Homeomorfismos

Raúl Vargas Antuna

Facultad de Ciencias Exactas - UJED

3 de mayo de 2018

Definicion (Función abierta/carrada)

Una función $f : X \to Y$ es llamada abierta (cerrada) si la imagen de cada conjunto abiero (cerrado) en X es abierto (cerrado) en Y.

Ejemplos

1. Si tenemos un producto de espacios topológicos $X = \Pi X_i$, las proyecciones naturales $p_i : X \to X_i$ son abiertas.
2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ no es abierta.
3. La función parte entera de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ es abierta y cerrada (para $\mathbb{Z}$ con la topología discreta)

Teorema

Sea $f : X \to Y$ una función entonces, f es una función abierta si y solo si f manda cada elemento de de una base de X a un conjunto abierto en Y.

Demostración

($\Rightarrow$) Sea U un elemento de una base para una topologá de X, U es abierto, y dado que f es abierta entonces $f(U)$ es abierto.
($\Leftarrow$) Sea U un elemento de una topología, entonces $U = \cup U_i$ donde U_i son elementos de de una base para esta topología, entonces,

$$f(U) = f(\cup U_i) = \cup f(U_i)$$

y como los U_i son basicos entonces los $f(U_i)$ son abiertos, por lo tanto $f(U)$ es abierto.

Definición (Función continua)

Una función $f : X \to Y$ es una función continua si la preimagen de cada conjunto abierto es una conjunto abierto; i.e. $\forall$ U abierto en Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Definición (Homeomorfismo)

Una función continua y bijectiva $f : X \to Y$, tal que $f^{-1} : X \to Y$ tambien es continua, es llamada homeomorfismo y la denotamos por $f : X \cong Y$. Dos espacios X y Y son homeomorfos, denotado como $X \cong Y$, si existe un homeomorfismo $f : X \cong Y$.

Ejemplos

1. $f : (\mathbb{N}, c) \to (\mathbb{N}, s)$ t. q. $x \to x$.
2. $f : (0, 2\pi) \to S^1 - \{1\}$ t. q. $x \to e^{ix}$.
3. $f : (0, 1] \to Y$ t. q. $x \to (x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))$ donde Y es la grafica de $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ entre $(0, 1]$.
4. $f : (0, 1] \to [1, \infty)$ t. q. $x \to \frac{1}{x}$.
5. $f : (\mathbb{R}, Li) \to (\mathbb{R}, u)$ t. q. $x \to x$.

Teorema

Sea $f : X \to Y$ biyectiva, Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es continua y abierta.
3. f es continua y cerrada.

Demostración

$(1 \Rightarrow 2)$ Si f es un homeomorfismo entonces f y f^{-1} son continuas, como f^{-1} es continua entonces para todo u abierto de X, $[f^{-1}]^{-1}(u)$ es abierto, luego $[f^{-1}]^{-1}(u) = f(u)$, por lo tanto f es continua y abierta.
$(2 \Rightarrow 3)$ Si f es continua y abierta, sea c un conjunto cerrado de X entonces $X - c$ es abierto, luego $f(X - c) = Y - f(c)$ es abierto por lo que $f(c)$ es cerrado, asi f es continua y cerrada.
$(3 \Rightarrow 1)$ Si f es continua y cerrada, por hipotesis f es biyectiva por lo que existe f^{-1}, luego si c es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $f(c)$ es cerrado en Y; este hecho, junto con la igualdad $[f^{-1}]^{-1}(c) = f(c)$ nos prueban la continuidadd e f^{-1}.

Teorema

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ que satisfacen $g \circ f = 1_X$. Entonces f es inyectiva y g es suprayectiva.

Demostración

Si $f(x) = f(x')$ entonces $x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$ por lo que f es inyectiva. Luego, para todo $x \in X$, $x = g[f(x)]$ por lo que g es sobreyectiva.

Teorema

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ continuas y tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Entonces f es un homeomorfismo y $g = f^{-1}$.

Demostración

Por el teorema anterior, tanto f como g son biyectivas, como f es biyectiva entonces existe f^{-1}, es unica y cumple que $f^{-1} \circ f = 1_X$ y $f \circ f^{-1} = 1_Y$ y como g cumple lo anterior entonces $g = f^{-1}$. Luego, como f es continua y biyectiva y existe f^{-1} continua, f es un homeomorfismo.

Teorema

Sea $f : X \cong Y$ y $A \subset X$. Entonces $f|A : A \cong f(A)$ y $f|X - A : X - A \cong Y - f(A)$