introducido por Heinrich Tietze en una serie de tres artículos que aparecieron en 1923. Este axioma también fue introducido y estudiado de manera independiente por P. Alexandroff y P. Urysohn en 1924.

Definición

Un espacio topológico (X, τ) es normal o T_4 si X tiene las siguientes propiedades:

1. X es un espacio T_1; y
2. para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X, existen abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.

Ejemplos

- Todo espacio normal es un espacio regular o T_3.
- Todo espacio métrico es un espacio normal.

El siguiente resultado proporciona una caracterización de normalidad análoga a la presentada anteriormente para espacios regulares.

Proposición

Sea (X, τ) un espacio T_1. El espacio X es un espacio normal si y solo si todo subconjunto cerrado F de X y para cada subconjunto abierto A de X tal que $F \subseteq A$, existe un abierto B de X tal que $F \subseteq B \subseteq \overline{B} \subset A$.

El siguiente resultado fue demostrado por F. B. Jones en 1937, y es de gran relevancia en topología general.

Teorema (F. B. Jones)

Sea X un espacio normal separable. Si X contiene un subespacio discreto y cerrado de cardinalidad κ, entonces $2^{\kappa} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Usando este resultado es posible probar que el cuadrado de la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ no es un espacio normal.

Espacios completamente regulares o $T_{3\frac{1}{2}}$

Definición

Un espacio topológico (X, τ) es completamente regular (o Tychonoff) si satisface las siguientes condiciones:

1. X es un espacio T_1; y
2. para cualquier conjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$.

Ejemplos y contraejemplos

- Todo espacio completamente regular es regular.
- Dado que la suma y el producto de funciones reales continuas definidas en un espacio topológico arbitrario son continuas, es posible ver directamente que todo espacio métrico es un espacio completamente regular.
- El *plano de Moore* es un espacio completamente regular que no es normal.

El plano de Moore

Considérese a $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$. Para definir la topología en X, se definen los siguientes conjuntos:

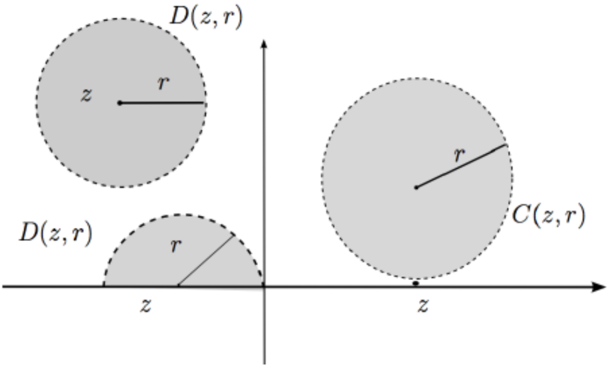
- $X_0 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$
- Para cada $z = (a,b) \in X \backslash X_0$ y $r > 0$, definimos

$$D(z,r) = X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$$

- para cada $z = (a,b) \in X_0$ y $r > 0$, definimos

$$C(z,r) = \{z\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-r)^2 < r^2\}.$$

Resulta que la familia
$\mathcal{B} = \{D(z,r) : z \in X \backslash X_0, r > 0\} \cup \{C(z,r) : z \in X_0, r > 0\}$
es una base para una topología τ sobre X.



Sean $F \subseteq X$ cerrado y $z \notin F$.

- Si $z \in X \backslash X_0$, entonces existe $r > 0$ tal que $D(z,r) \cap F = \varnothing$. La función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{mín}\{\frac{d(x,z)}{r}, 1\}$ es la deseada.

- Si $z = (x_0, 0) \in X_0$, entonces existe $r > 0$ tal que $C(z, r) \cap F = \varnothing$. Sea $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u - x_0)^2 + (v - r)^2 = r^2\}$ la circunferencia de $C(z, r)$. Para todo $x \in X \backslash X_0$ sea $s(x)$ el punto de intersección de la línea recta que une a z con x con S.

Definiendo $f : X \to [0, 1]$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = z \\ 1, & \text{si } x \in X_0 \backslash \{z\} \\ \text{mín}\{1, \frac{d(x,z)}{d(s(x),z)}, & \text{si } x \in X \backslash X_0 \end{cases}$$

tenemos la función buscada.


That's all Folks!