Subespacios y funciones continuas.

Seminario de Topología.

26/04/2018

Definición de subespacio

Definición

Sea Y un subconjunto no vacío de un espacio topológico (X, τ). La colección $\tau_Y = \{s \cap Y : s \in \tau\}$ de subconjuntos de Y es una topología sobre Y llamada la topología de subespacio (o la topología relativa, o la topología inducida). El espacio topológico (Y, τ_Y) es llamado un subespacio de (X, τ).

Demostración

Veamos que τ_Y es una topología.

- Como $\varnothing, X \in \tau$, tenemos que $\varnothing, Y \in \tau_Y$.

Demostración

Veamos que τ_Y es una topología.

- Como $\varnothing, X \in \tau$, tenemos que $\varnothing, Y \in \tau_Y$.
- Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$ y $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = (A \cap B) \cap Y$.

Demostración

Veamos que τ_Y es una topología.

- Como $\varnothing, X \in \tau$, tenemos que $\varnothing, Y \in \tau_Y$.
- Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$ y $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = (A \cap B) \cap Y$.
- Finalmente si $\beta \subseteq \tau$, $\cup\{B \cap Y : B \in \beta\} = (\cup\beta) \cap Y$.

El siguiente resultado proporciona un método para generar bases y subbases para los subespacios de un
espacio topológico dado.

Proposición

Sean (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$ y $y \in Y$.
1) Si B es una base (subbase) para τ, entonces $B_Y = \{b \cap Y : b \in B\}$ es una base (subbase) para τ_Y.
2) Si $B(y)$ es una base local de y en (X, τ), entonces $\{b \cap Y : b \in B(y)\}$ es una base local de y en (Y, τ_Y)

Teorema

Teorema

Sea (X, τ) un espacio topológico y (Y, τ_Y) un subespacio de (X, τ). Entonces:

1) Sea $A \subset Y$. Decimos que A es cerrado en τ_Y si y sólo si $A = Y \cap F$, donde F es cerrado en τ. **(Es decir, los conjuntos cerrado en Y, son intersecciones de Y con conjuntos cerrados en X).**

2) $\bar{A}_Y = Y \cap \bar{A}$ $\qquad$ $Y \cap int(A) \subset int_Y(A)$

$A'_Y = Y \cap A'$ $\qquad$ $Fr_Y(A) \subset Y \cap Fr(A)$

Definición

Definición

Sean $(X,\tau),(Y,\tau_1)$ espacios topológicos, y f una función de X en Y. Entonces $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau_1)$ se dice que es una función continua si para cada $U\in\tau_1$, $f^{-1}(U)\in\tau$.

Versión local

Continuidad local

Sea f una función $f : X \to Y$ con X, Y espacios topológicos. Diremos que f es continua en el punto $x_0 \in X$, si para cualquier subconjunto abierto A de Y que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto B de X que contiene a x_0 y que satisface $f(B) \subset A$

Continuidad usando bases

Si B_0 y B_1 son bases para X y Y respectivamente, entonces la función f es continua en x_0 si y sólo si, cada vez que $A \in B_1$ y $f(x_0) \in A$, se tiene que existe $B \in B_0$ de tal forma que $x_0 \in B$ y $f(B) \subseteq A$. (**Es decir, la continuidad puede ser comprobada usando bases**).

Teorema

Teorema

Si f es una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y, es decir, $f : X \longrightarrow Y$, entonces las siguientes son equivalentes:
1) f es continua.
2) Para cualquier abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.
3) $f^{-1}(A)$ es cerrado en X para cualquier cerrado A de Y.
4) $f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A))$ para cualquier $A \subseteq X$, donde cl_x y cl_Y son operadores cerradura en X y Y.
5) $cl_x(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl_Y(B))$ para cada $B \subseteq Y$.

Corolario

Corolario

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre espacios topológicos entonces las siguientes son equivalentes:
1) $f : X \longrightarrow Y$ es continua.
2) Para cada $Z \subseteq Y$ con $f(X) \subseteq Z$, la función $f : X \longrightarrow Z$ es continua, donde Z tiene la topología de subespacio respecto a Y.

Proposición

Proposición

Si las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces su composición $g \circ f$ también es continua.

Corolario

Corolario

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y A es un subespacio de X, entonces la función $f \restriction A : A \longrightarrow Y$ es continua.