Espacios Conexos

Eybette Mercado Favela

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Juárez del Estado de Durango

Mayo de 2018

Definición

Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Una **separación** de $\mathbf{X}$ es un par $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ de abiertos disjuntos no vacíos de $\mathbf{X}$ cuya unión es $\mathbf{X}$. El espacio $\mathbf{X}$ se dice que es **conexo** si no existe una separación de $\mathbf{X}$.

Otro modo de formular la definición de conexión es la siguiente: *Un espacio* $\mathbf{X}$ *es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *que son abiertos y cerrados en* $\mathbf{X}$ *son el conjunto vacío y el propio* $\mathbf{X}$.

Definición

Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Una **separación** de $\mathbf{X}$ es un par $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ de abiertos disjuntos no vacíos de $\mathbf{X}$ cuya unión es $\mathbf{X}$. El espacio $\mathbf{X}$ se dice que es **conexo** si no existe una separación de $\mathbf{X}$.

Otro modo de formular la definición de conexión es la siguiente: *Un espacio* $\mathbf{X}$ *es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de* $\mathbf{X}$ *que son abiertos y cerrados en* $\mathbf{X}$ *son el conjunto vacío y el propio* $\mathbf{X}$.

Para un subespacio $\mathbf{Y}$ de un espacio topológico $\mathbf{X}$ existe otra manera alternativa de formular la definición de conexidad.

Lema

Si $\mathbf{Y}$ es un subespacio de $\mathbf{X}$, una separación de $\mathbf{Y}$ es un par $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es $\mathbf{Y}$ de modo que

$$\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = \emptyset \text{ y } \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{A}} = \emptyset.$$

El espacio $\mathbf{Y}$ es conexo si no existe una separación de $\mathbf{Y}$.

Para un subespacio $\mathbf{Y}$ de un espacio topológico $\mathbf{X}$ existe otra manera alternativa de formular la definición de conexidad.

Lema

Si $\mathbf{Y}$ es un subespacio de $\mathbf{X}$, una separación de $\mathbf{Y}$ es un par $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es $\mathbf{Y}$ de modo que

$$\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} = \emptyset \text{ y } \mathbf{B} \cap \overline{\mathbf{A}} = \emptyset.$$

El espacio $\mathbf{Y}$ es conexo si no existe una separación de $\mathbf{Y}$.

1. .- Sea **X** un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de **X**, luego **X** es conexo.

Ejemplos

1. .- Sea $\mathbf{X}$ un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de $\mathbf{X}$, luego $\mathbf{X}$ es conexo.
2. .- Sea $\mathbf{Y}$ el subespacio $[-1,0) \cup (0,1]$ de la recta Real $\mathbb{R}$.

Ejemplos

1. .- Sea $\mathbf{X}$ un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de $\mathbf{X}$, luego $\mathbf{X}$ es conexo.
2. .- Sea $\mathbf{Y}$ el subespacio $[-1,0) \cup (0,1]$ de la recta Real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1,0)$ y $(0,1]$ son no vacíos y abiertos en $\mathbf{Y}$ y, de esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{Y}$.

1. .- Sea $\mathbf{X}$ un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de $\mathbf{X}$, luego $\mathbf{X}$ es conexo.
2. .- Sea $\mathbf{Y}$ el subespacio $[-1,0) \cup (0,1]$ de la recta Real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1,0)$ y $(0,1]$ son no vacíos y abiertos en $\mathbf{Y}$ y, de esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{Y}$.
3. .- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo con la topología usual.

Ejemplos

1. .- Sea $\mathbf{X}$ un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de $\mathbf{X}$, luego $\mathbf{X}$ es conexo.
2. .- Sea $\mathbf{Y}$ el subespacio $[-1,0) \cup (0,1]$ de la recta Real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1,0)$ y $(0,1]$ son no vacíos y abiertos en $\mathbf{Y}$ y, de esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{Y}$.
3. .- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo con la topología usual.
4. .- Conjunto numerable con la topología cofinita.

Ejemplos

1. .- Sea $\mathbf{X}$ un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de $\mathbf{X}$, luego $\mathbf{X}$ es conexo.
2. .- Sea $\mathbf{Y}$ el subespacio $[-1,0) \cup (0,1]$ de la recta Real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1,0)$ y $(0,1]$ son no vacíos y abiertos en $\mathbf{Y}$ y, de esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{Y}$.
3. .- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo con la topología usual.
4. .- Conjunto numerable con la topología cofinita.
5. .- Sea $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \geq 2\}$ junto con la topología generada por los conjuntos de la forma $\mathbf{U}_n = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \text{ divide a } n\}$
6. .- $(0,1)$ es conexo con la topología usual, ¿Lo es también con la Topología límite inferior?

1. .- Sea $\mathbf{X}$ un conjunto dotado de la topología indiscreta. No existe una separación de $\mathbf{X}$, luego $\mathbf{X}$ es conexo.
2. .- Sea $\mathbf{Y}$ el subespacio $[-1,0) \cup (0,1]$ de la recta Real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1,0)$ y $(0,1]$ son no vacíos y abiertos en $\mathbf{Y}$ y, de esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{Y}$.
3. .- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo con la topología usual.
4. .- Conjunto numerable con la topología cofinita.
5. .- Sea $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \geq 2\}$ junto con la topología generada por los conjuntos de la forma $\mathbf{U}_n = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \text{ divide a } n\}$
6. .- $(0,1)$ es conexo con la topología usual, ¿Lo es también con la Topología límite inferior?

Lema

Si los conjuntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ forman una separación de $\mathbf{X}$, y además $\mathbf{Y}$ es un subespacio conexo de $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{Y}$ está contenido o bien en $\mathbf{C}$, o bien en $\mathbf{D}$.

Teorema

La unión de una colección de subespacios conexos de $\mathbf{X}$ que tienen un punto en común es conexa.

Lema

Si los conjuntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ forman una separación de $\mathbf{X}$, y además $\mathbf{Y}$ es un subespacio conexo de $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{Y}$ está contenido o bien en $\mathbf{C}$, o bien en $\mathbf{D}$.

Teorema

La unión de una colección de subespacios conexos de $\mathbf{X}$ que tienen un punto en común es conexa.

Lema

Si los conjuntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ forman una separación de $\mathbf{X}$, y además $\mathbf{Y}$ es un subespacio conexo de $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{Y}$ está contenido o bien en $\mathbf{C}$, o bien en $\mathbf{D}$.

Teorema

La unión de una colección de subespacios conexos de $\mathbf{X}$ que tienen un punto en común es conexa.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ un subespacio conexo de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{B}$ es también conexo.

En otras palabras: si $\mathbf{B}$ se forma añadiéndole a $\mathbf{A}$ alguno o todos sus puntos límite, entonces $\mathbf{B}$ es conexo.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ un subespacio conexo de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{B}$ es también conexo.

En otras palabras: si $\mathbf{B}$ se forma añadiéndole a $\mathbf{A}$ alguno o todos sus puntos límite, entonces $\mathbf{B}$ es conexo.

Demostración

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ subconjuntos de $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ un subespacio conexo de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{B}$ es también conexo.

En otras palabras: si $\mathbf{B}$ se forma añadiéndole a $\mathbf{A}$ alguno o todos sus puntos límite, entonces $\mathbf{B}$ es conexo.

Demostración

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ subconjuntos de $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$. Supongamos que $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ es una separación de $\mathbf{B}$.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ un subespacio conexo de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{B}$ es también conexo.

En otras palabras: si $\mathbf{B}$ se forma añadiéndole a $\mathbf{A}$ alguno o todos sus puntos límite, entonces $\mathbf{B}$ es conexo.

Demostración

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ subconjuntos de $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$. Supongamos que $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ es una separación de $\mathbf{B}$. Por el Lema ..., el conjunto $\mathbf{A}$ verifica $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$ o $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$; supongamos que $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$. Entonces $\overline{\mathbf{A}} \subset \overline{\mathbf{C}}$. Como $\overline{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{D}$ son disjuntos, $\mathbf{B}$ no puede intersecar a $\mathbf{D}$. Esto contradice el hecho de que $\mathbf{D}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{B}$.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ un subespacio conexo de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, entonces $\mathbf{B}$ es también conexo.

En otras palabras: si $\mathbf{B}$ se forma añadiéndole a $\mathbf{A}$ alguno o todos sus puntos límite, entonces $\mathbf{B}$ es conexo.

Demostración

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ subconjuntos de $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$. Supongamos que $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cup \mathbf{D}$ es una separación de $\mathbf{B}$. Por el Lema ..., el conjunto $\mathbf{A}$ verifica $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$ o $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$; supongamos que $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$. Entonces $\overline{\mathbf{A}} \subset \overline{\mathbf{C}}$. Como $\overline{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{D}$ son disjuntos, $\mathbf{B}$ no puede intersecar a $\mathbf{D}$. Esto contradice el hecho de que $\mathbf{D}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{B}$.

Teorema

La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.

Demostración

Sea $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ una función continua y supongamos que $\mathbf{X}$ es conexo.

Teorema

La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.

Demostración

Sea $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ una función continua y supongamos que $\mathbf{X}$ es conexo. Queremos probar que que el espacio imagen $\mathbf{Z} = f(\mathbf{X})$ es conexo. Como la función obtenida de f al restringir su rango al espacio $\mathbf{Z}$ es también continua, es suficiente considerar el caso de una función continua y sobreyectiva

$$g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

Teorema

La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.

Demostración

Sea $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ una función continua y supongamos que $\mathbf{X}$ es conexo. Queremos probar que que el espacio imagen $\mathbf{Z} = f(\mathbf{X})$ es conexo. Como la función obtenida de f al restringir su rango al espacio $\mathbf{Z}$ es también continua, es suficiente considerar el caso de una función continua y sobreyectiva

$$g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

Supongamos que $\mathbf{Z} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ es una separación de $\mathbf{Z}$. Entonces $\mathbf{X} = g^{-1}(\mathbf{Y}) = g^{-1}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = g^{-1}(\mathbf{A}) \cup g^{-1}(\mathbf{B})$. Además son abiertos en $\mathbf{X}$, pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{X}$, contradiciendo la hipótesis de que $\mathbf{X}$ era conexo.

Teorema

La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.

Demostración

Sea $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ una función continua y supongamos que $\mathbf{X}$ es conexo. Queremos probar que que el espacio imagen $\mathbf{Z} = f(\mathbf{X})$ es conexo. Como la función obtenida de f al restringir su rango al espacio $\mathbf{Z}$ es también continua, es suficiente considerar el caso de una función continua y sobreyectiva

$$g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

Supongamos que $\mathbf{Z} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ es una separación de $\mathbf{Z}$. Entonces $\mathbf{X} = g^{-1}(\mathbf{Y}) = g^{-1}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = g^{-1}(\mathbf{A}) \cup g^{-1}(\mathbf{B})$. Además son abiertos en $\mathbf{X}$, pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de $\mathbf{X}$, contradiciendo la hipótesis de que $\mathbf{X}$ era conexo.

1. Sean τ Y τ^* dos topologías en $\mathbf{X}$. Si $\tau^* \subset \tau$ ¿Qué puede decir la conexión de $\mathbf{X}$ respecto de una topología y respecto de la otra?
2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subespacios conexos de $\mathbf{X}$ tales que $\{\mathbf{A}_n\} \cap \{\mathbf{A}_n + 1\} \neq \emptyset$ para cada n. Demuestre que $\{\cup \mathbf{A}_n\}$ es conexo.
3. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{A}$ un subespacio conexo de $\mathbf{X}$. Demuestre que si $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, entonces $\mathbf{A} \cup (\cup \mathbf{A}_\alpha\}$ es conexo.

Referencias

James R. Munkres
Topología
Prentice hall, 2002.

Dugundji, J.
Topology
Boston, 1966.