

La estimación y el cálculo mental en educación básica: secundaria

Angelina Alvarado Monroy • Armando Mata Romero • María del Carmen Olvera Martínez

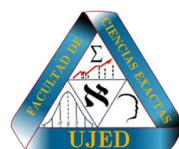


© Angelina Alvarado Monroy, Armando Mata Romero,
María del Carmen Olvera Martínez.



ISBN: 978-607-503-187-3

Publica:



Secretaría de Educación del Estado de Durango
con Facultad de Ciencias Exactas
de la Universidad Juárez del Estado de Durango

Imprime:



Proyecto: *Estrategias para la implementación de las habilidades matemáticas en Educación Básica.*

Financiamiento: *Programa Fortalecimiento de la Calidad Educativa 2017.*

Colaboradores:

Ricardo Isaac Bello Aguirre; Karla del Rocío Campos Martínez;
Carlos Michelle Díaz Leyva; Adriana Escobedo Bustamante.

Diseño:

Elizabeth Román Sánchez

Durango, Dgo. México, febrero de 2018

C.P. RUBÉN CALDERÓN LUJAN
SECRETARIO DE EDUCACIÓN DEL ESTADO DE DURANGO

MTRO. MIGUEL GERARDO RUBALCAVA ÁLVAREZ
SUBSECRETARIO DE SERVICIOS EDUCATIVOS

ING. CUITLÁHUAC VALDÉS GUTIÉRREZ
SUBSECRETARIO DE EDUCACIÓN, REGIÓN LAGUNA

PROFR. MARCO AURELIO ROSALES SARACCO
DIRECTOR DE EDUCACIÓN BÁSICA "A"

MTRO. JESÚS ROBERTO ROBLES ZAPATA
DIRECTOR DE EDUCACIÓN BÁSICA "B"

PROFR. ARMANDO AGUILAR SOTO
DIRECTOR DE EDUCACIÓN INDIGENA

MTRO. GABRIEL CASTILLO DOMÍNGUEZ
DIRECTOR DE SERVICIOS EDUCATIVOS, REGIÓN LAGUNA

MTRO. JOSÉ TEODORO ORTÍZ PARRA
DIRECTOR DEL SISTEMA ESTATAL DE TELESECUNDARIAS

LIC. TELMA MARCELA PALENCIA MEZA
*COORDINADORA ESTATAL DEL PROGRAMA
FORTALECIMIENTO DE LA CALIDAD EDUCATIVA*

Índice

Introducción	6
Capítulo 1	10
Acerca del Diseño y los Propósitos de este Libro	10
Capítulo 2	14
El Papel de la Estimación y la Aproximación	14
2.1 El papel de la estimación y aproximación.....	16
2.2 Llenado de Cuerpos Geométrico.....	17
2.3 Estimación de piezas para el teselado.....	19
2.4 Rellenar figuras	21
2.5 Aviones y Trayectorias	23
2.6 La Estimación de lo Cotidiano	25
2.7 Los patrones en el Crecimiento de la Población Mundial	28
2.8 Números grandes y números pequeños.....	30
2.9 Diseño digital: trabajo con fotografías.....	32
Capítulo 3	34
El Cálculo Mental	34
3.1 Los Puntos del Dominó: Estrategias para Sumar.....	36
3.2 Las Fichas de Dominó: Suma de Fracciones.....	38
3.3 Las Regletas de Cuisenaire: Descomposición de un Número en Sumas.....	39
3.4 Operaciones en Coro para Generar Secuencias Numéricas.....	40
3.5 La Baraja Aritmética: Combinaciones Ganadoras de Números y Operaciones.....	42
3.6 El juego de los Discos.....	44
3.7 Cadena de Sumas	46
Capítulo 4	48
Planear y orquestar una clase.....	48
Capítulo 5	54
Conclusiones.....	54
Bibliografía Citada	57
Anexo	58
Recursos y herramientas.....	58

Introducción

Este libro es el tercero de la serie *Cálculo mental y estimación en la educación básica: preescolar, primaria y secundaria*. Está pensado para profesores del nivel secundaria del estado de Durango, México, es producto de diferentes talleres que se han impartido en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango (FCE-UJED), a petición de la Secretaría de Educación del Estado de Durango (SEED) a través del proyecto *Estrategias para la implementación de las habilidades matemáticas en Educación Básica*, apoyado por el Programa de Fortalecimiento de la Calidad Educativa (PFCE, 2017), cuyos objetivos son:

Objetivo General:

Apoyar y fomentar que las Instituciones de Educación Básica Públicas implementen y cuenten con planes y programas educativos de calidad, a fin de que contribuyan al desarrollo de México.

Objetivos Específicos:

*Fortalecer las capacidades didácticas de los docentes y directivos para desarrollar las habilidades de lenguaje, comunicación y matemáticas en los/as educandos/as de preescolar, primaria y secundaria de escuelas públicas. Adquirir, elaborar o reproducir materiales educativos o didácticos complementarios para favorecer el desarrollo de habilidades de **lenguaje, comunicación y matemáticas** en los/as educandos/as de preescolar, primaria y secundaria de escuelas públicas.*

El libro incluye también, parte del material que a lo largo de la última década se ha elaborado en la FCE-UJED como resultado del trabajo de los autores en diversos grupos de investigación, principalmente en el Grupo Internacional de Investigación Campus Viviente de Educación en Ciencia, Ingeniería, Tecnología y Matemáticas. Esto ha contribuido a que este sea un material que para su diseño ha tomado como elemento central el contexto, esto se puede observar en las secciones 2.9 y 3.5, por mencionar algunas, donde aparecen escenarios de parques y museos del estado de Durango y se rescatan elementos de la cultura matemática tepehuana.

Finalmente, este libro pretende reflejar algunas facetas del cálculo mental y la estimación: como procedimientos que permiten anticipar y planear soluciones a problemas cotidianos, como herramienta didáctica para transformar la práctica de los profesores, como componente básico para la formación de jóvenes del nivel secundaria, como procedimientos transversales que conectan diferentes contenidos matemáticos y finalmente, para uso de profesionales e investigadores.

En las últimas décadas, la estimación y el cálculo mental han sido descuidados en la enseñanza de las matemáticas en los niveles básicos en nuestro país. Esto ha tenido repercusiones que han sido documentadas desde tiempo atrás en estudios conducidos con niños mexicanos y han dado información acerca de la necesidad de incorporar una instrucción activa de tales procedimientos (Mochón & Vázquez, 1995).

Desde una reflexión acerca de la formación necesaria en los profesores para fortalecer los procedimientos de cálculo mental y de estimación, surge la necesidad de definir el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido didáctico, es decir las estrategias y recursos para su enseñanza. Preguntas guías

en este trabajo son: ¿cómo hacerlo útil para los profesores/estudiantes?, ¿qué tipo de propuestas didácticas se pueden diseñar para su enseñanza?, ¿cómo se pueden enfatizar la interacción social y el trabajo colaborativo?

Este libro presenta un material que intenta dar respuesta, desde la visión de los autores, a estas preguntas en el contexto de la estimación y el cálculo mental, contexto en el cual, son pocos los textos que apoyan la transformación del trabajo docente para una incorporación dinámica y congruente con los resultados derivados de los avances en educación matemática de las últimas décadas.

Esta antología apoya al cumplimiento de los propósitos generales para la educación básica en matemáticas:

1. Concebir las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos.
2. Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas.
3. Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias (SEP, 2018).

Al igual que a los propósitos específicos para la educación secundaria (SEP, 2018)

1. Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y de-

cimales positivos y negativos. Por ejemplo, las secciones: 2.8 Números grandes y pequeños; 3.2 Las fichas de dominó: suma de fracciones;

3.3 Las regletas de Cuisenaire: descomposición de un número en sumas; 3.4 Operaciones en coro para generar secuencias numéricas; 3.5 La baraja aritmética: combinaciones ganadoras de números y operaciones, 3.6 Cadena de sumas, entre otras.

2. Perfeccionar las técnicas para calcular valores faltantes en problemas de proporcionalidad y cálculo de porcentajes. Por ejemplo, la sección 2.6 Estimación de lo cotidiano.

3. Modelar situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa; y definir patrones mediante expresiones algebraicas. Algunas de las secciones que atienden este propósito son: 2.7 Los patrones en el crecimiento de la población mundial; 3.1 Los puntos del dominó: estrategias para sumar y 3.6 El juego de los discos.

4. Razonar deductivamente al identificar y usar las propiedades de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares, y del círculo. Asimismo, a partir del análisis de casos particulares, generalizar los procedimientos para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos, y justificar las fórmulas para calcularlos. Las secciones 2.2 Llenado de cuerpos geométricos; 2.3 Estimación de piezas para el teselado y 2.4 Rellenar figuras son algunas de las propuestas que contribuyen al cumplimiento de este propósito.

5. Expresar e interpretar medidas con distintos tipos de unidad, y utilizar herramientas como el teorema de Pitágoras, la semejanza y las razones trigonométricas, para estimar y calcular longitudes. Por ejemplo, las secciones 2.3 Estimación de piezas para el teselado; 2.5 Aviones y trayectorias y 2.9 Diseño digital: trabajo con fotografías.

6. Elegir la forma de organización y representación —tabular, algebraica o gráfica— más adecuada para comunicar información matemática. Las secciones 2.5 Aviones y trayectorias y 2.9 Diseño digital: trabajo con fotografías proponen ambientes de aprendizaje relacionados con este propósito. Para su organización, en el **Primer capítulo** se ha considerado una breve aproximación a la necesidad de incluir el cálculo mental y la estimación en diferentes momentos de la enseñanza de la matemática en secundaria. También, se exponen algunos lineamientos y principios para un diseño didáctico altamente participativo y alternativo a la práctica de instrucción habitual meramente expositiva, acompañado de una evaluación formativa que apoye al docente en documentar el pensamiento del estudiante.

Finalmente, se describen los propósitos pretendidos con la elaboración de este libro.



El **Segundo capítulo** está reservado para una reflexión de los fines de la estimación y la aproximación, el papel que desempeñan en la formación de los estudiantes de secundaria y las ventajas de incorporarla como una práctica habitual en el aula. A posteriori se presentan ocho ambientes de aprendizaje que entrelazan numerosos contenidos del programa de estudios de nivel secundaria. Dichos ambientes se han probado en diferentes cursos y talleres con profesores y también con estudiantes.

Se dedica el **Tercer capítulo** al cálculo mental, su papel en la formación y los beneficios de incorporarlo en diferentes momentos de la enseñanza en secundaria. Se sigue con la presentación de siete diseños que muestran ambientes de aprendizaje dinámicos y participativos para incorporar en el aula.

En el **Cuarto capítulo**, se presenta una guía que servirá al profesor de secundaria en la planeación para llevar a buen fin la implementación en el aula de los diferentes ambientes de aprendizaje presentados en los dos capítulos previos.

Para ello, se presentan ejemplos de protocolos de planeación que ayudarán a anticipar y conducir las discusiones conceptualmente productivas que se pueden presentar durante el transcurso de la clase. Posteriormente, en el **Capítulo 5** se delinean algunas conclusiones de los autores acerca del diseño y la selección de los ambientes de aprendizaje tratados en este libro. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y un anexo que concentra los detalles de las herramientas y recursos necesarios para implementar los ambientes de aprendizaje tratados en este material.

Capítulo 1

Acerca del Diseño y los Propósitos de este Libro

Se Inicia este capítulo con la definición de *cálculo mental* que proporciona Reys (1984, p.588).

Hay dos características distintivas del cálculo mental. Produce una respuesta exacta, y el procedimiento se realiza mentalmente, sin usar dispositivos externos como lápiz y papel. El cálculo mental es un componente importante de la estimación ya que proporciona la piedra angular necesaria para los diversos procesos numéricos utilizados al realizar un cálculo para la estimación.

Tal definición resulta apropiada para los propósitos de este libro, dado que hace referencia también a la estimación, poniendo de manifiesto la correlación entre los dos tipos de cálculo. «El cálculo mental y la estimación nos permiten prever o evaluar la solución de los problemas que se presentan» (Segovia & Rico, 2016, p. 149), esto hace que sean de gran utilidad en el proceder matemático de lo cotidiano y, en consecuencia, que sean de los procedimientos más utilizados. El perfil de egreso en el ámbito del pensamiento matemático establece que al término de la secundaria el estudiante «Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para proyectar escenarios y analizar situaciones. Valora las cualidades del

pensamiento matemático» (SEP, 2017, p. 48). Por lo anterior, en la formación básica se deben considerar estrategias con el propósito de desarrollar habilidades en los estudiantes para el manejo del cálculo mental y la estimación, las cuales son cruciales al enfrentar la resolución de un problema o situación contextualizada. Cuando se privilegia una enseñanza algorítmica, los estudiantes suelen ser más exitosos y sentirse más cómodos con ejercicios que les piden realizar cálculos exactos a partir de un procedimiento establecido. En contraste, cuando se busca apoyar el desarrollo de habilidades de razonamiento, de sentido lógico, de pensamiento fluido y flexible y de comprensión conceptual, es necesario incluir actividades de estimación y cálculo mental. Tales habilidades están estrechamente relacionadas, pero también se pueden establecer sus diferencias. Para Hartnett (2007), el cálculo mental utilizando estimaciones suele ser más complejo que sólo aplicar un procedimiento, dado que requieren de un conocimiento profundo de cómo funcionan los números en el contexto de la situación.

Al ser el cálculo mental y la estimación habilidades para la vida diaria, una ventaja es que es posible relacionarlos con múltiples contextos y contenidos. En Educación Secundaria se pueden relacionar con todos los ejes (Número, Álgebra y variación; Forma, espacio y medida; y, Análisis de datos) y con casi

todos los contenidos del plan de estudios de matemáticas (SEP, 2018). Bajo este supuesto, en este libro se presentan propuestas didácticas con la intención de otorgar un papel preponderante al cálculo mental y a la estimación durante todo el ciclo de educación secundaria; sin embargo, debe aclararse que este libro no enseña a estimar o calcular mentalmente, más bien ofrece situaciones dirigidas a que los estudiantes desarrollen habilidades, discutan diferentes formas de aproximarse para resolver las situaciones y que cada estudiante pueda apropiarse de aquellas que le parezcan “mejores formas”. Lo primero que se ha tomado en cuenta para el diseño ha sido centrarse en una alternativa al método tradicional expositivo, asumiendo que el conocimiento no ocurre por transmisión. Así, las propuestas didácticas son prácticas de evaluación formativa conocidas como Ambientes de Aprendizaje Centrados en el Estudiante (AACE), en ellos el conocimiento debe ser construido por los estudiantes y se debe «proporcionar actividades interactivas y complementarias que permiten a los individuos abordar necesidades e intereses de aprendizaje únicos, estudiar múltiples niveles de complejidad y profundizar la comprensión» (Hannafin & Land, 1997, p. 168; citados por Land, Hannafin & Oliver, 2012).

En los AACE varían los métodos y estrategias utilizados por los estudiantes en función de los objetivos y contextos en los cuales son aplicados. Aunque, según Land, Hannafin y Oliver (2012), todos deben comprender cuatro componentes básicos:

Contextos que representan la naturaleza de los problemas o tareas que guían y orientan a los estudiantes para el aprendizaje;

Herramientas que ofrecen apoyo basado en tecnologías (digitales y/o materiales concretos de bajo costo y fácil acceso) para representar, organizar, manipular, construir comprensión y comunicar conocimiento;

Recursos como fuentes de información y contenido, pueden ser fuentes de información estática o recursos dinámicos;

Andamios que sean mecanismos de apoyo diseñados para ayudar al individuo en sus esfuerzos para entender procedimientos, estrategias, conceptos y sobre cómo reflexionar, planear, monitorear, etc.

La enseñanza es un proceso en el cual se negocian las ideas y, posteriormente, son apropiadas por el estudiante, de esta manera, una comunicación efectiva tiene mucho que ver con una buena práctica de enseñanza. Para apoyar dicha práctica, se consideró propicio que el diseño de los ambientes de aprendizaje, además de involucrar procesos de estimación y cálculo mental, consideraran lo siguientes aspectos:

- Estar alineados con los ejes y contenidos del currículo vigente (SEP, 2018);
- Relacionar más de un contenido de matemáticas o de otra disciplina;
- Ofrecer oportunidades para que los estudiantes de secundaria expresen sus ideas, conduciendo hacia la posibilidad de observar múltiples respuestas correctas;
- Fomentar que los estudiantes sientan que crean sus propias respuestas y no sólo siguen procedimientos preestablecidos y memorísticos;
- Presentar oportunidades para que los estudiantes expliquen sus razonamientos y discutan respuestas propuestas por otros compañeros de clase;

- Fomentar el trabajo colaborativo y ser altamente participativos;
- Ofrecer oportunidades para que los estudiantes generen producciones que indiquen al maestro su forma de razonamiento y, en consecuencia, permitan una evaluación formativa;
- Incluir ejemplos de preguntas que el maestro puede realizar basándose en las respuestas de sus estudiantes; y finalmente,
- Incorporar protocolos de planeación para el maestro.

Los ambientes de aprendizaje que conforman este libro, fueron seleccionados después de probar su funcionamiento en un taller multinivel (preescolar, primaria y secundaria) para profesores, esto permitió enriquecer las interacciones y modelar la complejidad de un grupo heterogéneo como el que usualmente tienen los profesores a su cargo. En el taller se propusieron dinámicas y actividades en las que los participantes interactuaban bajo condiciones y circunstancias propicias, con la finalidad de generar experiencias de aprendizaje matemático significativo y con sentido. En dichas experiencias, la tecnología digital, el juego, las múltiples respuestas a un problema y la demanda de un procedimiento o un método más que de un número como respuesta, cobraron relevancia al permitir el surgimiento y desarrollo de distintas formas de pensamiento, dirigidas a la comprensión de conceptos y/o procesos matemáticos.

El formato de presentación de los ambientes es el mismo en todos los que aparecen en este libro. Inicia con un nombre que describe la experiencia en la cual los estudiantes se verán inmersos, seguido de una o

más preguntas a las cuales se intentará responder al final de la experiencia de aprendizaje.

Se plantea un problema, una situación contextualizada, enseguida se muestra una lista de materiales y recursos útiles para aproximarse a la resolución del problema o situación y, se describe la organización del grupo y preparación sugerida. A posteriori, se presenta la actividad que está estructurada en tres partes: I) interactúa y construye conocimiento; II) discusión, revisión y extensión de todas las ideas; y, III) evaluación formativa. Tal estructura, como antes se dijo, nos permite sentar las bases para que se dé una construcción social de conocimiento compartido, dado que en la primera parte interactúan en equipos de tres, usualmente, en la segunda parte se efectúa una socialización guiada por el docente donde se discuten y conectan las diferentes aproximaciones de los equipos y enseguida, en la parte III, se ofrece un espacio para generar evidencia que informe del pensamiento y aprendizaje del estudiante. En algunos de los ambientes, al final se proponen actividades de extensión, o bien, para reforzar los aprendizajes y conocimiento que ha surgido.

Los ambientes de aprendizaje que se encuentran en los Capítulos 2 y 3 aparecen en la Tabla 1.1 y 1.2, acompañados de la alineación con el programa de estudios de pensamiento matemático en secundaria y la localización dentro de este texto. Lo anterior, con la intención de brindar una guía rápida al docente para organizar su planeación de los momentos adecuados durante el ciclo escolar para poner en práctica los ambientes de aprendizaje.

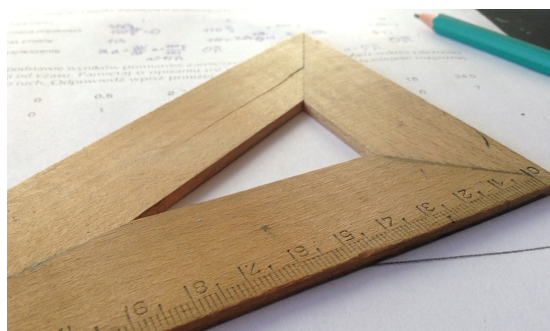


Tabla 1.1 *Ambientes de aprendizaje para promover la estimación en la educación secundaria que aparecen en el capítulo II de este libro.*

Ambientes de aprendizaje para la estimación		
Nombre	Eje y contenidos relacionados	Sección en este libro
Llenado de cuerpos geométricos	Forma, espacio y medida: Magnitudes y medidas.	2.2
Estimación de piezas para el teselado	Forma, espacio y medida: Magnitudes y medidas; Figuras y cuerpos geométricos. Número, Álgebra y variación: Multiplicación y división; Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.	2.3
Rellenar figuras	Forma, espacio y medida: Magnitudes y medidas. Número, Álgebra y variación: Multiplicación y división.	2.4
Aviones y trayectorias	Número, Álgebra y variación: Ecuaciones; Funciones. Contenidos de ciencias.	2.5
La estimación de lo cotidiano	Número, Álgebra y variación: Adición y sustracción; Multiplicación y división.	2.6
Los patrones en el crecimiento de la población mundial	Análisis de datos: Estadística. Número, Álgebra y variación: Adición y sustracción; Multiplicación y división; Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.	2.7
Números grandes y pequeños	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división.	2.8
Diseño digital: trabajo con fotografía	Número, Álgebra y variación: Proporcionalidad.	2.9

Tabla 1.2 *Ambientes de aprendizaje para promover la el cálculo mental en la educación secundaria que aparecen en el capítulo III de este libro.*

Ambientes de aprendizaje para el cálculo mental		
Nombre	Eje y contenidos relacionados	Sección en este libro
Los puntos del dominó: estrategias para sumar	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división.	3.1
Las fichas del dominó: suma de fracciones	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división.	3.2
Las regletas de Cuisenaire: descomposición de un número en sumas	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción.	3.3
Operaciones en coro para generar secuencias numéricas	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división; Patrones.	3.4
La baraja aritmética: combinaciones ganadoras de números y operaciones	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división.	3.5
El juego de los discos	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción; Multiplicación y división; Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes; Funciones.	3.6
Cadena de sumas	Número, Álgebra y variación: Número; Adición y sustracción.	3.7

Capítulo 2

El Papel de la Estimación y la Aproximación

La estimación y la aproximación están estrechamente ligadas con el proceso de la medición. Una *medición* es un número que indica una comparación entre el atributo del objeto que está siendo medido y el mismo atributo de una unidad dada de medida. Como atributos se pueden tener: peso, longitud/distancia, área/superficie, volumen/capacidad.

Para medir algún objeto, usualmente se siguen los pasos:

- 1) Decidir sobre el atributo a medir.
- 2) Seleccionar una unidad que tenga tal atributo,
- 3) comparar las unidades (ya sea llenando, cubriendo, igualando, o por algún otro método) con el atributo del objeto que está siendo medido. El número de unidades requeridas para igualar el objeto es la *medida*.

El desarrollo de las habilidades para la medición con una unidad debe estar ligado explícitamente con el concepto de medición como un proceso de

comparación de atributos, usando unidades e instrumentos de medida.

En la Tabla 2.1 se sugieren diferentes tipos de actividades que favorecen la medición.

Proponer actividades que involucren estimaciones ayuda a una mejor comprensión de la medición como concepto y como proceso. Dado que, los estudiantes ponen en juego información mental y visual para la cual se requiere una comprensión completa del significado del atributo (longitud, área, volumen) y de un conocimiento y dominio acerca de la unidad de medición. Además de que al mismo tiempo ponen a prueba sus habilidades para el cálculo mental.

Tabla 2.1 *Secuencia de experiencias para la enseñanza y el aprendizaje de la medición.*

Experiencia y Objetivo	Actividades	Observaciones
I. Realizar comparaciones para comprender el atributo en medición	Realizar comparaciones directas basadas en el atributo. Ejemplos: largo/corto; ligero/pesado; amplio/reducido; lleno/vacio, etc.	Si el atributo es comprendido no se requieren más actividades de este tipo.
II. Utilizar modelos de unidades de medidas para comprender cómo la comparación de un atributo (el llenado, la cubierta, lo largo) con las unidades de medida produce un número llamado <i>medida</i> .	Utilizar modelos físicos de unidades de medida para llenar, cubrir, igualar contorno, etc., y realizar la comparación deseada del atributo con la unidad de medida.	Iniciar con unidades no convencionales (tiras, clips, cuadrados, cubos, pelotas, triángulos, hexágonos etc., pueden ser de papel, madera, tela, foamy). Avanzar de manera paulatina hacia las unidades convencionales cuando se considere adecuado y pasar al uso de instrumentos de medición. El uso de unidades convencionales debe darse antes de utilizar fórmulas. Es importante enfocarse en un objetivo y evitar conflictos. Así, deben preguntarse ¿la lección es para comprender el significado de área o para entender los cm cuadrados? Tener en cuenta que las unidades no convencionales facilitan que el estudiante se centre en el atributo a medir. También, proveen una buena razón para el uso de unidades convencionales. La necesidad de tales unidades tiene mayor significado cuando han utilizado sus propias unidades y llegan a diferentes resultados.
III. Utilizar instrumentos de medición comunes de manera flexible y comprender su funcionamiento.	Pedir a los estudiantes que hagan sus propios instrumentos de medición y los utilicen. Luego, llevarlos a que los comparen con los convencionales.	Comparar instrumentos de medición contruidos por los estudiantes con los instrumentos convencionales los lleva a comprender que ambos desarrollan la misma función. Además, las diferencias entre los instrumentos diseñados por ellos y por sus compañeros detonan la necesidad del uso de un instrumento común de medición.

Fuente: Elaboración propia con información de Van de Walle et al. (2013).

2.1 El papel de la estimación y aproximación

La estimación de la medida es el proceso de utilizar información visual y mental para medir o realizar comparaciones sin utilizar instrumentos de medición. La estimación es una habilidad práctica que utilizamos casi siempre en la vida cotidiana. Es importante incluir en el aula actividades de estimación dado que:

- Ayuda a los estudiantes a centrarse sobre el atributo en juego y el proceso de medición.
- Provee una motivación intrínseca para la medición. Dado que hacen que se interesen en verificar cuán cerca estuvo su estimación de la medición correcta.
- Cuando se utiliza una unidad convencional, la estimación ayuda a familiarizarse con tal unidad.
- El uso de una unidad de referencia para hacer una estimación promueve el razonamiento multiplicativo. Por ejemplo, la fachada de la casa es 3 veces más chica que lo ancho del terreno. Lo ancho del terreno es quizá de 30 metros, ya que la fachada tiene más o menos 10.
- Apoya al surgimiento de la noción de intervalo cuando los estudiantes acotan su estimación entre dos valores extremos.
- Es una actividad mucho más compleja que encontrar la medida exacta, dado que no sólo requiere de conocer un algoritmo, sino requiere de un conocimiento profundo de los números y el contexto en el cual están siendo utilizados.

A continuación, se proponen algunos ambientes de aprendizaje para promover la inclusión activa de la estimación en el aula con estudiantes de secundaria (Tabla 2.1). Mayores detalles sobre los ejes y contenidos que atienden se encuentran en el Capítulo 1 (Tabla 1.1).

Tabla 2.1 Ambientes de aprendizaje para la estimación en educación secundaria.

Sección 2.2 Llenado de cuerpos geométricos
Sección 2.3 Estimación de piezas para el teselado
Sección 2.4 Rellenar figuras
Sección 2.5 Aviones y trayectorias
Sección 2.6 La estimación de lo cotidiano
Sección 2.7 Los patrones en el crecimiento de la población mundial
Sección 2.8 Números grandes y pequeños
Sección 2.9 Diseño digital: trabajo con fotografías

2.2 Llenado de Cuerpos Geométricos

La pregunta guía de este ambiente de aprendizaje es ¿Cuántas piezas se necesitan para llenar? La actividad se centra en el atributo de volumen, capacidad, llenado, el objetivo es que los estudiantes comprendan su significado de manera temprana usando unidades de medida no convencionales.



Recursos y/o herramientas

- Regletas de Cuisenaire o materiales similares.
- Urna transparente y pelotas o cuerpos geométricos.

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es con equipos de 3 estudiantes, esto permite favorecer las discusiones para llegar a acuerdos en el equipo, dado que con mayor número de estudiantes el tiempo se extiende y las vías propuestas de solución se exploran superficialmente. Por otro lado, cuando son sólo 2 estudiantes a menudo prevalecen las ideas del integrante que juega el papel de autoridad, es decir, al tener el reconocimiento de mejor desempeño en la clase de matemáticas.

En este tipo de ambientes de aprendizaje destacan estudiantes que en las clases tradicionales expositivas no son reconocidos.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se pide a los estudiantes que construyan un cuerpo geométrico utilizando regletas de diferentes tamaños. Después, cada integrante del equipo debe estimar:

1. ¿Cuántas regletas, en forma de cubo, son necesarias para llenar el cuerpo geométrico construido?

2. ¿Cuántas regletas, de tamaño dos cubos, se requieren para formar el mismo cuerpo geométrico?

3. ¿Cuántas regletas de tamaño cinco cubos?

Posteriormente deben registrar sus estimaciones en una tabla como la siguiente:

Nombre del integrante	Estimación con regleta de forma un cubo	Estimación con regleta de forma dos cubos	Estimación con regleta de forma cinco cubos
1.			
2.			
3.			

Para luego, comparar sus estimaciones y responder las siguientes preguntas:

- a) ¿Con cualquier regleta será posible construir su cuerpo geométrico sin necesidad de cortarla?
- b) ¿Cuál fue el procedimiento que les permitió hacer su estimación?

Terminan esta parte al verificar su respuesta intentando construir su cuerpo geométrico con las piezas indicadas. ¿Qué tan cercana fue su estimación?



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Una vez que los estudiantes han estimado y verificado sus respuestas, el profesor pide a los equipos compartir sus respuestas y experiencias, enfatizando en los diferentes procedimientos que siguieron para realizar las estimaciones.



Parte III. Evaluación formativa

Como se puede apreciar la actividad propuesta permite una aproximación centrada en el pensamiento del estudiante a través de las múltiples respuestas que surgen de la interacción con los recursos y entre los estudiantes y el profesor.

Para extender la tarea anterior se les puede pedir a los estudiantes que piensen y propongan una pieza o “unidad de medida” apropiada para construir cualquier cuerpo geométrico de los generados. Pedirles que hagan una estimación (sin medir, sólo observando) haciendo preguntas como:

- ¿Cuántas piezas de las que consideraron apropiadas creen que necesitan para llenar una caja dada?

Este tipo de actividad proporciona información al profesor acerca de la comprensión del estudiante

con relación a la noción y cálculo del volumen de un cuerpo geométrico, al igual que la necesidad de convenir una unidad de medida.

Sugerencia de actividades de reforzamiento: mostrar a los estudiantes una urna transparente con pelotas, o cualquier cuerpo geométrico, iguales. Solicitar a los estudiantes que estimen la cantidad de esos cuerpos geométricos que hay dentro de la urna.



2.3 Estimación de piezas para el teselado

La pregunta a la cual los estudiantes darán respuesta al final de la experiencia de aprendizaje es:

¿Cuántas piezas necesitamos para cubrir la superficie?

El ambiente de aprendizaje se introduce mediante el siguiente texto:

Matemorfosis es un grupo dedicado a la divulgación, para ellos la matemática está en todas partes, pero en ocasiones no es tan visible, así que su tarea es revelar su forma para que muchas personas puedan verla y apreciarla. En Matemorfosis están preparando un teselado (también conocido como adorno o mosaico) para llenar un espacio de 110 por 130 cm para la exposición. Disponen de la pieza de la Figura 1 para armar el teselado.

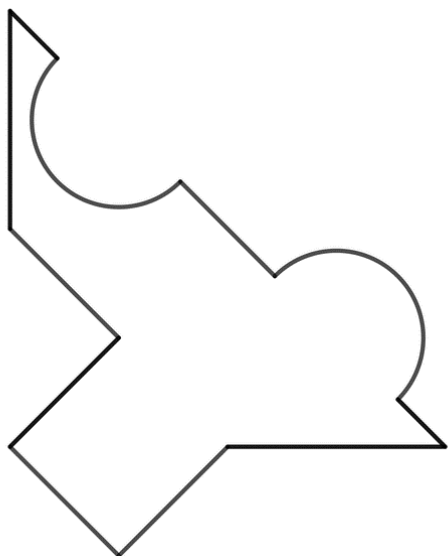


Figura 1. Pieza diseñada por B. Gamboa (2016)
¡Ayuda al equipo de Matemorfosis!



Recursos y/o herramientas

- Foamy de diferentes colores o materiales similares.
- Tijeras y marcadores
- Piezas para el teselado de 1 a 4 por equipo para la estimación.
- 100 piezas aproximadamente para verificar sus respuestas.

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es con equipos de 3 estudiantes para favorecer una exploración lo más completa posible de las diferentes aproximaciones planteadas por los estudiantes.



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Los estudiantes necesitan saber cuántas piezas deben generar para llenar completamente la superficie requerida y desperdiciar el menor material posible. Al iniciar la actividad se les proporciona únicamente una pieza de foamy, ellos deberán explorar sus ideas en el equipo. En ocasiones, los estudiantes sienten la necesidad de construir de una a tres piezas más de acuerdo con la manera en la que están pensando su estimación, el profesor decide si les entrega las piezas demandadas, o bien, los deja construir las.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

En esta parte los equipos comparten y justifican sus soluciones, a la vez que escuchan y cuestionan las de otros equipos. El profesor apoya las discusiones y establece conexiones entre las diferentes propuestas.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Se pide a los estudiantes que escriban una carta donde expliquen la cantidad de piezas necesarias para llenar el espacio reservado para el teselado y justifiquen por qué creen que su respuesta garantiza el menor gasto de material.



La estimación motiva la necesidad de verificar qué tan cerca estuvo su respuesta, cuando es el caso, se propone una *extensión de la actividad* y para ello se les proporcionan, o bien, ellos construyen sus piezas para construir el teselado correspondiente.

2.4 Rellenar figuras

La pregunta guía para este ambiente de aprendizaje es: ¿cuántas figuras base (de diferentes tipos) se requieren para rellenar una figura plana? La actividad está diseñada para introducir al estudiante a la estimación y al cálculo de áreas utilizando como unidades de medida cuadrados y triángulos.

Recursos y/o herramientas

- Diferentes figuras regulares e irregulares, en forma y tamaño.
(Ver ejemplos en Figuras 1 y 1).
- Hojas cuadriculadas y hojas con triángulos.

Organización del grupo y preparación

La manera apropiada de trabajar esta actividad es con equipos de tres estudiantes. A cada equipo se le entregan cuatro figuras y hojas cuadriculadas y trianguladas, se recomienda comenzar con las figuras básicas regulares, para posteriormente trabajar con figuras irregulares como las mostradas en la Figura 2.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Una vez que los estudiantes han realizado el cálculo del total de cuadrados dentro de cada figura, deberán llenar la siguiente tabla:

Figura	Total de cuadrados	Total de triángulos

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se pide a los estudiantes que recorten las figuras dadas con la mayor precisión posible. Después, deberán calcular el área de uno de los cuadrados de la hoja cuadriculada, y el área de uno de los triángulos de la hoja triangulada.

Posteriormente, deben colocar cada una de las figuras sobre las hojas cuadriculadas y dibujar el borde de la misma, deberán buscar una estrategia que les ayude a contar el total de cuadrados, dicha cantidad tendrán que registrarla en una tabla. Enseguida, se repite el proceso utilizando las hojas trianguladas. Se recomienda hacer preguntas generadoras como las siguientes:

- ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para rellenar la figura?
- ¿Qué relación existe entre la cantidad de cuadrados y la cantidad de triángulos necesarios para rellenar las figuras?
- ¿Por qué creen que sucede esto?

Figura 1.

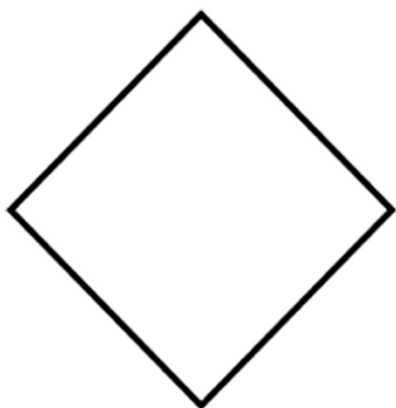
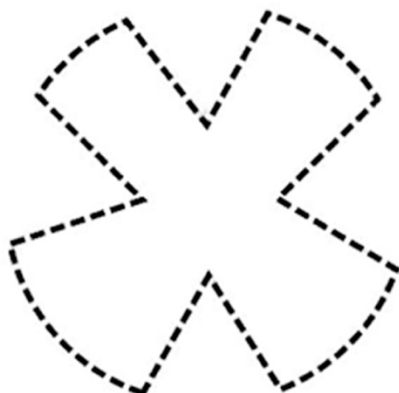
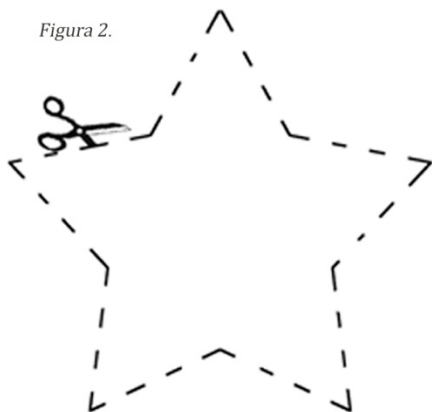


Figura 2.



Los alumnos deben compartir el total de cuadrados y de triángulos de cada una de las figuras en cada una de las retículas. Algunas posibles preguntas que se pueden hacer:

- ¿Dio la misma cantidad de cuadros que de triángulos?
- ¿Por qué creen que sucede esto?

Platicar el método usado para resolverlo y discutir las respuestas a las preguntas anteriores.



Parte III. Evaluación formativa **¡Informen sus resultados!**

En esta parte, se pide a los alumnos que diseñen su propia hoja para calcular el área de las figuras. Ellos deben decidir que figura geométrica utilizar.

Posteriormente, deberán calcular el área de las mismas figuras antes trabajadas y responder preguntas tales como:

- ¿Qué debe cumplir la figura geométrica utilizada en la retícula para asegurar que sea la misma cantidad de cuadrados y triángulos en las figuras diseñadas?
- ¿Qué cambios harían a las retículas para poder facilitar el conteo?.

2.5 Aviones y Trayectorias

Las preguntas que guían este ambiente de aprendizaje son: ¿cuáles son sus mejores vuelos? ¿cómo funcionan? Se sugieren cuatro diseños para construir aviones a partir del doblado de papel. Los aviones se prueban en interiores y exteriores, se ensaya con diferentes formas de lanzamiento, se observa el desempeño de cada modelo y se registran los datos para determinar características de cada diseño: trayectorias seguidas de acuerdo al lanzamiento, mejor zona de vuelo, velocidad alcanzada. Finalmente, con todos estos datos se debe sugerir la forma de pilotear cada avión.

El conocimiento que se puede generar es: patrones de medida, fricción del aire, tipos de trayectorias, velocidad, distancia, tiempo, presión atmosférica, etc.

Recursos y/o herramientas

- Cronómetro o reloj.
- Para estimar distancias piensan en sus propios patrones como pasos, varas, etc.
- Papel para origami tamaño carta y de colores.
- Hojas de trabajo e instructivos para construir los aviones (Anexo, p. 59-63).

También modelos disponibles en:

https://face.ujed.mx/?page_id=1681

Organización del grupo y preparación

Los alumnos trabajarán en equipos de tres estudiantes con oportunidades de observar, leer, interpretar, discutir ideas y argumentar tratando de convencer a sus compañeros, posteriormente registrarán el acuerdo por escrito en su hoja de trabajo y al final de cada tarea se realizará una puesta en común en gran grupo guiados por el profesor.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se pide a los estudiantes que sigan los instructivos (que aparecen en el Anexo) para construir **dos** de los aviones: Nakamura, Espía, Pteroplano y Profesional. Recuerden que la precisión de los dobleces es muy importante. Enseguida, los estudiantes experimentan lanzamientos de los aviones en diferentes direcciones, discuten en equipo y registran la información que se les pide:

1. En el siguiente espacio, reproduzcan la ruta (camino o trayectoria) de los aviones seleccionados en los diferentes tipos de lanzamiento. ¿Qué pasa si agregan una tira de papel insertada a una de las alas?, ¿y si agregan tiras en ambas alas?

Aviones seleccionados	
Avión 1: _____	Avión 2: _____
Lanzamiento en ángulo ascendente	
Lanzamiento horizontal	
Lanzamiento en ángulo descendente	
Lanzamiento vertical	

- Enseguida se les pide a los estudiantes que sugieran la mejor **zona de vuelo** de los dos diseños seleccionados de acuerdo con el espacio (**interior/exterior**) y expliquen por qué lo creen así.
- También, se les solicita a los estudiantes que aproximen la velocidad que alcanzan los aviones y expliquen cómo lo hicieron.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

En la discusión científica, que tiene lugar en gran grupo, se recomienda que la validación de las ideas o producciones realizadas en los equipos se apoye en la razón del argumento matemático aportado por los estudiantes, más que en la autoridad del profesor. Con base en la discusión el profesor guiará un cierre concentrando las ideas relevantes.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Hiram, Emilio, Rocío, Felipe y Luna son niños que están interesados en realizar competencias de aviones de papel en su escuela.

Anoten en una carta TODAS las recomendaciones que les puedan hacer acerca de la forma de pilotear los diferentes aviones. Podrían incluir en su carta información del tipo: Los mejores vuelos se producen con lanzamientos fuertes (suaves) y hacia La zona recomendada para el avión La trayectoria que sigue..., alcanza una velocidad de ... etc.

2.6 La Estimación de lo Cotidiano

¿Cuánto gastan tus papás? es la pregunta guía en este ambiente de aprendizaje. En él se trabajan ideas fundamentales de la estimación: igualdad y desigualdad; ubicar un valor dentro de un intervalo; motivar la verificación a través de un cálculo exacto; obtener diferenciales entre el valor aproximado y el exacto; pensamiento multiplicativo e implícitamente, el análisis y uso de propiedades de números reales.

La señora María tiene tres hijos que están por comenzar un nuevo ciclo escolar. La maestra le entregó una lista de útiles para cada uno de sus hijos, los cuales cursan primero, tercero y quinto grados. Cuando la señora María fue a la papelería a realizar un presupuesto, le proporcionaron la siguiente lista de precios:

ARTÍCULO	PRECIO	ARTÍCULO	PRECIO
Lápiz	\$4.70	Paquete de 100 hojas Bond	\$23.90
Pluma	\$5.80	Libro para colorear	\$29.90
Goma	\$4.50	Lápiz bicolor	\$5.40
Sacapuntas	\$2.50	Pegamento líquido	\$8.50
Libreta	\$11.90	Plumón de agua	\$9.90
Caja de colores	\$34.20	Plumón permanente	\$17.30
Juego de geometría	\$24.60	Plumón para pizarrón	\$23.40
Barra de pegamento	\$12.20	Caja de crayolas	\$23.50
Tijeras	\$12.40	Marca textos	\$10.30

Ayuda a la señora María a estimar ¿cuánto gastará en total?, si las listas de útiles son las siguientes:

Lista Primer Grado	Lista Tercer Grado	Lista Quinto Grado
4 libretas	6 libretas	7 libretas
1 lápiz	2 plumas	3 plumas
1 plumón de pizarrón	1 lápiz	1 lápiz
1 plumón de agua	1 plumón para pizarrón	1 plumón de pizarrón
1 plumón permanente	1 plumón de agua	1 plumón de agua
1 caja de colores	1 plumón permanente	1 plumón permanente
1 caja de crayolas	1 caja de colores	1 caja de colores
1 libro para colorear	1 goma	1 goma
1 goma	1 sacapuntas	1 sacapuntas
1 sacapuntas	1 tijeras	1 tijeras
1 tijeras	1 pegamento en barra	1 pegamento en barra
1 pegamento líquido	1 paquete de 100 hojas	2 paquete de 100 hojas
1 paquete de 100 hojas	1 juego de Geometría	1 juego de Geometría
	1 bicolor	1 bicolor
	1 marca textos	1 marca Textos

Recursos y/o herramientas

- Un listado de útiles escolares, pueden utilizar el presentado aquí, o bien, preparar previamente uno.

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es con equipos de 3 estudiantes. Cada equipo toma su lista de útiles escolares y empieza a estimar el costo final de la compra.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se realiza un juego que consiste en estimar el precio final de la compra, cada equipo dará su aproximación del costo total de la compra sin utilizar calculadora y en un tiempo corto propuesto por el profesor. El equipo ganador será el que se acerque más al total.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Al finalizar la actividad cada equipo expondrá su método para llegar a su aproximación de la compra. Una vez que los estudiantes han realizado la discusión se contestan las siguientes preguntas:

- ¿Cuál fue la estimación más baja? y ¿cuál fue la más alta?
- ¿Cuál es la diferencia entre la estimación más alta y la más baja?
- ¿El costo total de la lista de útiles escolares entre qué valores enteros se encuentra?
- ¿Cuál es el costo total exacto?
- ¿Cuál es la diferencia entre el costo total y cada una de las estimaciones?

¿Cuál es la estimación más cercana al costo total real?, ¿por qué?. Con esta actividad los alumnos fortalecen la noción de las propiedades de los números, así como el uso de los signos de desigualdad, es decir, que de una oración larga como: “el total de la compra se encuentra

entre 900 y 1000 pesos” logren transitar desde un lenguaje cotidiano al lenguaje propio de la matemática. Por ejemplo, «el costo total está entre 900 y 1000 pesos»; «el costo total es mayor que 900 pero menos que 1000» $900 < \text{costo total} < 1000$; $900 < CT < 1000$; $900 < x < 1000$, donde x representan el total de la compra».



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Realiza una lista de alimentos de lo que crees que se consume en tu casa durante una semana. Estima el precio de cada uno de los alimentos y el costo total de los alimentos que se consumen durante la semana y entrega la lista como reporte de tarea. Pide a tus padres que te proporcionen el recibo de pago de la próxima compra semanal y en clase compara las lista de compra estimada y la real, así como su costo total. Muestra a tus padres lo cerca o lejos que estuviste de la realidad.

2.7 Los patrones en el Crecimiento de la Población Mundial

¿Cuántos somos?, ¿cuántos seremos? son las preguntas que guían este ambiente de aprendizaje. En él se trabaja con datos acerca de la población mundial, que cambian en tiempo real. En repetidas ocasiones es necesario hacernos preguntas tales como, ¿cuántas personas habitamos el planeta tierra?, ¿cuántos hombres hay?, ¿cuántas mujeres?, ¿cuántos nacimientos se registraron el día de hoy en el mundo?, ¿cuántas personas nacieron en lo que va del año?, ¿cuántas han muerto?, ¿cuáles son las principales causas de muerte? Respuestas a este tipo de preguntas las podemos encontrar en el Reloj Mundial de la Población en el sitio de la página web <http://countrymeters.info/es/World>, en dicho enlace se puede observar que tales datos cambian cada segundo y por esta razón puede ser de utilidad observar los patrones de variación para realizar estimaciones y predicciones a futuro.

Organización del grupo y preparación

Para trabajar en esta actividad se sugiere organizar al grupo en equipos de 3 estudiantes, o más, de acuerdo con las computadoras suficientes para el acceso a internet. En caso de no disponer de conectividad se pueden realizar algunos ajustes, el maestro puede preparar una presentación que muestre los datos de la población consultados en diferentes momentos.

Recursos y/o herramientas

- Hojas de trabajo,
- Computadoras con acceso a internet o bien registro de datos de la población consultados en diferentes momentos.

Reloj de la población mundial		
01-12-2017 16:04:07		
7 569 188 869	Población actual	
3 817 958 163	Población masculina actual (50.4%)	
3 751 230 706	Población femenina actual (49.6%)	
136 416 490	Nacimientos este año	
272 911	Nacimientos hoy	
53 748 219	Muertes este año	
107 527	Muertes hoy	
0	La migración neta este año	
0	La migración neta hoy	
82 668 271	Crecimiento poblacional este año	
165 384	Crecimiento poblacional hoy	

Las 5 principales causas de muerte en el mundo		
hoy		Este año
Enfermedad de las arterias coronarias		
16 681	15.51 %	8 337 961
Accidente cerebrovascular		
11 889	11.06 %	5 942 941
Infecciones del tracto respiratorio inferior		
6 079	5.65 %	3 038 387
Enfermedad pulmonar obstructiva crónica		
6 040	5.62 %	3 019 037
Cáncer de los pulmones, tráquea y los bronquios		
3 228	3.00 %	1 613 522

Fuente: deathmeters.info

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se pide a los estudiantes que ingresen a la página del Reloj Mundial de la Población y observen cómo cambian los datos con respecto al tiempo

<http://countrymeters.info/es/World>

Los equipos deben realizar algunos registros en diferentes momentos acerca del número de habitantes

en el mundo, número de mujeres, número de hombres y cualquier otro dato que les parezca interesante. Los registros los pueden hacer cada segundo, cada 5 segundos, cada 10, etc. Para ello, pueden ayudarse de realizar capturas de pantalla y de registrar los resultados de la consulta en la siguiente tabla:

Variable/Dato	FECHA DE CONSULTA DE REGISTROS					
	H/M/S:	H/M/S:	H/M/S:	H/M/S:	H/M/S:	H/M/S:
Número de Habitantes						
Número de Mujeres						
Número de Hombres						

Con base en lo observado en sus registros, deben realizar una estimación o predicción para el valor que tendrán los datos de la tabla anterior dentro de tres horas.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas.

Cada equipo muestra las diferentes estimaciones y explica qué método utilizó para realizarlas.



Parte III. Evaluación formativa

Escriban una carta donde hablen de algún dato que les llamó la atención y expliquen cómo es su comportamiento y si podemos influir de alguna manera para modificar tal comportamiento.

2.8 Números grandes y números pequeños

En este ambiente de aprendizaje se proponen a los estudiantes diversas preguntas que tienen que ver con las preguntas guías son: ¿qué tan grande o pequeño es? Para responderlas, deben hacer estimaciones de cantidades muy grandes y cantidades muy pequeñas. Responder a las preguntas que se les plantean a los estudiantes implica que realicen investigaciones sobre algunos datos necesarios para hacer las estimaciones fomentando su espíritu de investigación. Además, se promueve el análisis y uso de la notación científica como estrategia para agilizar los cálculos.

Recursos y/o herramientas

- Preguntas impresas (una por equipo),
- computadora con acceso a Internet, o bien, datos previamente investigados.
- proyector de documentos.

Organización del grupo y preparación

Los alumnos trabajarán en equipos de tres estudiantes.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Un representante del equipo pasará a escoger un papelito que tendrá una pregunta impresa. Para dar respuesta a esa pregunta, los estudiantes pueden investigar en Internet algunos datos que consideren necesarios.



Las preguntas deben promover el uso de cantidades muy grandes y cantidades muy pequeñas.

Algunos ejemplos son:

1. ¿A qué velocidad, en kilómetros por hora, crece el cabello humano?
2. ¿Cuántos dulces come un niño al año?
3. ¿Cuántos kilogramos de tortillas se consumen en México en un año?
4. ¿Cuál es el volumen total de la sangre humana existente en el mundo?
5. ¿Cuántas horas pasa en las redes sociales un adolescente al año?
6. ¿Cuántas palabras llevas dichas a lo largo de tu vida?
7. ¿Cuántos segundos tienes de edad?
8. ¿Cuántas personas mueren aproximadamente al año en todo el mundo?
9. ¿Cuántos kilómetros miden tus pestañas?
10. ¿A qué velocidad, en metros por segundo, se mueven los satélites artificiales?
11. ¿Cuántos kilómetros recorre un caracol en un segundo?
12. ¿Cuál es el área de tu cuerpo? ¿cuánto volumen ocupa tu cuerpo?

13. ¿Cuántas personas con una complexión similar caben en el salón?



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Una vez que todos los equipos tengan sus respuestas, deberán exponer frente al grupo el procedimiento que siguieron. En la discusión, se recomienda que el profesor cuestione a los estudiantes el porqué de su estrategia, con la finalidad de validar las ideas con argumentos matemáticos. Además, la actividad debe servir de plataforma para que el profesor introduzca la notación científica y la conveniencia de su uso para agilizar los cálculos en las estimaciones.

Cada equipo deberá escribir en una hoja el procedimiento que siguieron para dar respuesta a su pregunta.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Como parte de la evaluación formativa, se propone al grupo que redacten el procedimiento para dar respuesta a una pregunta que sea extensión de alguna de las primeras. Por ejemplo, ¿Qué dimensiones debe tener un cuarto para que pudiéramos meter en él, todas las tortillas que se consumen en México en un año?

2.9 Diseño Digital: Trabajo con Fotografías

En este ambiente de aprendizaje la pregunta guía es ¿cómo podemos saber cuáles son realmente ampliaciones de la foto original? Con la finalidad de crear una necesidad de responderla se presenta a los estudiantes la siguiente la siguiente situación.

—Los diseñadores gráficos digitales, son maravillosos y tan necesarios... ¡y más el día de hoy!, ¡Qué desastre! — exclamaba Renata perdida entre un buen número de fotografías. —Ellos sí que saben de diseño por computadora, ya sabes Photoshop, Corel, Illustrator, etc, todos esos programas que usan para crear sus ilustraciones. Además, saben de percepción, color y hasta psicología para crear diseños que atraigan. ¡Ah claro! pero hoy en día como son tan necesarios, se aprovechan de ello y se buscan mejores trabajos y yo a sacar sus pendientes ¡ni hablar! — Ayer fue un día terrible para Renata, quien, además, por si fuera poco, se las tiene que arreglar con su jefe el Licenciado Fuentes, cuyo carácter no es de fiar. Le ha dejado terminar la tarea de Enrique, el diseñador que se ha marchado quizá a causa del humor del jefe, o en busca de un

mejor puesto y un buen salario. El Licenciado le ha pedido a Renata, que elija cuatro fotografías de las que Enrique tomó el fin de semana pasado del museo del Bebeleche y dejó en la computadora. Le pidió, además, que las amplíe y se las presente impresas para el collage que están preparando para la cruzada de apoyo a la cultura, que iniciarán en las escuelas de la ciudad. Renata estuvo trabajando en ellas, ya las eligió. Pero, ¡tiene un gran problema!, entre tanta modificación que hizo, no sabe ya cuáles serán ampliaciones verdaderas. Nos ha pedido ayuda y tenemos algo de material para ayudarla a identificarlas. Como seguramente tardarán en encontrar un diseñador digital, será mejor que escribamos un método en una carta para enseñarle a identificar las fotografías que realmente sean ampliaciones de la foto original.

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es con equipos de 3 estudiantes, esto permite favorecer las discusiones para llegar a acuerdos en el equipo, dado que con mayor número de estudiantes el tiempo se extiende y las vías propuestas de solución se exploran superficialmente. Por otro lado, cuando son sólo 2 estudiantes a menudo prevalecen las ideas del integrante que tiene el reconocimiento de mejor desempeño en la clase de matemáticas. En este tipo de ambientes de aprendizaje

destacan estudiantes que en las clases tradicionales expositivas no son reconocidos.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se lee en voz alta la situación descrita al inicio de la actividad. Posteriormente el profesor debe realizar algunas preguntas a los estudiantes para saber si han comprendido la situación. ¿Quién es Renata?, ¿cómo es posible modificar fotografías?, ¿qué

problema tiene Renata?, ¿quién es Luis?, ¿para qué necesita Renata nuestra ayuda?

Una vez que el profesor se asegura que han comprendido la situación les proporciona los conjuntos de fotografías que aparecen en el Anexo de este libro y les pide que observen las fotografías y que las comparen con la fotografía original. Posteriormente, deben elegir en su equipo aquellas que creen que son ampliaciones verdaderas.



Recursos y/o herramientas

- Conjuntos de fotografías modificadas en tamaño: algunas en ancho, otras en la altura y otras más de manera proporcional (Anexo, p. 90-96).
- Tijeras, juego de geometría, etc.

Archivo para descargar en:

https://face.ujed.mx/?page_id=1681



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

En esta parte, el profesor pide a los equipos que compartan su selección de las fotografías que consideran son ampliaciones verdaderas y expliquen por qué creen que son las correctas. Con base en las explicaciones de los estudiantes se propicia una discusión con los alumnos para llegar a acuerdos. En esta parte, los estudiantes dejan ver sus conocimientos acerca de la proporcionalidad asociada con que las formas son invariantes. Algunos ejemplos de posibles métodos y respuestas propuestos por estudiantes para este ambiente de aprendizaje se pueden ver en el Capítulo 4. Éstos apoyaran al profesor para que anticipe posibles respuestas.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Los estudiantes deben redactar y escribir una carta en la que expliquen a Renata todas las ideas o métodos que se les ocurran para enseñarle a identificar las fotografías que realmente sean ampliaciones de la fotografía original.

Capítulo 3

El Cálculo Mental

El cálculo mental, entendido como una serie de procedimientos mentales que realiza un individuo sin la ayuda de lápiz y papel para obtener una respuesta exacta a problemas que involucran operaciones aritméticas. Es un importante componente en la formación básica de los estudiantes desde preescolar hasta secundaria, particularmente en el currículo de educación secundaria, son necesarias

experiencias relacionadas con el cálculo numérico. No únicamente por su utilidad en la vida diaria y por ser uno de los procedimientos matemáticos que mayor demanda un individuo durante su vida. También, se tienen una serie de ventajas tales como las que aparecen en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. *Ventajas de incorporar en el aula actividades para el cálculo mental.*

EL CÁLCULO MENTAL CONTRIBUYE A:	
1.	La mejora de la concepción de número, al permitir el surgimiento de procesos cognitivos que en el cálculo escrito mecanicista no son revelados.
2.	Enriquecer y flexibilizar la experiencia numérica y algorítmica.
3.	Reforzar hechos básicos y propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, uso de neutros e inversos).
4.	Agilizar el pensamiento cuantitativo y ayuda a construir significado de los números grandes.
5.	Desarrollar capacidades cognitivas al ser motivador y fomentar el interés y la concentración ayudando a pensar y a resolver problemas o situaciones.
6.	Estimular el análisis de situaciones al animar a investigar, a prestar atención a los pasos en el proceso, establecer prioridades, profundizar en las situaciones.
7.	Apoyar la transición entre la aritmética y el álgebra.
8.	Controlar cálculos electrónicos y a detección de errores en el cálculo escrito.
9.	Encontrar diferentes formas de resolución, dado que el cálculo mental es variable a diferencia de los algoritmos que son fijos.
10.	La flexibilidad de pensamiento, dado que una misma persona puede usar diferentes estrategias para resolver problemas.
11.	La construcción, dado que un resultado se construye mediante resultados parciales.
12.	Recurrir al conocimiento informal de los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia con información basada en Segovia y Rico (2016); Mochón y Vázquez (1995).

Por su parte, Lemonidis (2016) hace una revisión de la literatura para resumir y extender las razones por las cuales el cálculo mental es importante y debe enseñarse. Mencionando las principales como sigue:

A. *Utilidad y aplicación en la práctica.* Se usan mucho en la vida cotidiana e incluso más que el cálculo escrito.

B. *Su contribución a otros conceptos matemáticos.* La práctica con cálculo mental crea una mejor comprensión y más profunda del sentido numérico. Ayuda a la comprensión y el desarrollo de los métodos de cálculo escrito. Constituye la base sobre la cual se desarrollan las capacidades para realizar estimaciones. Este trabajo mental desarrolla habilidades para resolver problemas.

C. *Su contribución a las habilidades cognitivas.* El cálculo mental contribuye a la práctica en habilidades de representación y al uso de conceptos abstractos en la memoria a corto plazo, así como al manejo de diferentes estrategias. Finalmente, la capacidad metacognitiva del alumno se ejerce en la presentación de sus métodos de cálculo.

Entre las estrategias básicas la más utilizada para el cálculo mental es la de descomponer los números y operar con las partes. La descomposición más recurrente es la de centenas, decenas y unidades.

Aunque el cálculo mental ofrece múltiples ventajas para la resolución de problemas matemáticos en la vida real, en la educación secundaria se ha privilegiado el uso de lápiz y papel para la resolución de problemas. Algunas buenas razones para impulsar una instrucción más activa del cálculo mental, además de las ventajas antes expuestas, son los

resultados de Mochón y Vázquez (1995) en un estudio conducido sobre el tema:

1) Cuando los estudiantes contestaron con lápiz y papel cometieron mayor número de errores que cuando procedieron con estrategias de cálculo mental.

2) Un contexto real ayuda a los estudiantes a utilizar estrategias de cálculo mental. Esto sugiere presentar este tema dentro de situaciones cotidianas como cálculos monetarios, etc.

3) El cálculo mental promueve el surgimiento de estrategias propias de los estudiantes, apoyando el trabajo grupal con la finalidad de que ellos mismos observen los diferentes procedimientos de sus compañeros y poco a poco los puedan interiorizar.

El hallazgo 2) influyó de alguna manera para diseñar y proponer en este libro el ambiente de aprendizaje *Estimación de lo cotidiano* (ver sección 2.6), el cual involucra tanto estimación como cálculo mental demandando mayores habilidades. Mientras que el punto 3) ayudó a que se incluyera un ambiente de aprendizaje para conteo coral (*Operaciones en coro para generar secuencias numéricas*, ver sección 3.4).

El cálculo mental demanda procesos mentales y visuales, por ello, el dominó, las regletas de Cuisenaire, los juegos de cartas y las torres de Hanói han sido herramientas importantes para el diseño de varios de los ambientes de aprendizaje propuestos para el desarrollo de habilidades en los estudiantes para el cálculo mental. En la Tabla 3.2 se muestra la lista de los ambientes de aprendizaje que aparecen en este capítulo.

Tabla 3.2. *Ambientes de aprendizaje de este capítulo para incorporar el cálculo mental.*

Ambientes de aprendizaje para favorecer el cálculo mental
Sección 3.1 Los puntos del dominó: estrategias para sumar
Sección 3.2 Las fichas de dominó: suma de fracciones
Sección 3.3 Las regletas de Cuisenaire: descomposición de un número en sumas
Sección 3.4 Operaciones en coro para generar secuencias numéricas
Sección 3.5 La baraja aritmética: combinaciones ganadoras de números y operaciones
Sección 3.6 El juego de los discos
Sección 3.7 Cadena de sumas

3.1 Los Puntos de Dominó: Estrategias para Sumar

¿Cuánto suman los puntos del dominó? Esta es la pregunta guía del ambiente de aprendizaje. Para dar respuesta, considera que el resultado de sumar los puntos de las fichas de la Figura 1 es 18. Asume el reto y suma TODAS las fichas de dominó doble 6. Para representar las fichas de la Figura 1, lo pueden hacer como pares [5,4], [6,3] o en cualquier otra forma que propongan.

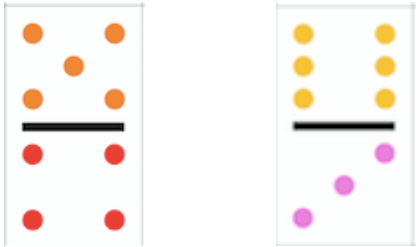


Figura 1. Fichas de dominó [5,4] y [6,3].



Recursos y/o herramientas

- Dominós de colores doble 6 preferentemente de plástico, como alternativa recortar uno en papel (Anexo, p. 76-84). También se puede descargar para imprimir en:

https://face.ujed.mx/?page_id=1681

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es con equipos de 3 estudiantes, esto permite favorecer las discusiones para llegar a acuerdos en el equipo, dado que con mayor número de estudiantes el tiempo se extiende y las vías propuestas de solución se exploran superficialmente. Por otro lado, cuando son sólo 2 estudiantes a menudo prevalecen las ideas del integrante que tiene el reconocimiento de mejor desempeño en la clase de matemáticas. En este tipo de ambientes de aprendizaje destacan estudiantes que en las clases tradicionales expositivas no son reconocidos.

Estructura de la Actividad



Parte I. Realiza y construye conocimiento

En esta parte se busca responder a las preguntas ¿cuántos puntos suman las fichas de dominó doble 6?



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Cada equipo comparte su resultado de la suma de puntos del dominó, explica cómo lo consiguió y en grupo se revisan las ideas.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Se pide a los estudiantes que redacten una carta en donde expliquen la estrategia que siguieron para sumar los puntos del dominó doble 6. Su carta será intercambiada con otro equipo que tratará de seguir y entender su estrategia, al igual que ellos interpretarán la carta recibida.

3.2 Las Fichas de Dominó: Suma de Fracciones

¿Cuánto suman las fichas de dominó doble seis al considerarlas fracciones propias o entero? en este ambiente de aprendizaje se dará respuesta a esta pregunta. Al sumar las fichas que representan a $\frac{4}{5}$ y $\frac{6}{6}$ el resultado es $1\frac{4}{5}$. Asume el reto y suma TODAS las fracciones propias y las que representan un entero en las fichas de dominó doble seis.

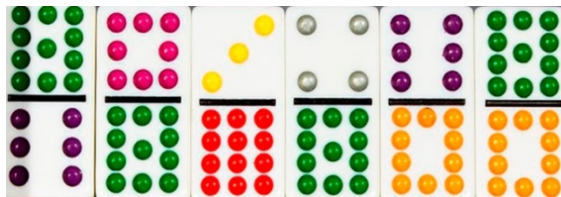
Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para este ambiente es con equipos de 3 estudiantes para facilitar las discusiones en el equipo.

Recursos y/o herramientas

- Dominós de colores y plástico doble 6. Como alternativa recortar (Anexo, p. 76-84) o imprimir el que aparece en:

https://face.ujed.mx/?page_id=1681



Estructura de la Actividad



Parte I. Realiza y construye conocimiento

¿Cuáles fichas sumadas nos dan como resultado 1? Se les pide a los estudiantes que escriban algunos ejemplos. También, se les pide que calculen y registren la suma de todas las fracciones propias y las que representan un entero y que expliquen cómo lo hicieron.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Cada equipo comparte su resultado de la suma de fracciones propias y enteros, ambos representados por las fichas de dominó de seis. Explican cómo lo consiguieron y en grupo se revisan las ideas.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Tomando en cuenta las explicaciones de sus compañeros y la forma en que en su equipo sumaron las fracciones, escribe en una hoja un método para realizar la suma lo más rápido posible.

3.3 Las Regletas de Cuisenaire:

Descomposición de un Número en Sumas

En este ambiente de aprendizaje se trata de responder las preguntas: ¿de cuántas formas se puede descomponer un número natural en sumandos diferentes? ¿qué es una partición de un número natural?

Un número entero positivo siempre se puede expresar como suma de otros. En particular, son interesantes las descomposiciones en sumandos diferentes, por ejemplo: $17=14+3$; $17=13+3+1$...

Se toma en cuenta que: Dos sumas son iguales si tienen los mismos sumandos aunque cambien de lugar.



Recursos y/o herramientas

- Regletas de Cuisenaire

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es con equipos de 3 estudiantes para favorecer las discusiones productivas. Así pueden explorarse completamente las vías propuestas, cuando son más estudiantes, en la mayoría de los casos, se resta profundidad a las discusiones o quedan vías sin explorar.

Estructura de la Actividad



Parte I. Realiza y construye conocimiento.

En esta parte se hacen preguntas a los estudiantes: ¿Cuántas formas de expresar el 7 como suma de otros números diferentes puedes encontrar? ¿Y el 8? Registra tus resultados.

¿Cuántas formas de expresar el 17 como suma de sumandos distintos crees que existen aproximadamente?

a) Entre 10 y 20 b) Entre 20 y 30 c) Entre 30 y 40

Se pide a los estudiantes que utilicen las regletas de Cuisenaire para encontrar todas las maneras distintas, que les sean posibles para descomponer el 17 como suma de números distintos. Enseguida se solicita a los alumnos que registren las sumas que descomponen al 17 y que busquen la forma de organizar las diferentes opciones para no perder de vista ninguna posibilidad.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Cada equipo muestra las diferentes sumas y explica qué método utilizó para no dejar opciones fuera



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Los estudiantes han encontrado diferentes particiones del 17. Con base en el trabajo realizado, se les pide a los estudiantes que con sus propias palabras expliquen ¿qué es una partición? y también, que escriban una carta donde expliquen la mejor forma de encontrar y registrar las diferentes sumas que expresan un número natural.

3.4 Operaciones en Coro para Generar Secuencias Numéricas

Para el diseño de esta actividad se tomaron en cuenta experiencias vividas en cursos a docentes con la Dra. Susan Empson¹.

En el proceso de operación o conteo coral, el maestro dirige la clase con un proceso de realizar una operación repetida de manera verbal para generar una lista de resultados al decidir con qué patrón operar, en qué dirección, dónde empezar y terminar. A medida que los estudiantes participan en el conteo, observan los patrones presentes. Esta actividad genera sentido numérico, conocimiento del valor posicional, refuerza el vocabulario (pares, impares, múltiplos) y apoya una variedad de habilidades para el cálculo mental en todas las operaciones.

Organización del grupo y preparación

Esta actividad es para todo el grupo, es propicia para centrar la atención de todos los estudiantes, así, es conveniente realizarla a menudo y cuando los estudiantes están inquietos, por ejemplo, regresando de un receso. Deben mantenerse atentos para anticipar y decir en voz alta el número siguiente en una secuencia propuesta por el profesor.

Forma de iniciar una operación en coro

- Recuerde a los estudiantes que el conteo no es una competencia. Todos deben tratar de avanzar al mismo ritmo.
- Introduzca el conteo: "Hoy vamos a contar (sumar, restar, multiplicar, dividir) de _____ a partir de _____".

¹ Empson, S. (2012). *Math Methods, Course EDC 370E*. University of Texas at Austin.

- Proporcione tiempo a los estudiantes para que piensen individualmente cuáles serán los primeros 3 o 4 números.
- Enseñe a los estudiantes a esperar hasta que usted haya terminado de escribir en el pizarrón el número antes de que ellos mencionen el siguiente.
- Use la hoja del protocolo de planificación para organizar la actividad.
- Practique siempre un conteo antes de hacerlo con una clase.
- Escriba en el pizarrón los números resultado de la secuencia y dictados en voz alta por todo el grupo, si se equivocan inicie de nuevo en otro renglón. Así se verá cómo va incrementando la concentración en el cálculo mental grupal.

Algunas sugerencias de operación coral

Sumar 15 iniciando con 15 hasta ...	Sumar 11, a partir de 3
Resta 3 iniciando en 260 hasta ...	Multiplicar por 2 empezando en 5
Sumar $\frac{1}{2}$ desde $\frac{1}{2}$ hasta ..	Multiplicar por $\frac{1}{2}$ empezando en 1
Sumar 0.004 iniciando en 43.130	Multiplicar por 5 desde 3
Resta 10 empezando en 213 y hasta ...	Multiplicar por 11 desde 1
Sumar 75 desde 0	Multiplicar por 7 desde 5
Sumar 7, empezando en 31	Dividir entre 2 iniciando en 2080
Sumar .99 empezando en 1	Dividir entre 5 empezando en 10,000
Sumar 11, desde 0	Dividir entre 3 desde 2997
Sumar 5, desde 45	Dividir entre $\frac{1}{3}$ desde 2
Dividir entre 0.1 desde 3	Dividir entre 0.5 desde 7

Formas de terminar un proceso de operación coral

1. Vamos a terminar nuestro conteo aquí. Hoy encontramos _____ patrones.
2. Observe las reglas, conjeturas o generalizaciones que se generaron cada vez que sumamos de 11 en 11, comenzando en 0, sucede _____.
3. Este patrón se repetirá cuando alcancemos _____. Esa es una idea para pensar hoy.

4. ¿Cómo podría este conteo ayudar cuando se está multiplicando por _____?

5. Tratemos de pensar por qué este patrón funciona _____.

6. Conexión con el trabajo o lección próxima: veamos si nuestro trabajo con la división nos ayudará a determinar si $84 \div 4$ es 21 o 25

Para la tarea, pueden ver si puede continuar _____.

3.5 La Baraja Aritmética: Combinaciones Ganadoras de Números y Operaciones

¿Cuál es el orden a seguir para realizar más de una operación aritmética? Esta pregunta quita este ambiente de aprendizaje.

Esta baraja es muy singular. En el lado frontal las cartas tienen impreso un número en nuestro sistema de numeración y su correspondiente en sistema de numeración maya. Al reverso, encontrarás impreso el mismo número en nuestro sistema decimal y su correspondiente en lengua de los tepehuanos o los O'dam —los que habitan—, como ellos se hacen llamar. Este grupo habita principalmente en el extremo sur del estado de Durango, México. Se asienta mayor población en los municipios del Mezquital y Pueblo Nuevo. Se pueden encontrar similitudes en el sistema maya y el sistema de los tepehuanos. Volviendo a nuestra baraja, no tenemos comodines y podemos jugar en dos niveles: básico y avanzado.



Recursos y/o herramientas

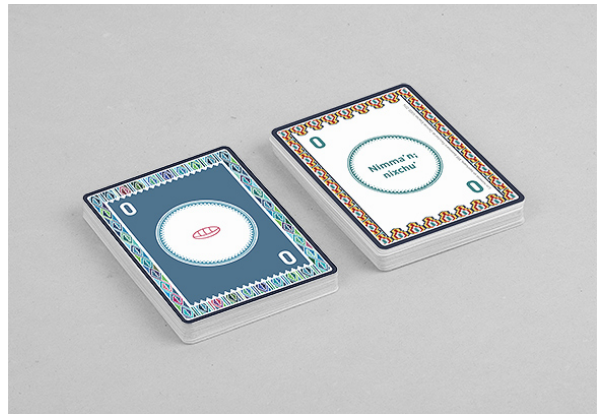
- Baraja Maya-Tepehuana (se puede descargar para imprimir en:

https://face.ujed.mx/?page_id=1681

Otra alternativa es la baraja maya con cartas del 0 al 17 que aparece para recortar en el Anexo, p. 64-74).

Para el nivel básico necesitamos, 3 cartas para cada uno de los números del 0 al 10; 2 cartas para los números del 11 al 17; y una carta para los números del 18 al 25.

Para el nivel avanzado se necesitan, 3 cartas para cada uno de los números del 0 al 10; 2 cartas para los números del 11 al 20 y una carta para los números del 21 al 29.



Estructura de la Actividad



Parte I. Juega y construye conocimiento.

Las reglas del juego

Se organizan equipos de 3 a 5 jugadores. Se mezclan las cartas una y otra vez, se reparten 5 cartas a cada jugador y se coloca la pila de cartas sobrantes al centro. Inicia el jugador que se encuentra a la derecha de quien repartió las cartas. El jugador en turno saca una carta de la pila del centro. Todos los jugadores deberán buscar combinaciones de los números de todas sus cartas utilizando las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

Por ejemplo, si la carta que se extrajo de la pila es un 6 y un jugador tiene como cartas 3, 5, 2, 3 y 6 puede mostrar la siguiente combinación ganadora de entre muchas que existen.

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} & = & 8 \\
 8 \div \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} & = & 4 \\
 4 \times \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} & = & 12 \\
 12 \div \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} & = & 2
 \end{array}$$

Si en la mano de cartas que tiene un jugador, no encuentra una combinación ganadora, pero visualiza la combinación en las cartas de uno de sus oponentes antes que él, puede expresar la combinación y ganar esa partida.

Cada partida ganada se acumula un punto. Gana el juego quien acumula mayor número de puntos.

¡A jugar!



***Un alto para la discusión,
revisión y extensión de
todas las ideas en grupo***

Calcular en grupo las siguientes operaciones

- | | |
|-------------------|---------------------|
| a) $3+5/2*3-6=$ | b) $[(3+5)/2]*3-6=$ |
| c) $(3+5)/2*3-6=$ | d) $(3+5/2)*3-6=$ |
| e) $(3+5/2*3)-6=$ | f) $(3+5)/2*(3-6)=$ |

¿Cómo podemos expresar combinaciones ganadoras de manera precisa en el lenguaje matemático?

¿Cómo y cuándo utilizar el paréntesis? Expliquen

¿En qué orden se realizan las operaciones básicas +, -, * y /?

¡A jugar con el grupo completo!

Cada equipo mantiene su baraja y reparte. Todos atienden al profesor que sacará la carta con el resultado que deben obtener. Las combinaciones ganadoras se contabilizan por equipo.



Parte III. Evaluación formativa
¡Informen sus resultados!

1. En los espacios vacíos coloca los signos de las operaciones que consideres necesarios: (,), +, *, ÷, -, etc., para conseguir el resultado que aparece después del signo “=”.

Por ejemplo: $4*(4-4\div 4)=12$

4	4	4	4	=	0
4	4	4	4	=	1
4	4	4	4	=	2
4	4	4	4	=	3
4	4	4	4	=	4
4	4	4	4	=	5
4	4	4	4	=	6
4	4	4	4	=	7
4	4	4	4	=	8
4	4	4	4	=	9
4	4	4	4	=	10

3.6 El juego de los Discos

¿Cuál es el número menor de movimientos que debo hacer para mover la torre? es la pregunta de interés en este ambiente. Se pretende que el estudiante desarrolle su habilidad para estimar a partir de la identificación y análisis de patrones de comportamiento apoyados del uso de material didáctico.



Recursos y/o herramientas

- Torres de Hanói un juego para cada equipo.

Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para este ambiente de aprendizaje es con equipos de 3 estudiantes, esto favorece las discusiones para llegar a acuerdos, dado que con mayor número de estudiantes el tiempo se extiende y las vías propuestas de solución se exploran superficialmente. Por otro lado, cuando son sólo 2 estudiantes a menudo prevalecen las ideas del integrante que tiene el reconocimiento de mejor desempeño en la clase de matemáticas. En este tipo de ambientes de aprendizaje destacan estudiantes que en las clases tradicionales expositivas no son reconocidos. A cada equipo se le proporciona una torre de Hanói y las siguientes indicaciones:

Se tienen tres columnas numeradas como 1, 2 y 3 y un número determinado de discos de distintos tamaños. Los discos están acomodados en la columna 1 de mayor a menor, de acuerdo con la medida de su diámetro, y de abajo hacia arriba.

Los discos se van a mover bajo las siguientes reglas:

- Sólo se puede mover un disco cada vez. Para cambiar los discos de lugar se pueden usar las tres columnas, es decir, que los distintos discos se pueden ir acomodando en las columnas según convenga.
- Un disco grande NO puede estar sobre un disco más pequeño.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

En esta parte se les pregunta a los estudiantes ¿cuántos movimientos creen que sean necesarios para mover todos los discos de la columna 1 a la 3 siguiendo las reglas y cuidando que queden acomodados de la misma manera? Enseguida se invita a los alumnos a que **¡acepten el reto!** y muevan todos los discos de la columna 1 a la 3 siguiendo las reglas. Se pueden realizar las preguntas:

- ¿Cuántos movimientos realizaron?
- Si sólo se tuviera un disco, ¿cuántos movimientos se necesitarían?
- Si se dispone de dos discos, ¿cuántos movimientos son necesarios?
- ¿Si se tienen tres discos?, ¿y 4?

Luego se pide que registren la información en la siguiente tabla:

Número de discos	Número de movimientos
1	
2	
3	
4	

Con base en la tabla obtenida en el paso anterior y realizando estimaciones, se solicita a los estudiantes que contesten:

- ¿Cuántos movimientos se deberán hacer si se tuvieran 6 discos?
- ¿Cuántos movimientos deben hacerse si hay 8 discos?
- ¿Cuántos movimientos se necesitan si hay 10 discos?
- ¿Cuántos movimientos para 15 discos?
- Para mover 20 discos, ¿cuántos pasos se requieren?



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Para la discusión, los estudiantes con base en sus estimaciones y en la información de la tabla, de manera grupal analizan las siguientes preguntas:

- ¿Habrá un número mínimo de movimientos para pasar los discos en la manera pedida? ¿Por qué?
- ¿Hay alguna forma de proceder o “algoritmo” para pasar los discos de la columna 1 a la columna 3?

- ¿Creen que existe alguna relación entre el número de discos y el número de movimientos que se deben de realizar? Si es así traten de escribir dicha relación, en caso contrario traten de justificar por qué no existe.
- ¿De qué manera crece el número de movimientos respecto al número de discos involucrados?



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Para la evaluación se les pide que atiendan la siguiente situación:

Luis es un joven interesado en las torres de Hanói. Escriban una carta a Luis donde le describan el algoritmo o procedimiento encontrado para mover los discos de la columna 1 a la 3. Además, en su carta expliquen a Luis la estrategia que desarrollaron para estimar y encontrar el mínimo número de movimientos necesarios para pasar una cantidad n de discos.

Extensión de la actividad:

Para aplicar el conocimiento recién construido se les pide que respondan a lo siguiente: si cada movimiento se hace en un segundo, ¿cuánto tiempo tardaríamos en mover 10 discos de la columna 1 a la 3, con base en las reglas establecidas? ¿Y 20 discos? ¿Y 40 discos?

También, se les solicita a los estudiantes que describan algunas situaciones o fenómenos donde se presenten crecimientos similares al trabajado.

3.7 Cadena de Sumas

Para este ambiente de aprendizaje la pregunta guía es: ¿cuál es la suma que sigue? La actividad se centra en la suma de números enteros en el nivel secundaria. El objetivo es que los estudiantes desarrollen habilidades y estrategias para efectuar la suma correctamente lo más rápido posible.



Organización del grupo y preparación

La configuración apropiada para la actividad es en equipos de 3 estudiantes.

Estructura de la Actividad



Parte I. Interactúa y construye conocimiento

Se entrega a cada equipo un juego de cartas (Anexo, pp. 86-88). Un integrante del equipo “el repartidor” debe barajar las cartas y después entregar, de manera aleatoria, 5 cartas a cada integrante dejando una boca abajo sobre la mesa. Para comenzar el juego, “el repartidor” debe voltear la carta que está sobre la mesa y enseguida el estudiante que se encuentra a su derecha deberá tirar una de sus cinco cartas (la que desee de manera estratégica) y decir en voz alta el resultado de sumar la carta que estaba en la mesa y la carta que él tira.

Luego, el estudiante que esté a la derecha deberá tirar otra carta (de sus cinco) y decir en voz alta el resultado de sumar su carta a la cantidad que dijo el integrante anterior, es decir, debe contemplar la suma acumulada y agregar el valor de su carta. Esta acción se continúa hasta que algún integrante diga un resultado incorrecto, o bien, tarde más de 3 segundos en contestar. Cuando esto suceda, el participante deberá tomar todas las cartas que están sobre la mesa, dejando únicamente la última que fue tirada y se continúa con el juego. Cada vez que se detiene el juego, los participantes tienen la opción de cambiar algunas de sus cartas con las cartas sobrantes. Gana el primer participante que logre quedarse sin cartas.



Parte II. Discusión, revisión y extensión de todas las ideas

Al término de la primera ronda, se plantean a los estudiantes las siguientes preguntas:

- ¿Qué números fueron fáciles de sumar?
- ¿Qué estrategia seguiste para realizar las sumas de números más grandes?
- Si tuvieras la oportunidad de elegir una carta que te ayude en el juego, ¿cuál de ellas escogerías?

Se pide a los estudiantes realizar dos rondas más y al finalizar, por equipo, deben llenar correctamente la siguiente tabla.

Números que escogerían si tuvieran la oportunidad de elegir	Números que consideran que fueron más fáciles de sumar	Números que consideran que fueron más difíciles de sumar

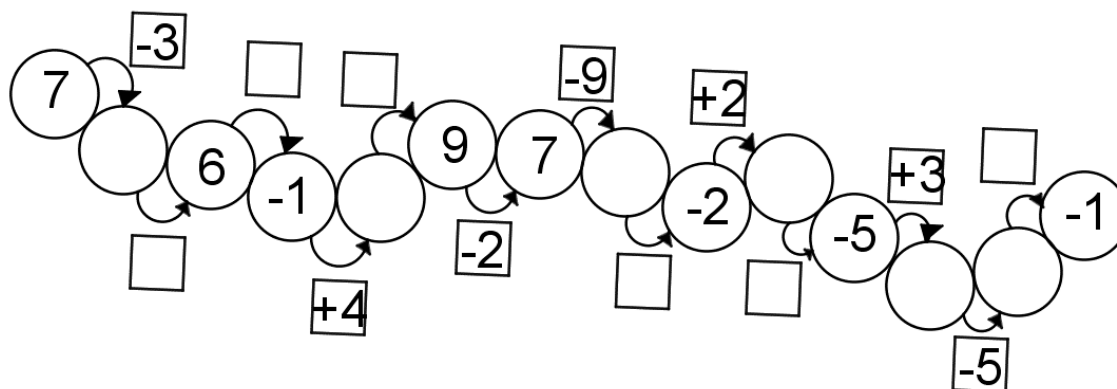
En una discusión grupal, los alumnos deberán compartir sus respuestas y el profesor debe guiarlos mediante preguntas para que identifiquen el papel que juegan los números con terminación 0 o 5 en la suma, los números pares, el cero como neutro aditivo y la unidad.



Parte III. Evaluación formativa ¡Informen sus resultados!

Para extender la actividad, se les propone a los estudiantes una cadena de sumas como la que se muestra en la Figura 1, y se les pide la completen escribiendo los números faltantes.

Figura 1. Cadena de sumas.



Capítulo 4

Planear y Orquestrar una Clase

Las actividades antes sugeridas son de múltiples respuestas, es decir, es posible seguir diferentes vías para resolverlas, los métodos y estrategias utilizadas varían dependiendo del contexto y de qué tanto se desea profundizar. Debido a su naturaleza, usualmente la revisión de las diferentes repuestas da pie a discusiones productivas en el aula.

Tales discusiones pueden ser una oportunidad para la comprensión conceptual compartida, para comprender y diversificar procedimientos y estrategias, para organizar y comunicar el conocimiento generado.

Con la finalidad de encauzar de la mejor manera posible las discusiones en el grupo, de tal manera que sean provechosas para construir conocimiento compartido, se pueden considerar los momentos sugeridos en la *Tabla 4.1*.

Estos momentos clave que apoyan la construcción de discursos académicamente productivos suceden desde la planeación hasta el desarrollo de la actividad en el aula. En este sentido, la planeación juega un papel central y para garantizar un punto satisfactorio de funcionamiento de las actividades, se aconseja utilizar un protocolo de planeación como los que se muestran en las Tablas 4.2 y 4.3 como ejemplo.

Tabla 4.1. Momentos clave para orquestrar una discusión académicamente productiva.

Anticipar las respuestas de los estudiantes durante la planeación, *monitorear* constantemente el trabajo del grupo durante la implementación para identificar las ideas matemáticas que surgen, *seleccionar* algunas de ellas como respuestas que representen al grupo (algunos equipos producen respuestas similares), *secuenciar* las respuestas desde las más simples hasta las más sofisticadas para garantizar que todas las respuestas sean discutidas y comprendidas, y finalmente, *establecer conexiones* entre las soluciones propuestas durante una socialización con todo el grupo para tomar acuerdos y reorientar de manera individual y grupal.

Fuente: Basada en información de Stein et al., (2008).



Tabla 4.2. *Protocolo para planificar la actividad Estimación de piezas para el teselado.*
(Ver sección 2.3).

Paso 1: Configurar las expectativas sociales.

Cómo lograr que se mantenga un ritmo de avance y que todos se involucren. Qué materiales utilizar. Cómo lograr favorecer el trabajo colaborativo: escuchar, explicar, argumentar, aportar, etc. Pensar en la organización de los equipos, ¿qué más? ...

Paso 2: Anticipe las respuestas de sus estudiantes a la situación planteada.

- Considerar las diferentes maneras en las que los estudiantes se pueden aproximar a la estimación del número de piezas para el teselado.
- En caso de que esté considerando extender la tarea para que los estudiantes prueben los modelos de respuesta generados y verifiquen “que tan buena” fue su respuesta. Piense en los materiales que debe pedir a los estudiantes para que puedan replicar la pieza y construir su teselado ese mismo día o preferentemente al día siguiente.
- Visualice los contenidos y procesos matemáticos relevantes que pueden surgir: medición, área, triángulo rectángulo, partes complementarias, círculo, semicírculo, otras formas, etc.

Como tarea previa, un día antes de la actividad se les puede pedir a los estudiantes que vean un documental para familiarizarse con el tema de los teselados: Metamorphose MC Escher

<https://www.youtube.com/watch?v=tjboEi8p4o4>

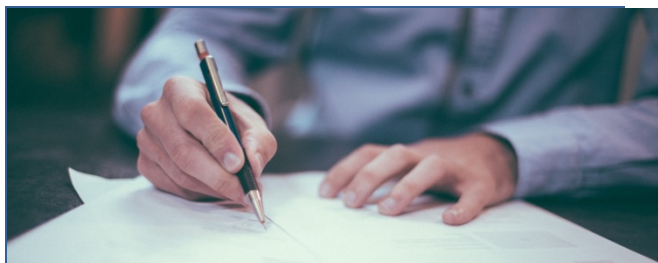
Paso 3: Presente la tarea de Estimación de piezas para el teselado.

- Deje tiempo para que lean la actividad y discutan en el equipo de qué trata.
- Realice preguntas de comprensión lectora para saber si han comprendido la tarea: ¿qué es Metamorfosis? ¿qué problema tienen? ¿qué necesitan de nosotros? etc.
- De ser necesario pida, que además de la lectura individual, se dé una lectura grupal de la situación presentada en la actividad.
- En caso de presentarse la duda acerca de qué es un teselado y si algunos estudiantes no realizaron la tarea previa (paso 1, último punto) se pueden mostrar teselados de Escher, o de adoquinados y mosaicos en pisos, cuadrícula, el llenado del plano con triángulos, hexágonos, etc.



Paso 4: Aproximación a la resolución de la situación problema.

- Permita que los alumnos en sus equipos piensen en la situación planteada.
- Inicie un monitoreo para saber qué ideas se discuten en los equipos y vea los modelos de solución que surgen y la manera en qué se van modificando.
- Es importante tomar nota para ir pensando en cómo discutir y conectar las diferentes soluciones. Para ello, es necesario identificar en qué se parecen y en qué son diferentes



Paso 5: Después de los primeros 20 minutos, asegurarse de que documenten sus respuestas.

- Este tipo de actividades no son de respuesta corta y además demandan explicación. Tienen gran potencial en la evaluación formativa, dado que es posible documentar el pensamiento de los estudiantes. En la clase de matemáticas la escritura y redacción apropiadas están actualmente descuidadas. Por esta razón, debe asegurarse que escriban la carta donde sugieran el número apropiado de piezas para el teselado y el por qué es un número conveniente para evitar desperdicio de material.

Paso 6. Secuenciación de producciones.

Durante el monitoreo ya ha visto las cartas o producciones de los estudiantes y puede secuenciarlas de menor a mayor complejidad. Esto permite que en la discusión grupal pueda llamarlos en ese orden a compartir sus producciones.

Paso 7: Presentación grupal y discusión de producciones.

Aquí necesita tener un espacio para que los equipos presenten su producción y demandarles explicaciones y justificaciones, además de tomar en cuenta la opinión de todo el grupo. Recuerde dar confianza a los estudiantes y tratar de enfatizar las partes en las cuáles presentan ideas valiosas aun cuando no están todavía bien estructuradas (este es un proceso que les lleva tiempo y los ritmos son diferentes).

Paso 8: Discusión de los patrones generados.

- En esta parte es importante realizar conexiones entre las respuestas de los estudiantes. Así algunas se pueden identificar con un patrón de respuesta específico que tal vez usted anticipó en el paso 2.
- Pregunte: ¿qué patrones notan? ¿cuáles producciones se parecen? y ¿en qué? ¿qué les llama la atención de las diferentes respuestas? ¿qué tan buenas son?
- O tal vez quiera centrarse en una idea matemática particular que desee impulsar, como: «¿Quién puede discutir acerca de algunas mejoras que podamos recomendar al equipo ...?» «¿Quién puede mostrarnos alguna fortaleza de una de las producciones?» «Ya que escuchamos todas las respuestas ¿harían alguna modificación a su producción?, ¿cuál?»

Paso 9: Cierre de la tarea.

- Presente a manera de cierre todas las “buenas ideas” que han tenido e intente conectar y formalizar con otros contenidos vistos anteriormente.
- Registre y utilice las ideas generadas para iniciar otros temas futuros.
- Pida material en caso de extender la tarea, como se sugiere en el paso 2, para que los estudiantes pongan a prueba los modelos generados.

Una vez que se tiene el protocolo de planeación, interesa saber cómo seleccionar las producciones durante el monitoreo del trabajo en equipos y cómo secuenciarlas para facilitar el poder establecer conexiones durante la parte II que aparece en todos los ambientes propuestos en los Capítulos 2 y 3 y plantea una discusión, revisión y extensión de todas las ideas en grupo.



Un ejemplo de ello, lo haremos a partir del ambiente de aprendizaje *Diseño digital: trabajo con fotografías*, mismo que aparece en la sección 2.9. En tal ejemplo, intentaremos dar respuesta a la pregunta: ¿cómo podemos secuenciar los métodos encontrados por los estudiantes para identificar las ampliaciones verdaderas de la fotografía original?

En este ambiente de aprendizaje, los estudiantes organizados en equipos de tres, llegan a un método que les permite identificar de un conjunto de fotografías ‘modificadas’, cuáles son ampliaciones verdaderas de una foto original que se les presenta. A continuación, se exponen algunos métodos sugeridos por un grupo de estudiantes de edad promedio 11 años. Estos métodos pueden apoyar a que los profesores, que deseen implementar este ambiente de aprendizaje en sus grupos, anticipen las posibles soluciones que pueden surgir. La tarea como profesores es:

- a) Sugerir una forma de organizar y secuenciar las producciones, de tal manera que permita establecer conexiones entre ellas para socializarlas con el grupo completo.
- b) Elegir un método y sugerir cómo extender el conocimiento para vincularlo con un contenido matemático específico. Los métodos propuestos por estudiantes se enumeran enseguida.

Método 1:

Utilización de las imágenes seleccionadas como ampliaciones ‘verdaderas’ probables para su acomodo: elegir la más grande primero; luego colocar la siguiente en tamaño de modo que las esquinas inferiores izquierdas queden alineadas; continuar haciendo esto hasta que todas las ampliaciones queden superpuestas con la más pequeña al frente. Colocar una regla o bien trazar una recta de modo que pase por las esquinas inferior izquierda y superior derecha de todas las fotografías. Los alumnos de este equipo descartaron aquellas cuya diagonal no coincidía con la regla.

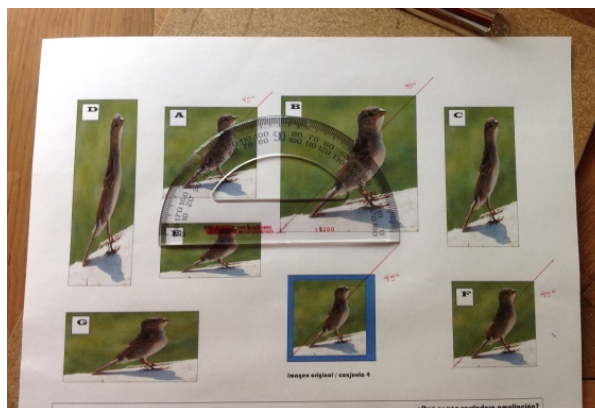


Figura 4.1. Representación del método 1

Método 2:

Medir la altura y el ancho de las imágenes que se cree son ampliaciones verdaderas de la fotografía original (incluir la original) y graficar las medidas de las alturas y las bases. Con esta estrategia consiguen una línea recta al unir los puntos correspondientes a las ampliaciones reales.

Método 3:

Tomar las medidas de las alturas y bases de las fotografías, calcular razones y comparar con respecto de la razón de la foto original.



Figura 4.2. Representación del método 4

Método 4:

Trazar la diagonal principal de la fotografía y medir el ángulo que forma la base con la diagonal. Las fotografías que tengan el mismo ángulo que la foto original serán ampliaciones verdaderas. La propiedad de que los ángulos de las figuras proporcionales permanecen invariantes es una propiedad que vale la pena puntualizar para extender el conocimiento de los estudiantes.

Método 5:

Tomar la fotografía original, si agregas un centímetro de base debes agregar un centímetro de altura, o bien, cualquier cantidad que se amplíe en la base, debes hacerlo en la altura de la foto (el equipo trabajó sólo con el conjunto 4 de fotografías del pajarito, y en este caso la fotografía original es un cuadrado, así que es válido).

Método 6:

Te fijas en alguna figura geométrica como: triángulo, círculo o círculo deformado. En el caso del triángulo te puedes fijar que, en las fotografías, tenga los mismos ángulos que en la original y si es así entonces es ampliación verdadera. En el caso del círculo o círculo deformado, puedes hacer dos dobles por la mitad para encontrar “el centro” en la foto original y en las otras hacer lo mismo y ver que ‘sus diámetros’ crecieron en la misma proporción (al doble, por ejemplo).

Finalmente, en los diferentes ambientes de aprendizaje de este libro se presenta un espacio para actividades de evaluación formativa en las que más que una respuesta numérica se demanda un modelo que responde a una necesidad específica asociada con una situación real y es posible la construcción de más de un modelo. En esta parte, los estudiantes informan o comunican tales formas de pensamiento. Para el profesor es central saber ¿qué piensa el estudiante?, ¿cómo puede apoyarlo para lograr el objetivo de aprendizaje? En este sentido, es importante que siempre que se implemente una actividad se asegure el profesor de que los estudiantes escriban sus métodos, sus estrategias o documenten su pensamiento. Esto no sólo permite al profesor realizar una evaluación formativa a nivel de equipo y a nivel de grupo, también desarrolla progresivamente en el estudiante competencias para escribir y comunicar ideas en la clase de matemáticas, competencias en las que actualmente no se enfatiza.

Capítulo 5

Conclusiones

Para la elaboración de este libro, los autores han tratado de comprender las necesidades del docente, los objetivos y metas del sistema educativo, así como las necesidades de aprendizaje de los estudiantes de educación secundaria. También, han realizado una revisión documental con la finalidad de conocer diferentes resultados derivados de la investigación en educación matemática que prometen cambios profundos en la formación del docente y en la transformación de su práctica y, en consecuencia, en el aprendizaje de los estudiantes. En consonancia con lo anterior, ha sido posible establecer una comunicación cercana con el profesor de educación secundaria para conformar este material a partir de los talleres en los cuales se ha probado el funcionamiento de diferentes ambientes de aprendizaje y han sido seleccionados aquellos que los docentes, de una u otra manera, han reconocido con mayor potencial didáctico.

Un ejemplo de un ambiente de aprendizaje que fue muy bien recibido tanto por estudiantes como por docentes es *Aviones y trayectorias* (sección 2.5). En él, a partir de diseños de aviones de papel se ha generado de manera interactiva conocimiento que sirve para situar la comprensión de los estudiantes de contenidos de matemáticas vinculados con contenidos de ciencia. Esto les permite comprender la relación de nuestro entorno natural con el entorno construido por el hombre, es decir, establecer una conexión entre el conocimiento informal de los estu-

diantes y el conocimiento formal. Se registraron datos y se realizaron observaciones para determinar las características de cada uno de los aviones construidos: trayectoria seguida de acuerdo al lanzamiento; mejor zona de vuelo; y, estimación de la velocidad alcanzada. En los equipos los estudiantes organizan el trabajo, leen e interpretan información, discuten sus ideas, argumentan, llegan a acuerdos y se divierten. Continuamente se hacen preguntas: ¿qué modelos de aviones vamos a hacer?, ¿cómo es el vuelo de los aviones en diferentes condiciones?, ¿por qué los aviones no se comportan igual en todas partes?, ¿qué factores afectan el vuelo del avión?, ¿cómo explico a los demás lo que observé?, ¿qué conocimientos necesito para comunicar a otros el resultado de mi trabajo?, ¿qué conceptos nuevos surgieron de mis observaciones y de las de otros compañeros? Al final, se ha detonado una gran cantidad de conceptos matemáticos y de ciencia relacionados con la situación estudiada.

Algo que ha sido un común denominador en los ambientes de aprendizaje seleccionados es que ningún individuo es excluido en la generación de conocimiento, además todos participan en la evaluación de la actividad y son protagonistas en el aprendizaje dentro de la comunidad que conforman. Todos los estudiantes pueden generar conocimiento en un entorno de colaboración y retroalimentación. También, el potencial que ofrecen para documentar el pensamiento de los estudiantes a través de cartas

redactadas para ayudar a un cliente que necesita resolver una situación (2.3 *Estimación de piezas para un teselado*; 2.5 *Aviones y trayectorias*; 2.7 *Los patrones de crecimiento de la población mundial*; 2.9 *Diseño digital: trabajo con fotografías*; 3.6 *Juego de los discos*, etc.), esto además de ayudar al profesor para la evaluación formativa de los estudiantes, contribuye a desarrollar en los estudiantes competencias para la comunicación escrita, aspecto que ha sido históricamente descuidado en la clase de matemáticas.

Como marcos teóricos para el diseño de los ambientes de aprendizaje aquí propuestos se han tomado en cuenta los principios para el diseño de actividades generativas (Stroup, 2009; Stroup, Ares, & Hurford, 2004) y de modelación (Lesh et al., 2000; Lesh & Doerr, 2003). En el caso de las actividades generativas, los principios se encaminan a crear un espacio para el juego, la diversidad de respuestas y estrategias, incremento de la participación y agencia, identificar la estructura matemática y científica subyacente y generar evidencias para la evaluación formativa de los estudiantes a nivel de grupo y a nivel individual. Ejemplos de ambientes utilizando materiales concretos en los que se tomaron en cuenta tales principios se pueden mencionar, entre otros: *La baraja aritmética: combinaciones ganadoras de números y operaciones* (sección 3.5), *El juego de los discos* (Sección 3.6). Mientras que, en las actividades para producir modelos los principios se enfocan en el significado personal o de la realidad, en la producción de modelos, en la posibilidad de una auto-evaluación, en una documentación y comunicación del modelo y, finalmente en que los modelos generados puedan ser utilizados en otras situaciones.

En este tipo de ambientes usualmente se solicita a los estudiantes que reflejen su pensamiento en una

carta para apoyar a que un “cliente” resuelva una situación dada. Algunos ejemplos de ambientes diseñados con estos principios son: *Estimación de piezas para un teselado* (Sección 2.3); *Aviones y trayectorias* (Sección 2.5); *Diseño digital: trabajo con fotografías* (Sección 2.9).

El profesor que tenga en sus manos este libro puede implementar los ambientes de aprendizaje que considere convenientes, en diferentes momentos y algunos en más de una ocasión con el mismo grupo (por ejemplo, 3.5 *La baraja aritmética: combinaciones ganadoras de números y operaciones*, 2.8 *Números grandes y pequeños*; 3.7 *Cadenas de sumas*; 2.7 *Los patrones de crecimiento de la población mundial*; 3.3 *Las regletas de Cuisenaire: descomposición de un número en sumas*) y la última palabra en cuanto a su pertinencia y funcionamiento la tendrá el docente al hacerse y responder las siguientes preguntas (que los autores tomaron como referencia para su diseño):

- ¿Atiende ejes y temas del Programa de Matemáticas SEP (2018)? ¿Apoya las metas del Modelo Educativo para la Educación Básica SEP (2017) en el campo de formación académica: pensamiento matemático?
- ¿Favorece realmente el trabajo colaborativo y la participación de todos los estudiantes? ¿Considera que los requerimientos conceptuales y procedimientos necesarios para acceder a ellos sean mínimos?
- ¿Sugiere hojas de trabajo en las cuales los estudiantes puedan realizar sus registros, plasmar su pensamiento y tener a la mano la información necesaria para organizar sus explicaciones y justificaciones?

- ¿Incluye preguntas que puedo utilizar para:
 - 1) Guiar a los estudiantes que tienen dificultades con la comprensión del problema;
 - 2) Ayudarlos a comunicar el conocimiento matemático que han construido; y
 - 3) ¿Resumir las ideas matemáticas de conocimiento construido por el grupo, ayuda a los estudiantes en el desarrollo de las habilidades demandadas por exámenes estandarizados (PISA, Planea)?

Finalmente, es importante romper con la tradición escolar que ha puesto énfasis en los algoritmos formales escritos considerando que el desarrollo de la habilidad para su manejo es esencial para la vida adulta y para que los estudiantes tengan el conocimiento acerca del concepto de número. Para ello, se pueden considerar los cambios notables, que recientemente se han dado, para enfatizar la importancia del cálculo mental y la estimación con respecto del cálculo escrito. *Lemonidis (2016)* menciona algunas razones para adoptar estos cambios:

- Los resultados de investigaciones relacionadas con el tipo de cálculos que realizan los adultos en su vida diaria muestran que la mayoría de tales cálculos son realizados mentalmente (*Wandt & Brown, 1957* y *Northcote & McIntosh, 1999; citados por Lemonidis, 2016*).
- La difusión generalizada de calculadoras de bajo costo y entornos digitales aumenta la necesidad de cálculos mentales como un medio para verificar las respuestas proporcionadas por éstos.
- La filosofía de los programas implica un movimiento general hacia enfoques constructivistas para la enseñanza de

las matemáticas, que, en lo que respecta a los cálculos, se expresan con el interés de comprender las estrategias utilizadas por los propios estudiantes para calcular mentalmente.

- Los currículos modernos también se refieren a la importancia de la habilidad para entender y trabajar con números. De acuerdo con esto, las personas deben ser capaces de lidiar fácilmente con las operaciones en su vida diaria, de realizar operaciones durante la etapa de resolución de problemas y comprender la importancia de estas operaciones, así como de las soluciones a un problema determinado.
- Hoy en día, es ampliamente conocido que los estudiantes cometen muchos errores en largas operaciones escritas y en la aplicación de reglas algorítmicas para operaciones con fracciones, decimales y porcentajes. La razón de estos errores, así como para olvidar y confundir las reglas algorítmicas, es la falta de comprensión.

Por lo anterior, los autores de este libro desean que los profesores de educación básica, especialmente los del estado de Durango, enfaticen el cálculo mental y la estimación en el aula. Que, para ello, utilicen, disfruten y mejoren los materiales aquí propuestos y que se apropien de la frase que inspira este trabajo:

Never ask a question with only one right answer. – Nunca hagas una pregunta con sólo una respuesta correcta – Judah Schwartz (cita tomada de Stroup, Ares, & Hurford, 2004).

Pero, sobre todo, que la apliquen en su día a día de quehacer docente.

Bibliografía Citada

Hartnett, J. (2017).

Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. En J. Watson & K. Beswick (eds.), *Mathematics: essential research, essential practice. Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (345-352). Hobart, Tasmania, Australia: MERGA.

Land, S., Hannafin, M., & Oliver, K. (2012).

Student-centered learning environments. Foundations, assumptions and design. En D. Johassen & S. Land (Eds.) *Theoretical foundations of learning environments*. (3-21). New York: Routledge.

Lemonidis, C. (2016).

Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research, teaching and learning. New York: Routledge.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003).

Beyond constructivism: A models and modelling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mochón, S. & Vázquez, J. (1995).

Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática* 7, 3, 93-105.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000).

Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers.

Reys, R. E. (1984).

Mental computation and estimation: Past, present and future. *Elementary School Journal*, 84(5), 546-557.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria: Educar para la libertad y la creatividad*. Ciudad de México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2018).

Matemáticas. En *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio la educación básica*. (pp. 298-395). Ciudad de México: SEP.

Segovia, I. & Rico, L. (Coords.). (2011).

Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008).

Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Stroup, W., Ares, N.M. & Hurford, A. (2004).

A Taxonomy of Generative Activity Design Supported by Next- Generation Classroom Networks. Psychology of Mathematics Education - North America. Ontario, Canada. (pp. 837-846)

Stroup, W. (2009).

Principios para Actividades Generativas. Centro de Diseño Generativo. UT-Austin.

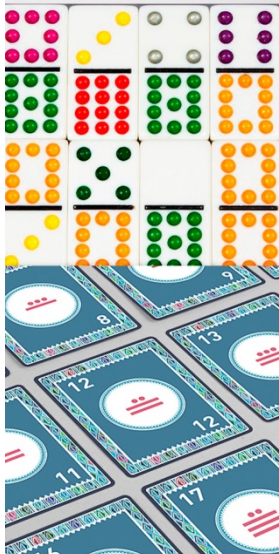
Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2013).

Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally. New Jersey: Pearson

Anexo

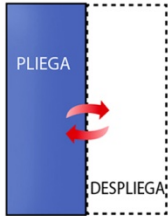
Recursos y herramientas

Este espacio está reservado para recursos y herramientas utilizados en los ambientes de aprendizaje de los Capítulos 2 y 3 que aparecen en las siguientes listas. Estos recursos además de aparecer en este anexo se pueden descargar para imprimir en: https://face.ujed.mx/?page_id=1681

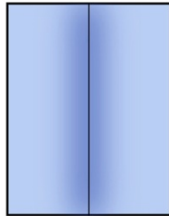
Ambientes de aprendizaje para favorecer la estimación	
	<i>Sección 2.5 Aviones y trayectorias</i> a) Instructivo para el avión Nakamura..... p. 59 b) Instructivo para el avión Espía p. 60 c) Instructivo para el avión Pteroplano..... p. 61 d) Instructivo para el avión profesional..... p. 63
	<i>Sección 2.9 Diseño digital: trabajo con fotografías</i> a) Conjunto de fotografías 1: Museo del Bebeleche p. 90 b) Conjunto de fotografías 2: Rehilete p. 92 c) Conjunto de fotografías 3: Escultura Bebelechep. 94 d) Conjunto de fotografías 4: Pájarop. 96
Ambientes de aprendizaje para favorecer el cálculo mental	
	<i>Sección 3.1 Los puntos de dominó: estrategias para sumar</i> Dominó doble doce con puntospp. 76-84
	<i>Sección 3.2 Las fichas de dominó: suma de fracciones</i> Dominó doble doce con puntos pp. 76-84
	<i>Sección 3.5 La baraja aritmética: combinaciones ganadoras de números y operaciones</i> Juego de baraja versión maya para imprimir pp. 64-74
	<i>Sección 3.7 Cadena de sumas</i> Juego de cartas para imprimir pp. 86-88

Avión Nakamura

1

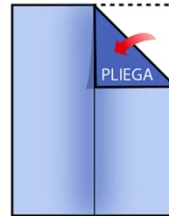


Pliega a lo largo por la mitad. Despliega para formar la marca central.

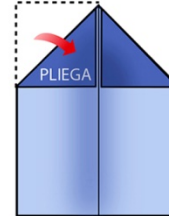


Marca Central

2

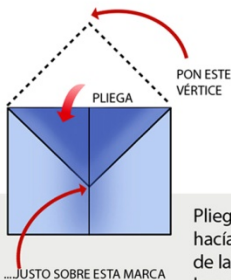


Pliega el ángulo superior derecho hacia abajo de modo que el borde superior quede alineado con la marca central.



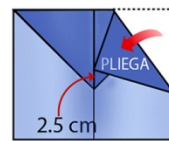
Haz lo mismo con el ángulo superior izquierdo.

3

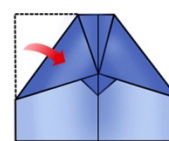


Pliega el vértice superior hacia abajo, justo por debajo de las aletas que acabas de hacer.

4

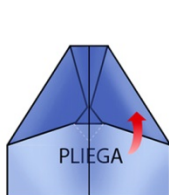


Coloca el ángulo superior derecho sobre la marca central, a 2.5 cm por encima del vértice. Marca bien los pliegues.



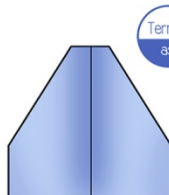
Haz lo mismo con el ángulo superior izquierdo.

5



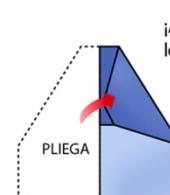
Vuelve el vértice hacia arriba y plégalo de modo que quede sobre la marca central.

Vuelta



Termina así

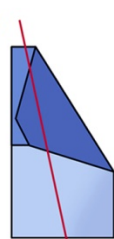
6



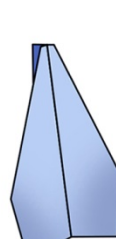
Pliega por la mitad. Asegúrate que los bordes del lado izquierdo queden perfectamente alineados con los bordes de la derecha.

¡Asegúrate de alinear los bordes!

7



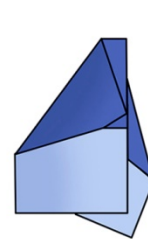
Pliega sólo la aleta superior por donde te muestra la línea roja.



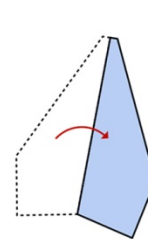
Vuelta

Termina así

8



Pliega la otra ala de modo que se asiente perfectamente sobre la primera. ALINEA LOS BORDES CON LOS DEL ALA QUE ACABAS DE PLEGAR.



Avión Espía

1

Comienza así

2

Pliega a lo largo por la mitad. Despliega para formar la marca central.

3

Luego pliega los 2.5 cm inferiores hacia arriba, haciendo coincidir la marca central.

4

La marca central debe coincidir en cada pliegue. Haz el mismo pliegue 6 veces más...

Total 7 pliegues ...

... Hasta obtener este.

Termina así

6

Pliega por la mitad de izquierda a derecha

7

Pliega la aleta superior hacia atrás por donde indica la línea roja.

Termina así

8

La clave es

¡Que los bordes coincidan y presiones bien!

DALE VUELTA

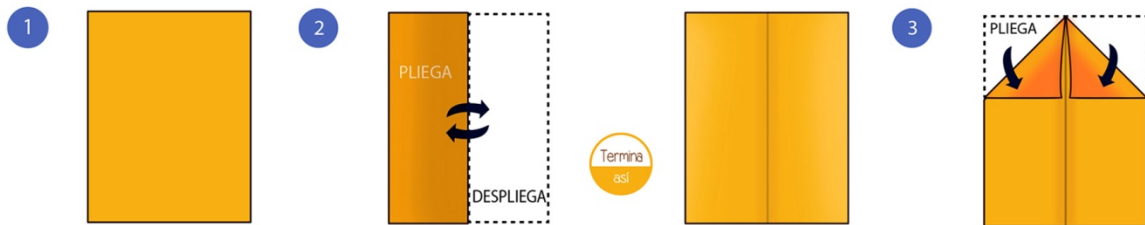
9

Casi Listo

Abre parcialmente las alas. Desde la cola, tu avión debe verse así.

Luego forma aletas del ancho de un pulgar en cada ala. Deben quedar paralelas al fuselaje.

Avión Pteroplano

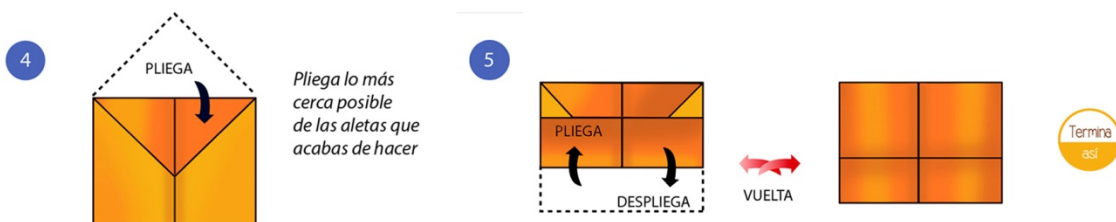


Comienza así

Pliega y despliega a lo largo para hacer una marca central.

Marca Central

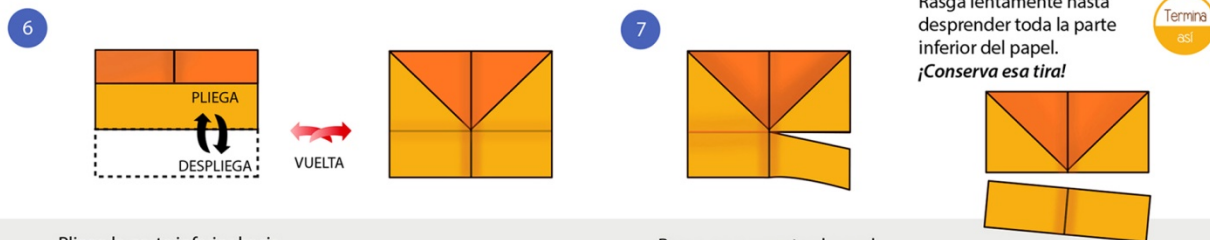
Pliega los dos ángulos superiores hacia abajo.



Pliega lo más cerca posible de las aletas que acabas de hacer

Pliega el vértice superior hacia abajo haciendo coincidir con la marca central.

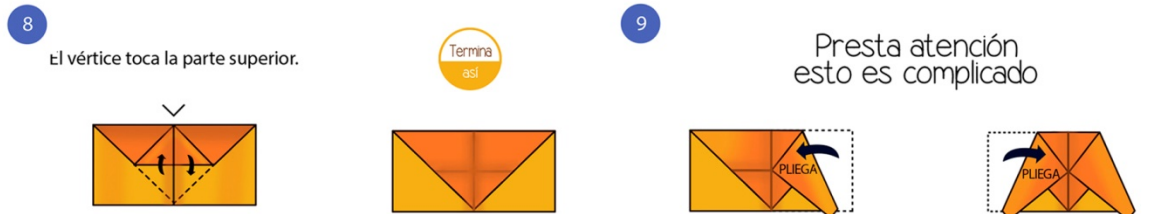
Pliega la parte inferior del papel hacia arriba, haciendo un doblez justo a la altura del vértice del triángulo invertido. Despliega.



Pliega la parte inferior hacia arriba por la misma marca.

Rasga suavemente el papel por la marca.
Usa tijeras si te resulta difícil rasgar el papel.

Un poco irregular está bien. Muy irregular no sirve.



Pliega la punta hacia el borde superior, haciendo coincidir la marca central. Despliega.

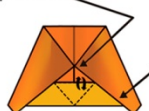
Pliega el ángulo superior derecho hacia la + formada en el centro por las dos marcas.

Haz lo mismo con el ángulo superior izquierdo.

Avión Pteroplano

10

Esta aleta debe cubrir apenas...



... las aletas que acabas de plegar.



Termina así

Pliega la punta del medio hacia arriba tanto como puedas. Marca bien y despliega.

11



La marca que acabas de hacer

Trae la parte superior hasta la marca que acabas de hacer. Alinéala y pliega con cuidado.

12



Termina así

Dobla nuevamente la punta hacia arriba por la misma marca.

13

Alinea todos los bordes



Pliega por la mitad de izquierda a derecha.

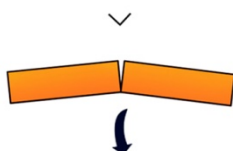
14



Toma la tira de papel que separaste en el paso 7. Pliéglala a lo largo por la mitad.

15

Rasga por la marca central



Con cuidado, rasga la tira por la mitad por la marca vertical del centro.

16

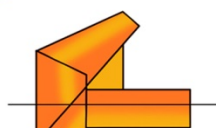


Inserta una de las piezas en la aleta superior del fuselaje del avión. (Elimina la otra pieza.)

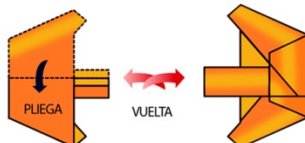
Termina así



17

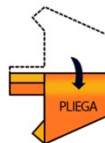


Pliega el ala de modo que una parte de la cola sea el ancho de un meñique se doble junto con ella. Haz el pliegue paralelo al borde.



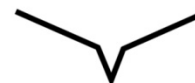
VUELTA

18



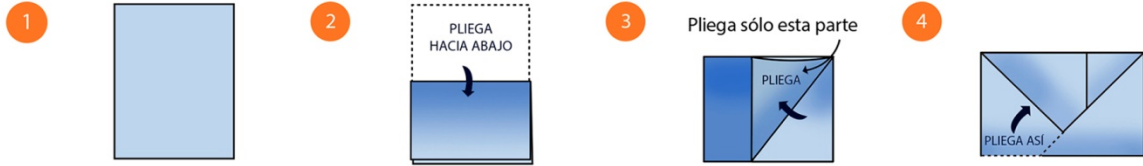
Dale vuelta y pliega la otra ala de modo que coincida con la que está debajo.

Casi Listo



Abre las alas de modo que tu Pteroplano, desde la cola se vea así.

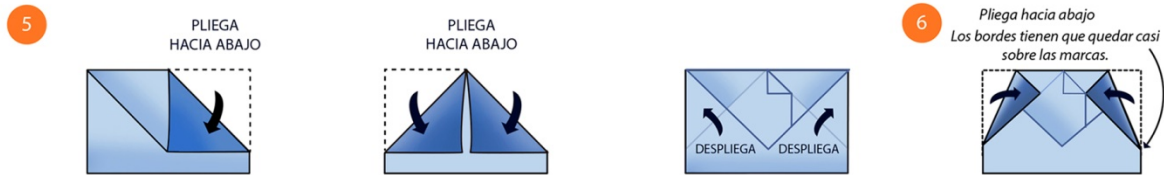
Avión Profesional



Pliega la parte superior hacia abajo por la mitad. Debes ser exacto.

Pliega sólo esta parte
Pliega el borde derecho de la aleta de arriba de modo que se apoye sobre la marca que hiciste.

Haz el mismo pliegue con el lado izquierdo. La mitad superior del papel debería quedar como triángulo invertido.

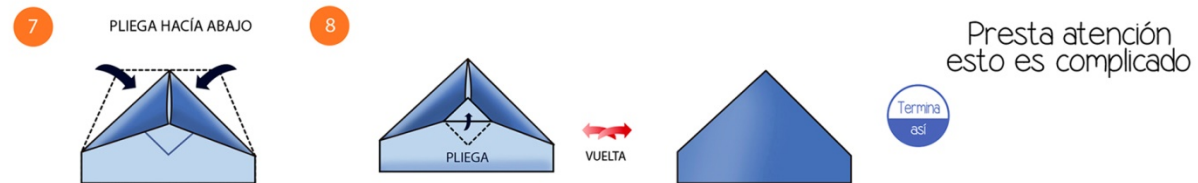


Pliega el ángulo superior derecho hacia abajo sobre la punta del triángulo invertido.

Haz lo mismo pliegue con el lado izquierdo.

Abre los dos últimos pliegues que hiciste.

Pliega los ángulos derecho e izquierdo hacia abajo casi sobre los pliegues que acabas de abrir.

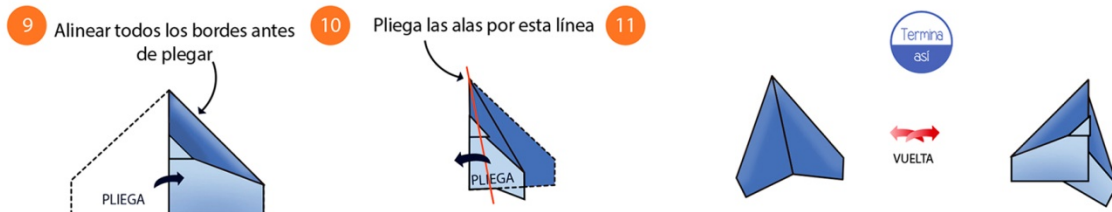


Vuelve a plegar por las mismas marcas.

Dobla la punta del centro hacia arriba.



Presta atención esto es complicado



Pliega por la mitad, de la izquierda a derecha.

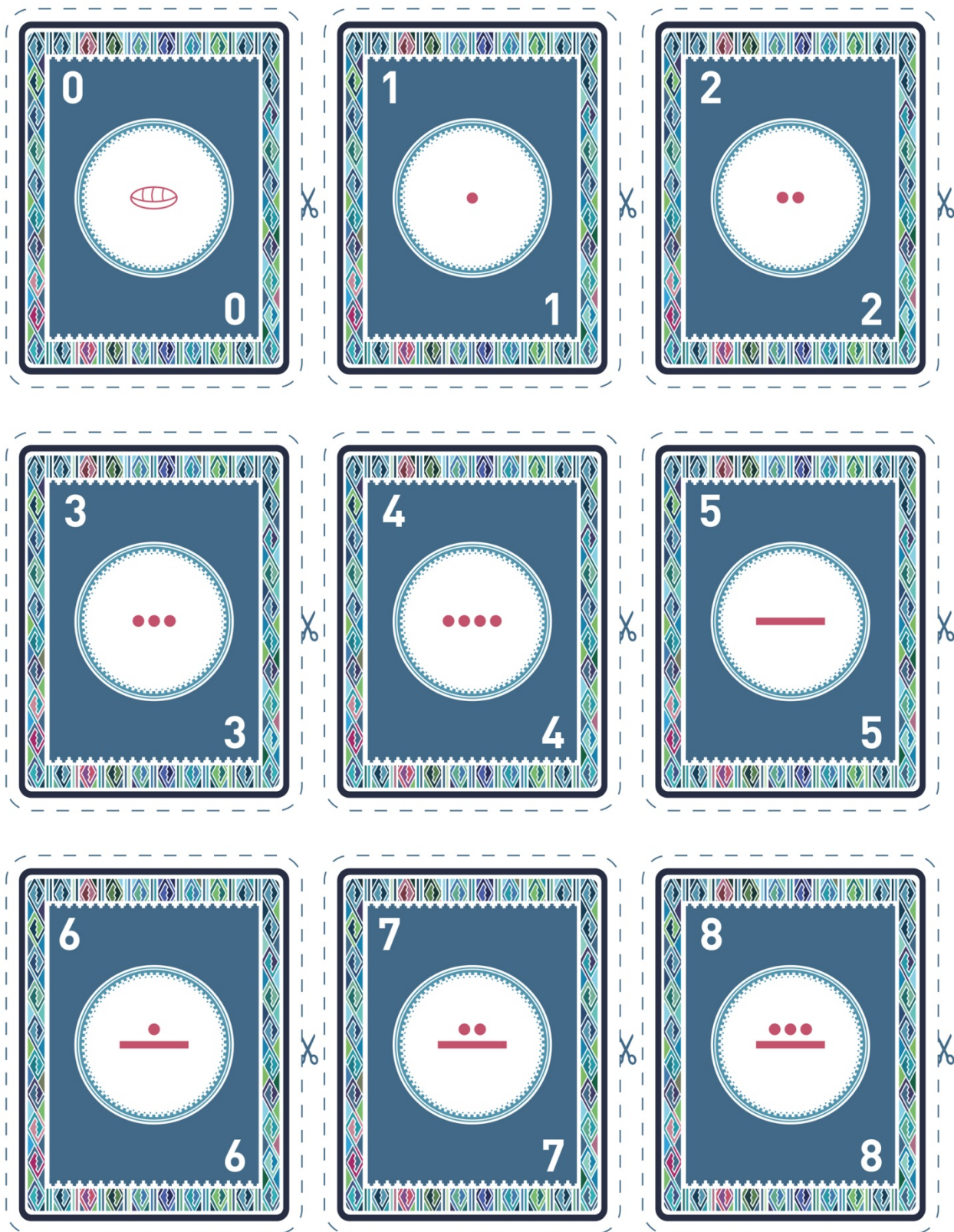
Pliega la parte superior del ala hacia abajo.

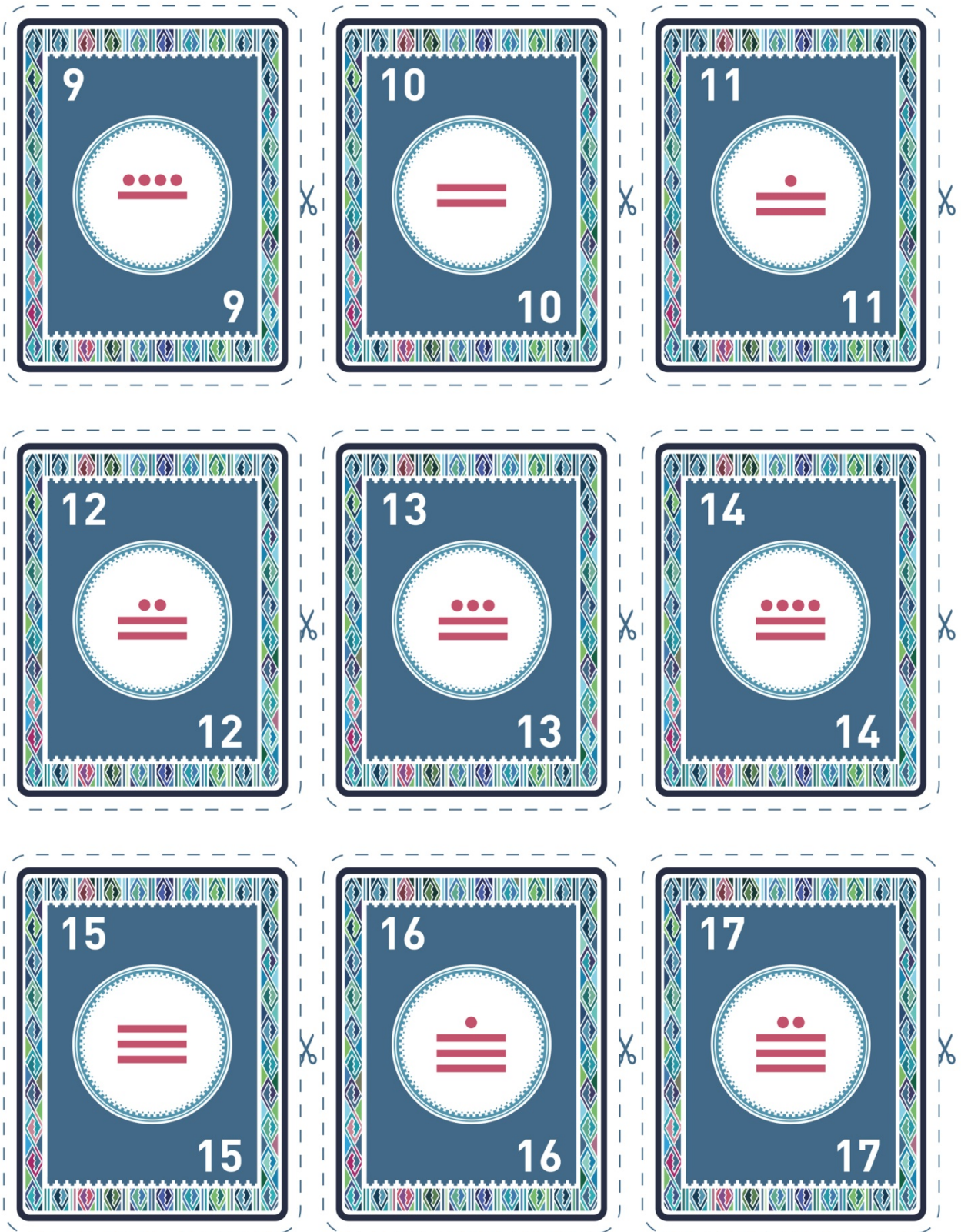


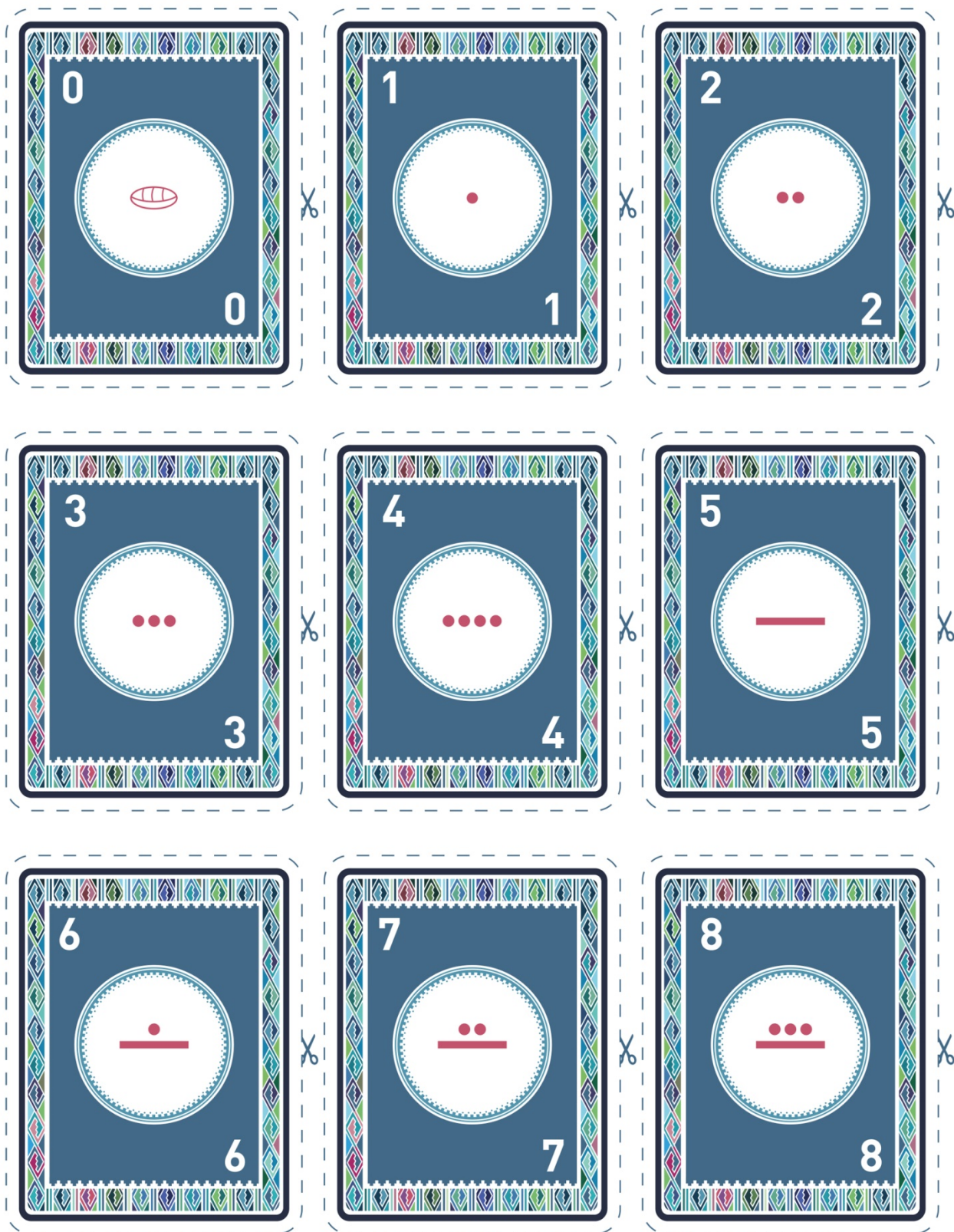
Casi Listo

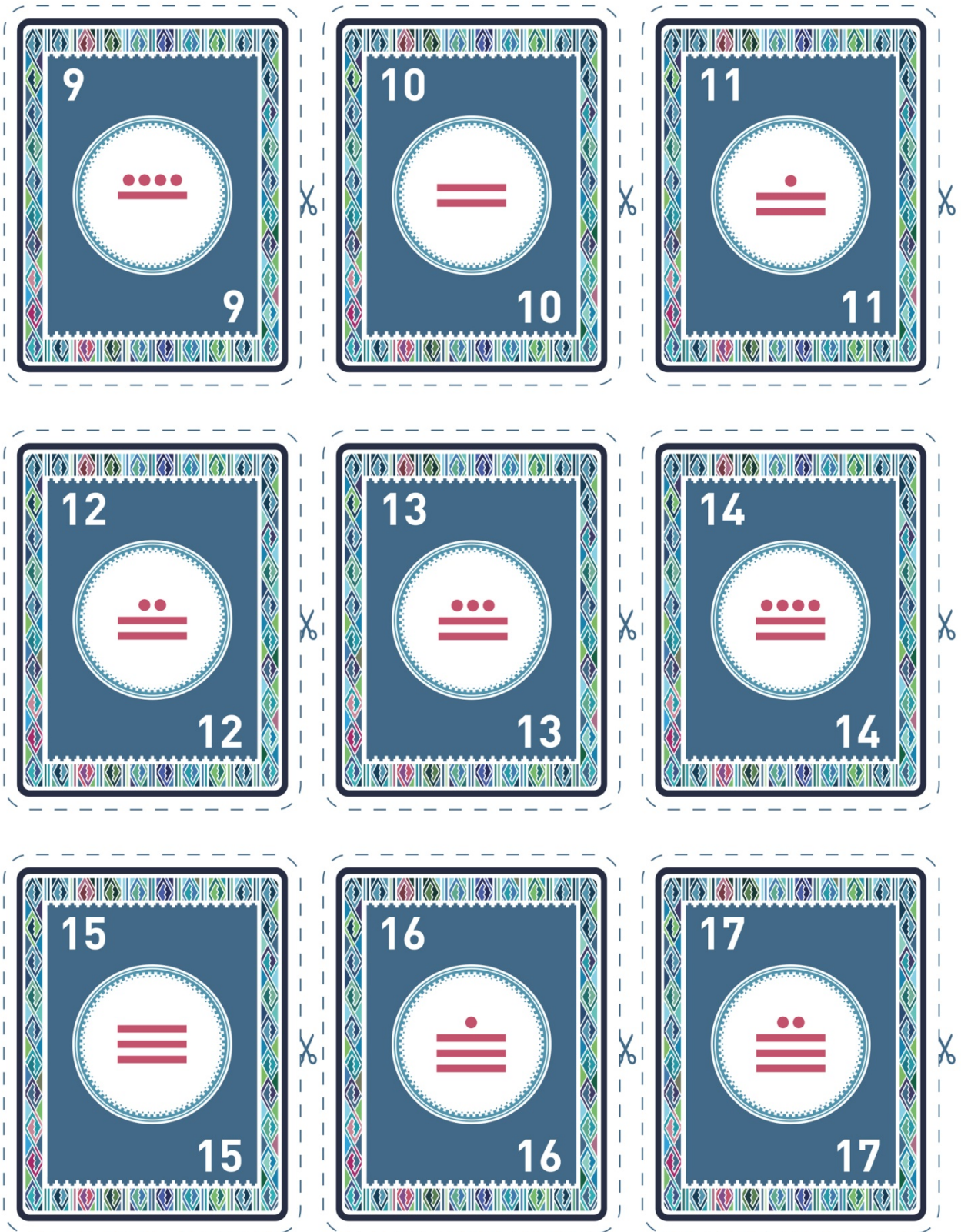
Abre las alas. Desde la cola, tu avión deberá verse así.

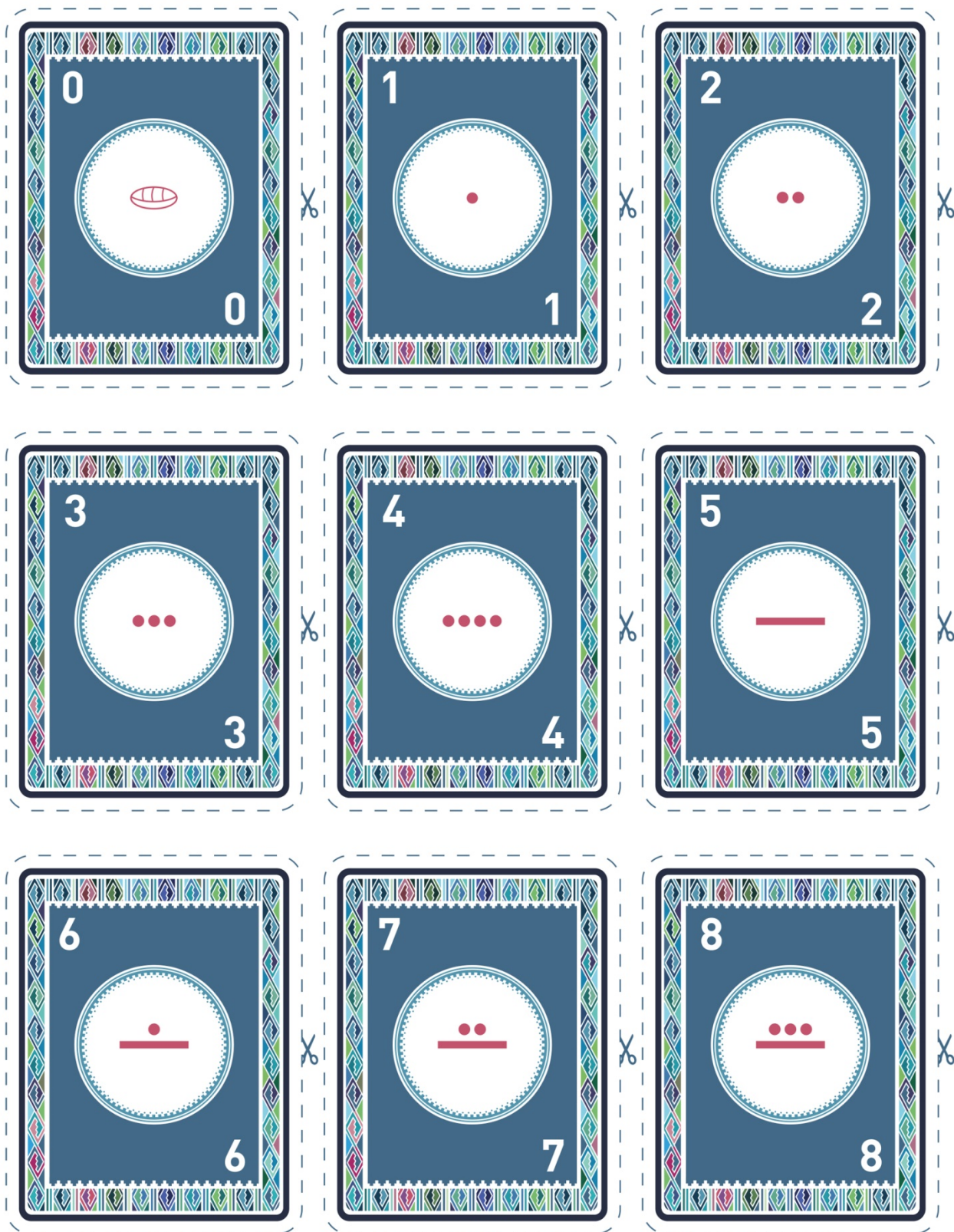
Haz aletas del tamaño de un meñique plegando hacia arriba el papel en ambos lados.

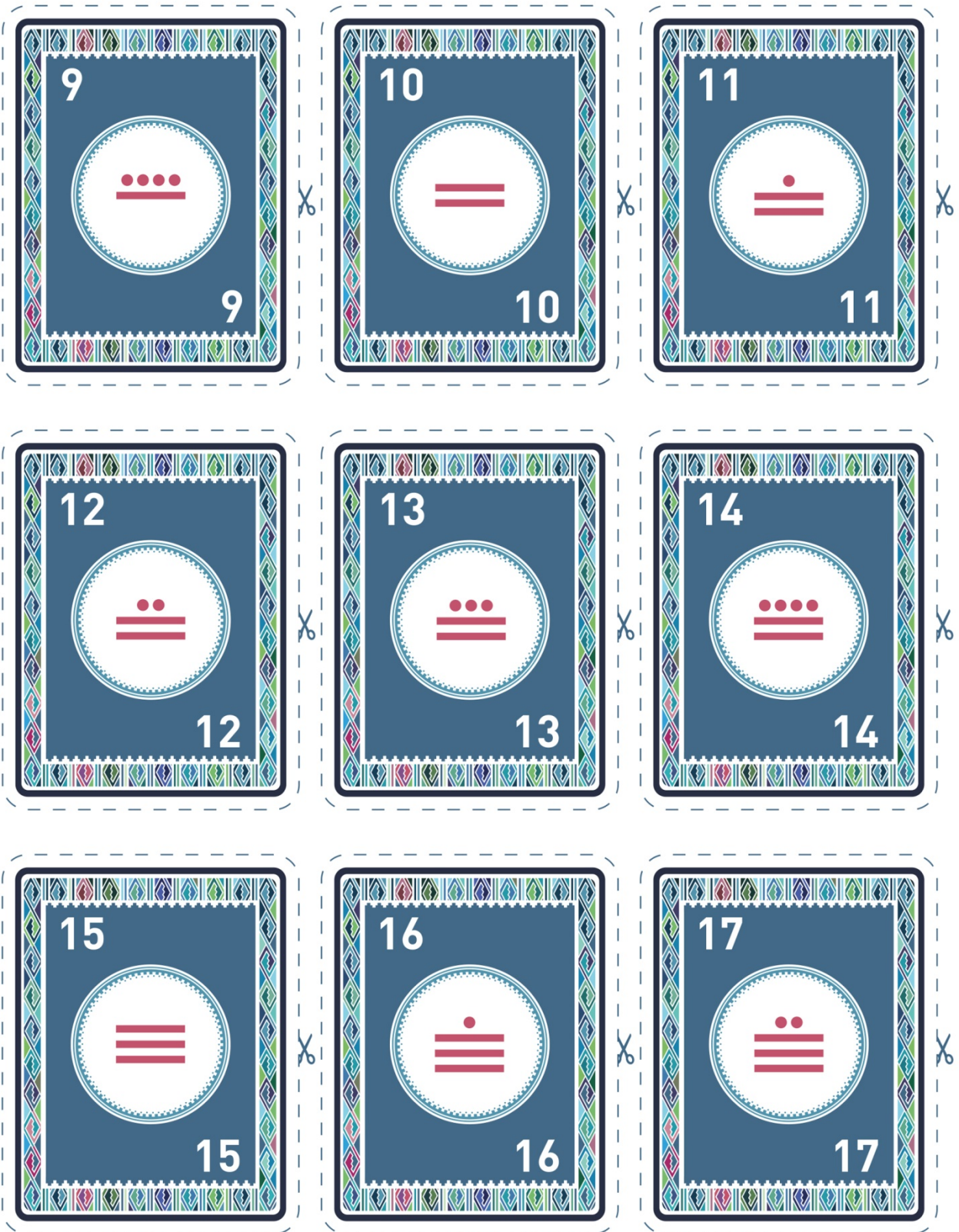


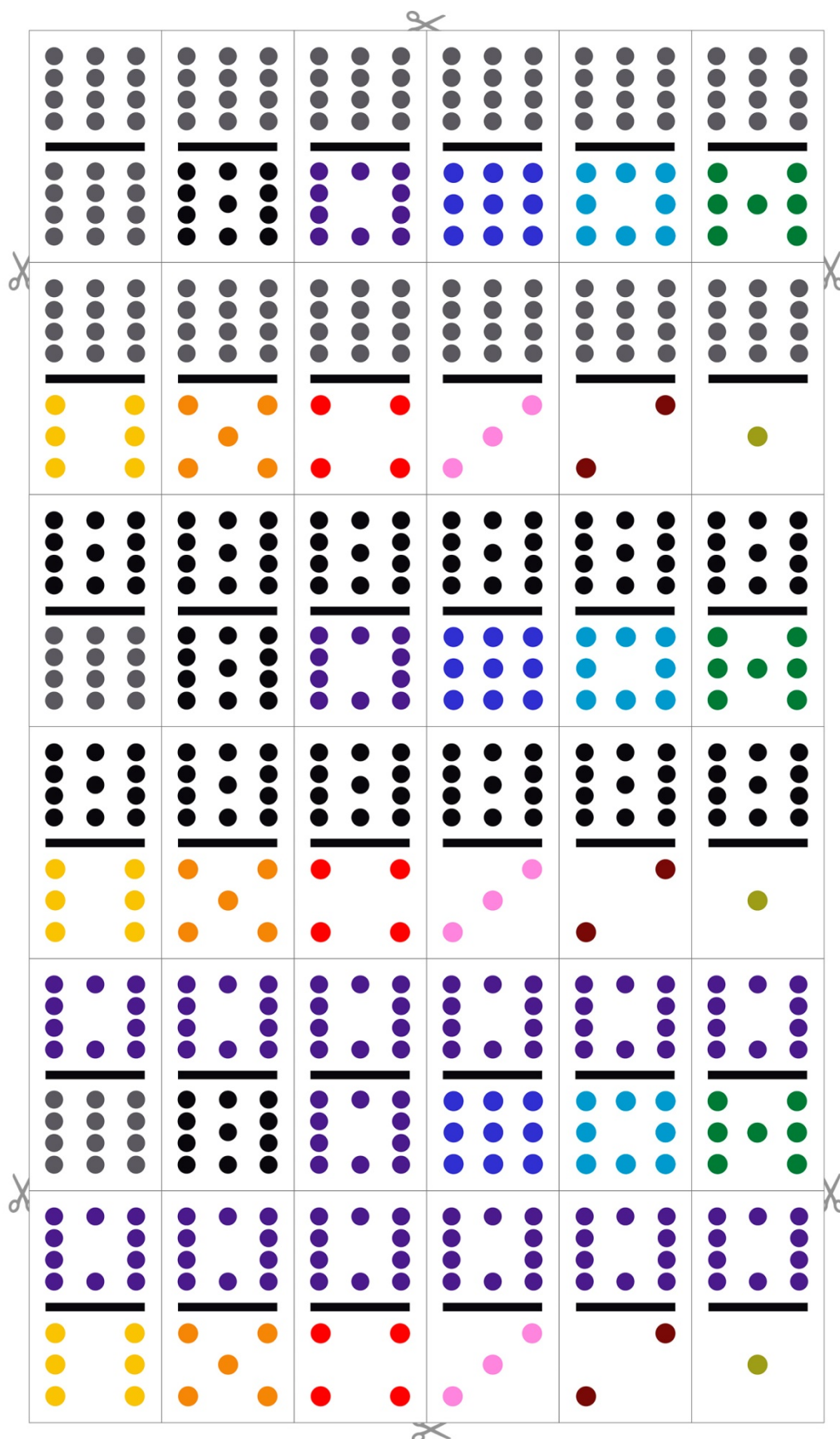


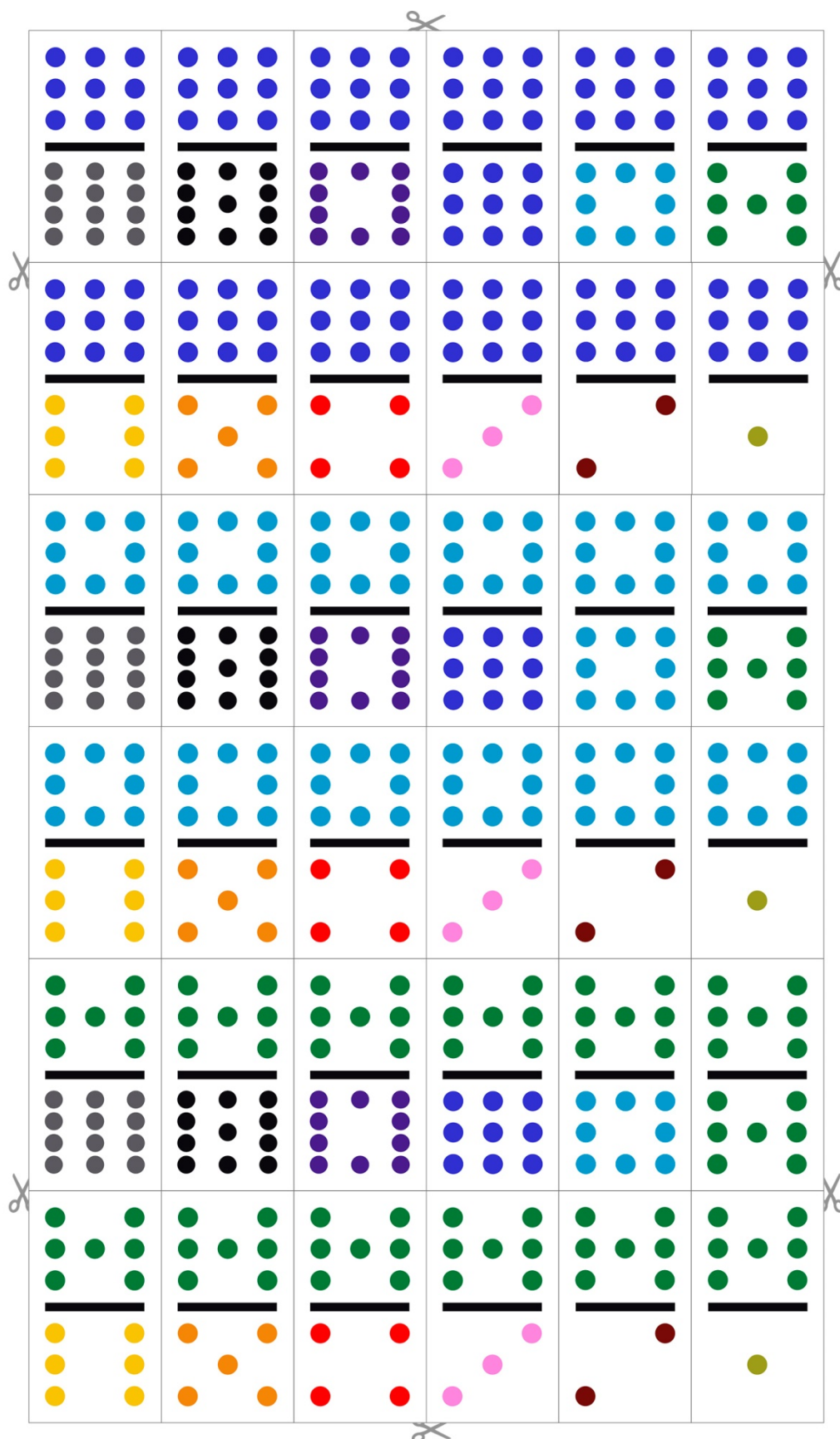


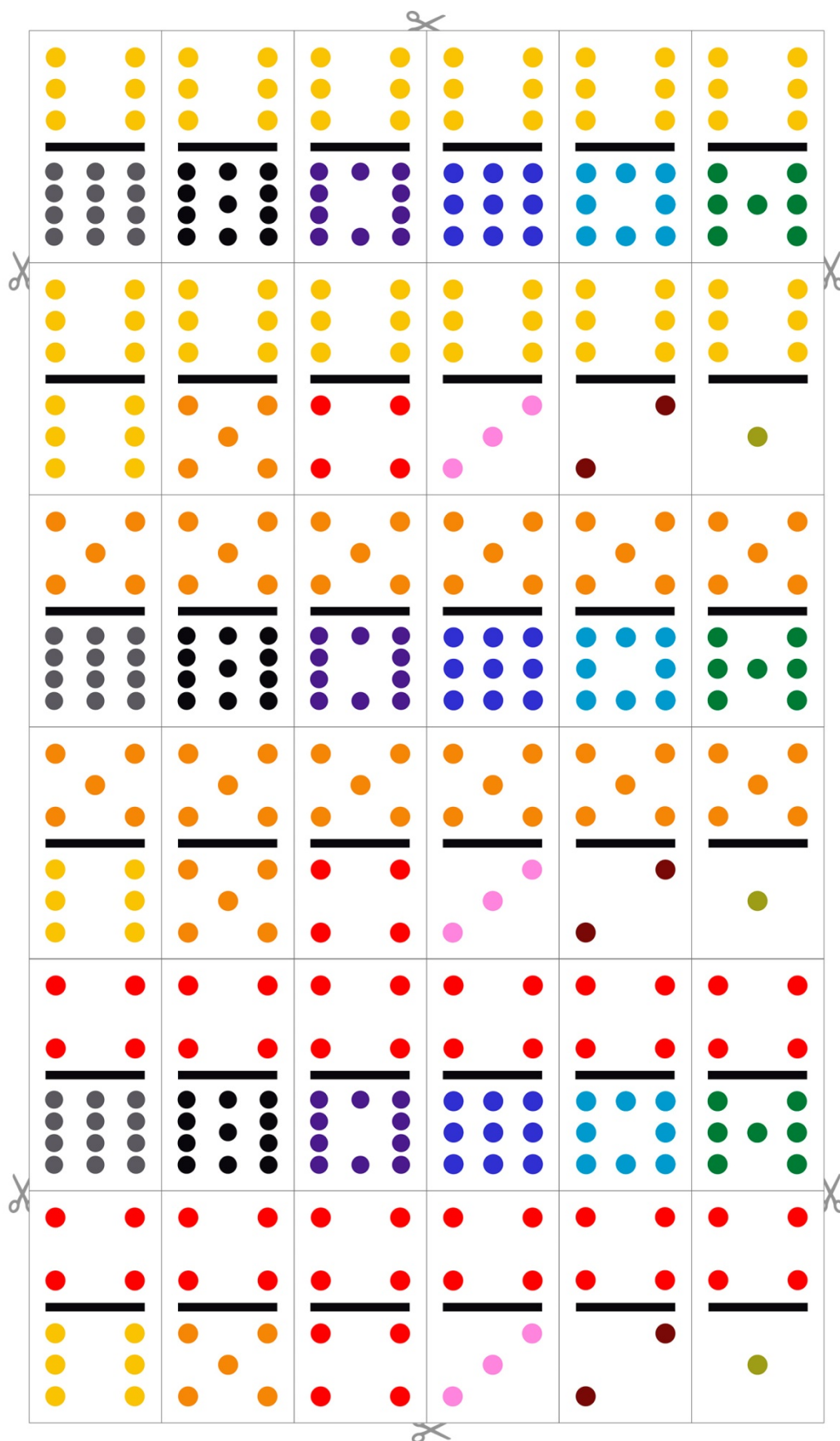


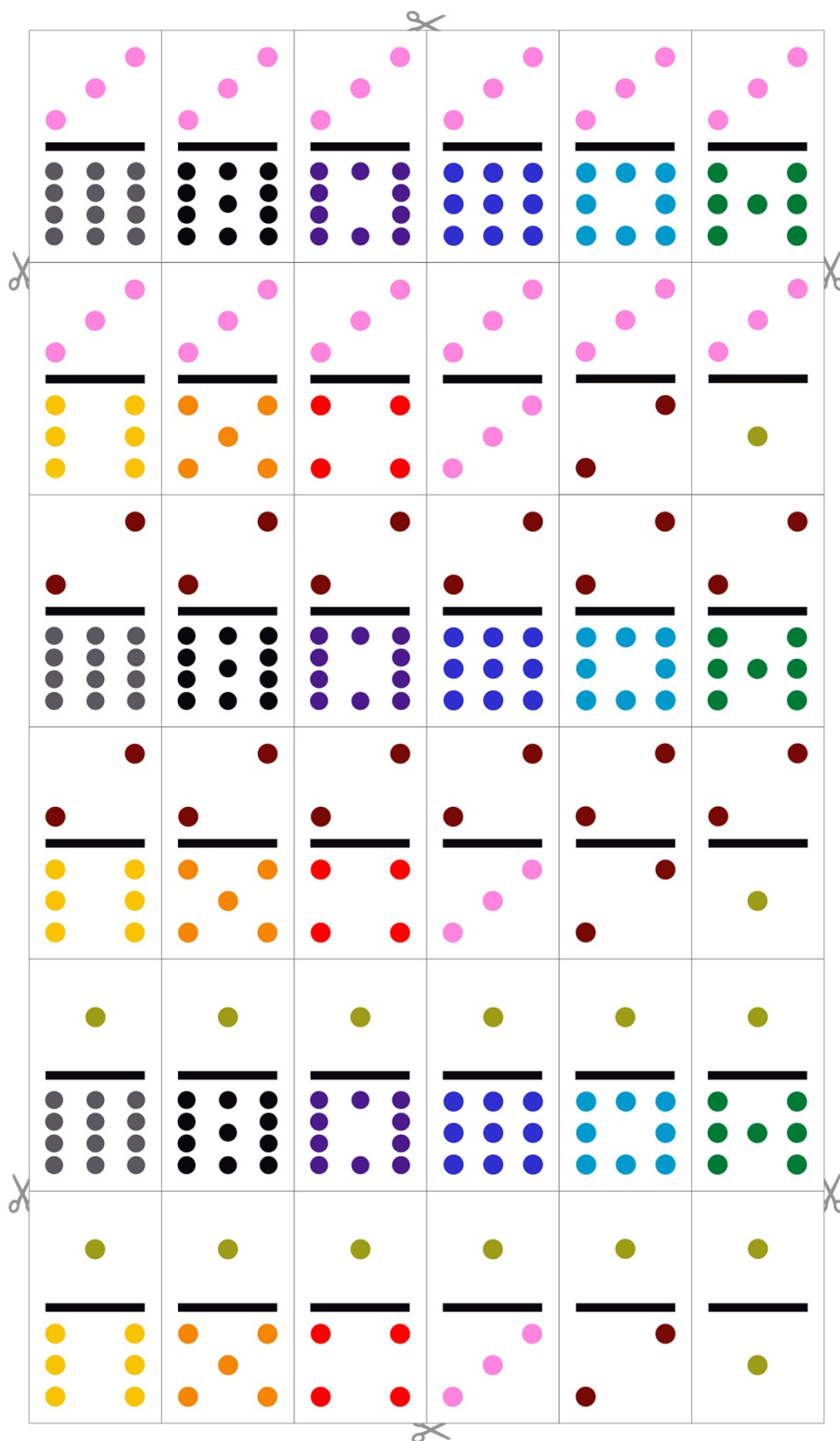




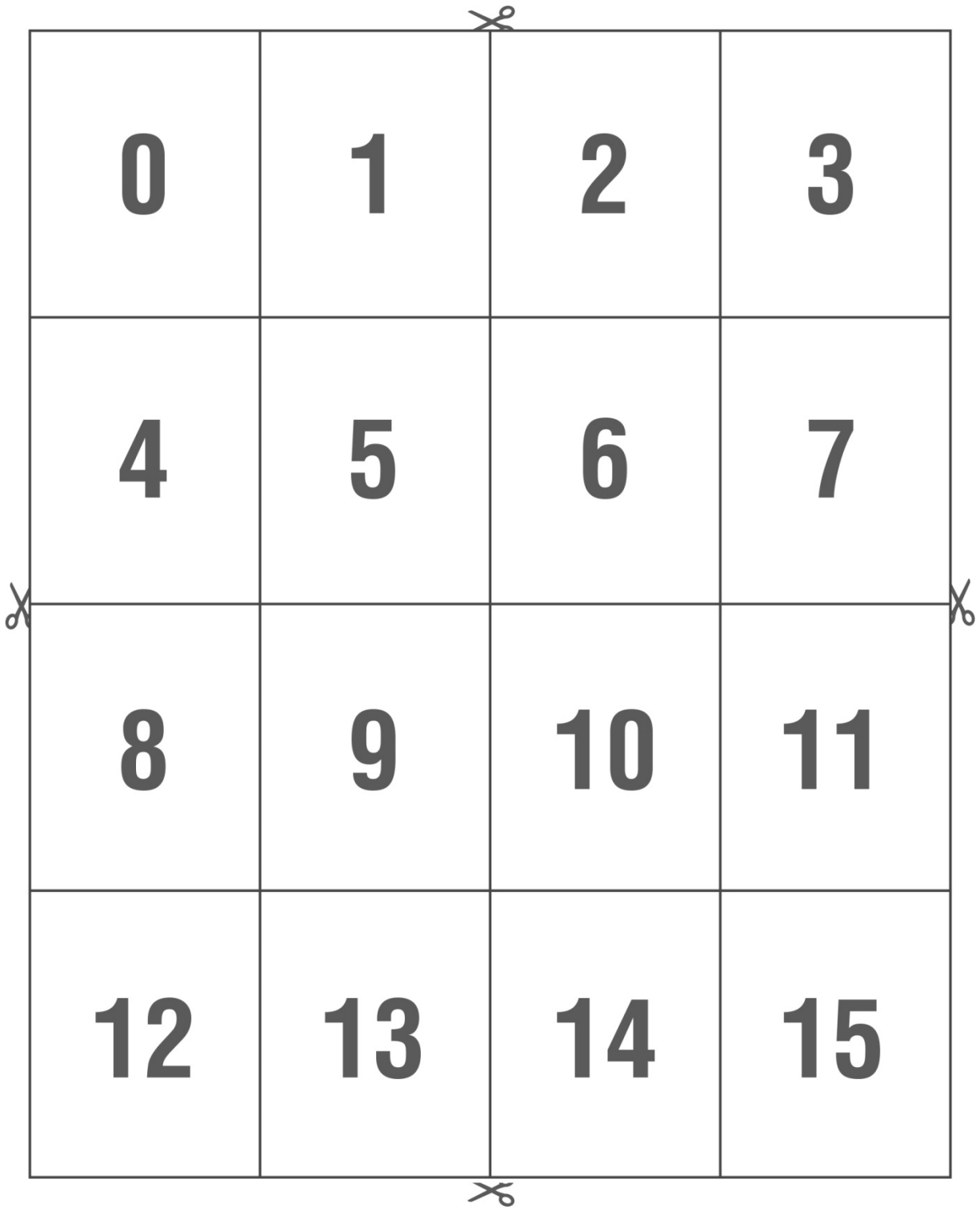












A 3x4 grid of numbers from 16 to 25. The grid is composed of white cells with black borders. The numbers are centered in each cell. There are three scissors icons indicating where to cut: one on the top border between columns 2 and 3, one on the left border between rows 2 and 3, and one on the bottom border between columns 2 and 3.

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25		



Foto original
Conjunto 1

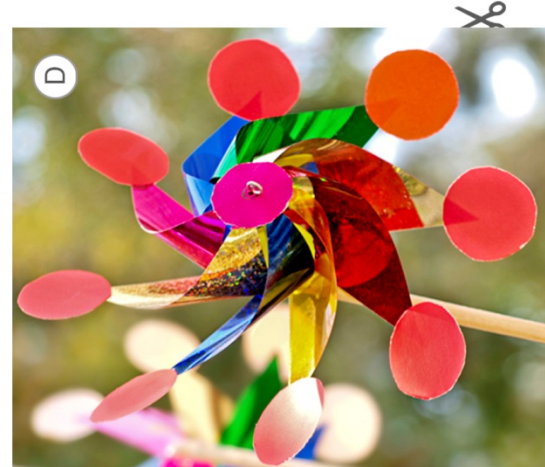




Foto original
Conjunto 3

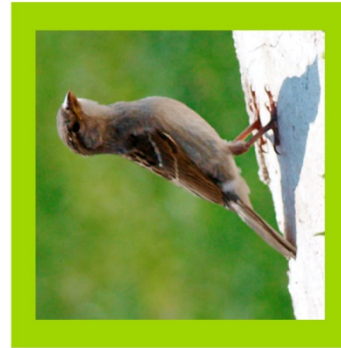
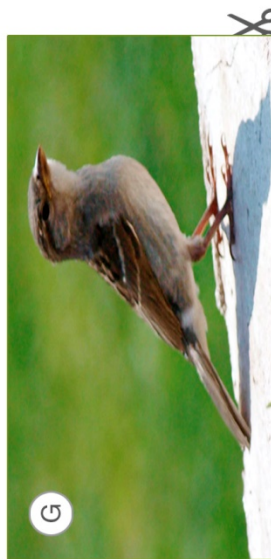
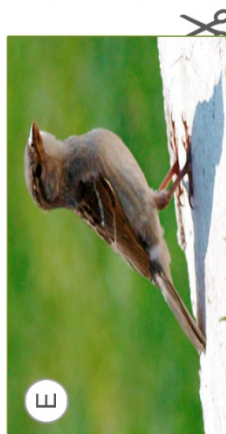
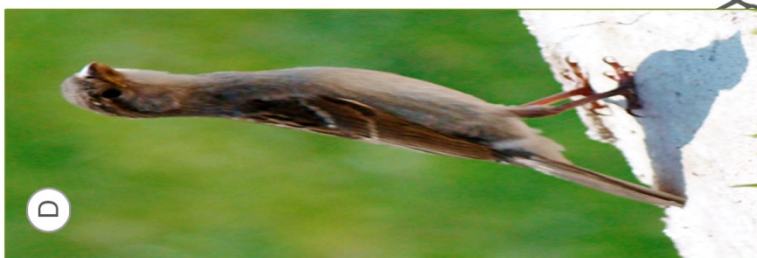


Foto original
Conjunto 4

Este programa es público ajeno a cualquier partido político, queda prohibido el uso para fines distintos a los establecidos en el programa.



**La estimación y el cálculo mental
en educación básica: secundaria**

ISBN 978-607-503-187-3



9 786075 105187